准考证号________________姓名________________

（在此卷上答题无效）

2021 年三明市普通高中毕业班质量检测

数学试题

本试卷共 5 页．满分 150 分．

注意事项：

1．答题前，考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的姓名、准考证号．考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的"准考证号、姓名"与考生本人准考证号、姓名是否一致．

2．选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号．非选择题用 0.5 毫米黑色签字笔在答题卡上书写作答．在试题卷上作答，答案无效．

3．考试结束后，考生必须将本试卷和答题卡一并交回．

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合 $A=\{x\mid -1<x<3\}$， $B=\{x\mid 2x-1<0\}$，则 $A\cap B=$

A．$\left\{x\middle|-1<x<-\frac{1}{2}\right\}$　　B．$\left\{x\middle|-1<x<\frac{1}{2}\right\}$

C．$\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x<3\right\}$　　D．$\left\{x\middle|\frac{1}{2}<x<3\right\}$

2．已知 i 为虚数单位，若复数 z 满足 $|z|-z=2+4\mathrm{i}$，则 z 在复平面内对应的点的坐标为

A．$(3,4)$　　B．$(-3,4)$　　C．$(3,-4)$　　D．$(-3,-4)$

3．某市长期追踪市民的经济状况，依照订立的标准将市民分为高收入和低收入两类．统计数据表明该市高收入市民人口一直是低收入市民人口的两倍，且高收入市民中每年有 40% 会转变为低收入市民．那么该市每年低收入市民中转变为高收入市民的百分比是

A．60%　　B．70%　　C．80%　　D．90%

4．$(1+2x)\left(x^2-2\right)^5$ 展开式中 x^5 的系数为

A．-160　　B．-80　　C．80　　D．160

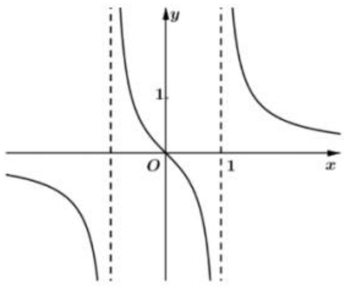
5. 若函数 $y=f(x)$ 的大致图象如图所示，则 $f(x)$ 的解析式可能是

A. $f(x)=\dfrac{x}{|x|-1}$

B. $f(x)=\dfrac{x}{1-|x|}$

C. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

D. $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$



6. “干支纪年法”是中国历法上使用的纪年方法. 甲，乙，丙，丁，戊，己，庚，辛，壬，癸被称为“十天干”，子，丑，寅，卯，辰，巳，午，未，申，酉，戌，亥被称为“十二地支”. “天干”以“甲”字开始，“地支”以“子”字开始，两者按干支顺序相配，其相配顺序为：甲子，乙丑，……，癸酉，甲戌，乙亥，……，壬戌，癸亥，甲子，……，周而复始，循环记录，此为干支纪年法. 十三届全国人大四次会议审查的《国民经济和社会发展第十四个五年规划和2035年远景目标纲要(草案)》提出，展望2035年，中国将基本实现社会主义现代化. 已知1901年是“干支纪年法”中的辛丑年，那么2035年是“干支纪年法”中的

A. 甲寅年　　B. 乙卯年　　C. 丙辰年　　D. 丁巳年

7. 某市原来都开小车上班的唐先生统计了过去一年每一工作日的上班通行时间，并进行初步处理，得到频率分布表如下（T 表示通行时间，单位为分钟）：

通行时间	$15\leqslant T<20$	$20\leqslant T<25$	$25\leqslant T<30$	$30\leqslant T<35$	$35\leqslant T\leqslant 40$
频　率	0.1	0.3	0.3	0.2	0.1

该市号召市民尽量减少开车出行，以绿色低碳的出行方式支持节能减排. 唐先生积极响应政府号召，准备每天从骑自行车和开小车两种出行方式中随机选择一种. 如果唐先生选择骑自行车，当天上班的通行时间为30分钟. 将频率视为概率，根据样本估计总体的思想，对唐先生上班通行时间的判断，以下正确的是

A. 开小车出行的通行时间的中位数为27.5分钟

B. 开小车出行两天的总通行时间少于40分钟的概率为0.01

C. 选择骑自行车比开小车平均通行时间至少会多耗费5分钟

D. 若选择骑自行车和开小车的概率相等，则平均通行时间为28.5分钟

8. 在三棱锥 $S-ABC$ 中，侧棱 SA，SB，SC 两两垂直，且 $SA+SB=SC=2$. 设 $SA=x$，该三棱锥的表面积为函数 $y=f(x)$，以下判断正确的是

