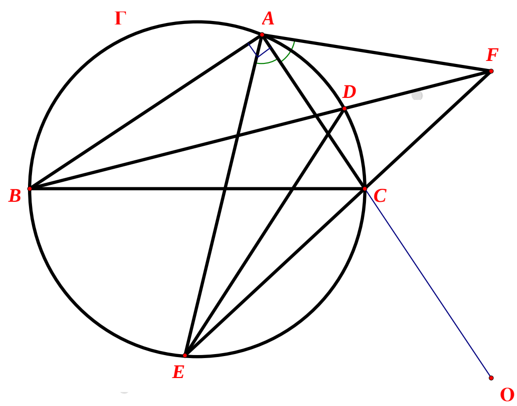
2009 女子数学奥林匹克

第一天

2009 年 8 月 13 日 上午 8：00 ~ 12：00 厦 门

1．求证：方程 $abc = 2009(a+b+c)$只有有限组正整数解 (a, b, c).

2．如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，点 E 在$\triangle ABC$ 的外接圆 Γ 的弧 BC（不含点 A）内，$AE > EC$．连接 EC 并延长至点 F，使得$\angle EAC=\angle CAF$，连接 BF 交圆 Γ 于点 D，连接 ED，记$\triangle DEF$ 的外心为 O．求证：A, C, O 三点共线．



3．设平面直角坐标系中点集

$$\{P_1, P_2, \ldots, P_{4n+1}\} = \{(x, y) \mid x, y \text{ 为整数}, |x|\leqslant n, |y|\leqslant n, xy=0\},$$

其中 n 为正整数．求 $(P_1P_2)^2+(P_2P_3)^2+\ldots+(P_{4n}P_{4n+1})^2+(P_{4n+1}P_1)^2$ 的最小值．

4．设平面上有 n 个点 $V_1, V_2, \ldots, V_n$ $(n\geqslant4)$，任意三点不共线，某些点之间连有线段．把标号分别为 $1, 2, \ldots, n$ 的 n 枚棋子放置在这 n 个点处，每个点处恰有一枚棋子．现对这 n 枚棋子进行如下操作：每次选取若干枚棋子，将它们分别移动到与自己所在点有线段相连的另一个点处；操作后每点处仍恰有一枚棋子，并且没有两枚棋子在操作前后交换位置．若一种连线段的方式使得无论开始时如何放置这 n 枚棋子，总能经过有限次操作后，使每个标号为 k 的棋子在点 V_k 处，$k=1, 2, \ldots, n$，则称这种连线段的方式为“和谐的”，求在所有和谐的连线段的方式中，线段数目的最小值．

2009 女子数学奥林匹克

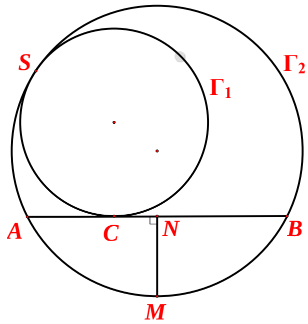
第二天

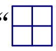
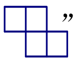
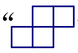
2009 年 8 月 14 日 上午 8：00～12：00 厦 门

5．设实数 x, y, z 大于或等于 1，求证：

$$(x^2-2x+2)(y^2-2y+2)(z^2-2z+2) \leqslant (xyz)^2-2xyz+2.$$

6．如图，圆 Γ_1，Γ_2 内切于点 S，圆 Γ_2 的弦 AB 与圆 Γ_1 相切于点 C，M 是弧 AB（不含点 S）的中点，过点 M 作 $MN \perp AB$，垂足为 N．记圆 Γ_1 的半径为 r，求证：$AC \cdot CB = 2r \cdot MN$．



7. 在一个 10×10 的方格表中有一个由 $4n$ 个 1×1 的小方格组成的图形，它既可被 n 个“”型的图形覆盖，也可被 n 个“”或“”型（可以旋转）的图形覆盖．求正整数 n 的最小值．

8．设 $a_n = n\sqrt{5} - [n\sqrt{5}]$，求数列 a_1，a_2，…，a_{2009} 中的最大项和最小项，其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数．