A. $f(x)$ 为常数　　B. $f(x)$ 有极小值

C. $f(x)$ 有极大值　　D. $f(x)$ 是单调函数

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多个选项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9．设 P 是 $\triangle OAB$ 内部（不含边界）的一点，以下可能成立的是

A．$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$　　B．$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{5}\overrightarrow{OB}$

C．$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$　　D．$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$

10．对于给定的异面直线 m，n，以下判断正确的是

A．存在平面 α，使得 $m\perp\alpha$，$n\perp\alpha$

B．存在直线 l，使得 l 同时与 m，n 垂直且相交

C．存在平面 α，β，使得 $m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，且 $\alpha//\beta$

D．对于任意点 A，总存在过 A 且与 m，n 都相交的直线

11．已知 $x>0$，$y>0$，且 $2x+y=1$，则 $\frac{x+1}{xy}$ 可能取的值有

A．9　　B．10　　C．11　　D．12

12．瑞士著名数学家欧拉在 1765 年证明了定理“三角形的外心、重心、垂心依次位于同一条直线上，且重心到外心的距离是重心到垂心距离的一半”，后人称这条直线为“欧拉线”．直线 l 与 y 轴及双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线的三个不同交点构成集合 M，且 M 恰为某三角形的外心，重心，垂心所成集合．若 l 的斜率为 1，则该双曲线的离心率可以是

A．$\frac{\sqrt{26}}{5}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．$\sqrt{10}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．若 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{3}$，则 $\cos 2\alpha=$________．

14．若抛物线 $y=ax^2$ 上的点 $P(m,2)$ 到焦点的距离为 3，则 $a=$________．

15．函数 $f(x)=\ln x+2x-6$ 零点的一个近似值为__________．（误差不大于 0.25）

备注：自然对数的底数 $e\approx 2.72$．

16．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\frac{1}{2}+\sqrt{a_n-a_n^{\ 2}}$，则 a_2+a_{2021} 的最大值为________．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

在① $\sin 2C=\sqrt{3}\cos C$，② $c(2+\cos B)=\sqrt{3}b\sin C$，③ $b\sin A+\sqrt{3}a\cos B=0$ 这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，若问题中的三角形存在，求该三角形的面积；若问题中的三角形不存在，说明理由．

问题：是否存在 $\triangle ABC$，它的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $b=7$，$c=5$，__________？

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

18.（12 分）

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $\{b_n\}$ 为等比数列，满足 $a_1b_1=2$，$S_2=6$，$S_3=12$，$b_1+b_2=3$．

（1）求 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $c_n=\dfrac{a_nb_n}{S_{n+1}}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n．

19.（12 分）

如图 1，在平面四边形 $ABCD$ 中，$BC=\sqrt{3}AB$，$CD=2AD$，且 $\triangle ABD$ 为等边三角形．设 E 为 AD 中点，连结 BE，将 $\triangle ABE$ 沿 BE 折起，使点 A 到达平面 $BCDE$ 上方的点 P，连结 PC，PD，设 F 是 PC 的中点，连结 BF，如图 2．

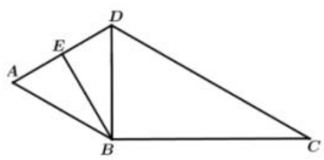


图 1

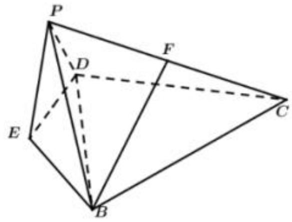


图 2

（1）证明：$BF\,//$ 平面 PDE；

（2）若二面角 $P-BE-D$ 为 60°，设平面 PBC 与平面 PDE 的交线为 l，求 l 与平面 PCD 所成角的正弦值．

20．（12 分）

双败淘汰制是一种竞赛形式，与普通的单败淘汰制输掉一场即被淘汰不同，参赛者只有在输掉两场比赛后才丧失争夺冠军的可能．

在双败淘汰制的比赛中，参赛者的数量一般是 2 的次方数，以保证每一轮都有偶数名参赛者．第一轮通过抽签，两人一组进行对阵，胜者进入胜者组，败者进入负者组．之后的每一轮直到最后一轮之前，胜者组的选手两人一组相互对阵，胜者进入下一轮，败者则降到负者组参加本轮负者组的第二阶段对阵；负者组的第一阶段，由之前负者组的选手（不包括本轮胜者组落败的选手）两人一组相互对阵，败者被淘汰（已经败两场），胜者进入第二阶段，分别对阵在本轮由胜者组中降组下来的选手，胜者进入下一轮，败者被淘汰．最后一轮，由胜者组最终获胜的选手（此前从未败过，记为 A）对阵负者组最终获胜的选手（败过一场，记为 B），若 A 胜则 A 获得冠军，若 B 胜则双方再次对阵，胜者获得冠军．

某围棋赛事采用双败淘汰制，共有甲、乙、丙等 8 名选手参赛．第一轮对阵双方由随机抽签产生，之后每一场对阵根据赛事规程自动产生对阵双方，每场对阵没有平局．

（1）设“在第一轮对阵中，甲、乙、丙都不互为对手”为事件 M，求 M 的概率；

（2）已知甲对阵其余 7 名选手获胜的概率均为 $\frac{2}{3}$，解决以下问题：

①求甲恰在对阵三场后被淘汰的概率；

②若甲在第一轮获胜，设甲在该项赛事的总对阵场次为随机变量 ξ，求 ξ 的分布列．

21．（12 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+a(x+1)\ (a\in\mathbf{R})$．

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $x\geqslant 0$ 时，$\mathrm{e}^{mx}\geqslant\sin x-\cos x+2$，求实数 m 的取值范围．

22．（12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，P 是圆 $E: x^2+y^2+2x-15=0$ 上的动点，已知 $F(1,0)$，且线段 PF 的垂直平分线交 PE 于 Q，设 Q 的轨迹为曲线 C．

（1）求 C 的方程；

（2）设直线 l 与 C 交于 A，B 两点，若 $M(1,\frac{3}{2})$，且 $\triangle ABM$ 内切圆的圆心在直线 FM 上，则直线 l 具备以下哪个性质？证明你的结论．

①l 恒过定点，②l 的斜率恒为定值，③O 到 l 的距离恒为定值．

2021年三明市普通高中毕业班质量检测

数学参考答案及评分细则

评分说明：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则。

2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4. 只给整数分数。选择题和填空题不给中间分。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共60分。

1. B　2. C　3. C　4. A　5. C　6. B　7. D　8. A

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得2分。

9. AC　10. BC　11. BCD　12. ABD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，满分20分.

13. $-\dfrac{7}{9}$　14. $\dfrac{1}{4}$

15. 2.535（可填$(2.28,2.79)$中的任一实数）　16. $1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

四、解答题：本大题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解法一　选择①

由$\sin 2C=\sqrt{3}\cos C$，得$2\sin C\cos C=\sqrt{3}\cos C$. ……………… 2分

若$\cos C=0$，因为$C\in(0,\pi)$，所以$C=\dfrac{\pi}{2}$，与$c<b$矛盾. ……………… 3分

所以$\cos C\neq 0$，则$\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ……………… 5分

若这样的$\triangle ABC$存在，根据正弦定理，由$\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}$，

得$\sin B=\dfrac{b\sin C}{c}=\dfrac{7\sqrt{3}}{10}>1$， ……………… 8分

与$\sin B\leqslant 1$矛盾.

所以，若选择条件①，则问题中的三角形不存在. ……………… 10分

解法二　选择②

在$\triangle ABC$中，根据正弦定理，由$c(2+\cos B)=\sqrt{3}b\sin C$，

得$\sin C(2+\cos B)=\sqrt{3}\sin B\sin C$. ……………… 2分

因为$C\in(0,\pi)$，则$\sin C>0$，所以$2+\cos B=\sqrt{3}\sin B$， ……………… 3分

即 $\sqrt{3}\sin B-\cos B=2$．……………………………………………………4 分

化为 $\sin\left(B-\dfrac{\pi}{6}\right)=1$．……………………………………………………5 分

因为 $0<B<\pi$，$-\dfrac{\pi}{6}<B-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$，

所以 $B-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $B=\dfrac{2\pi}{3}$．……………………………………………6 分

根据余弦定理，$a^2+c^2-2ac\cos B=b^2$．

因为 $b=7$，$c=5$，所以 $a^2+5a-24=0$．…………………………………………8 分

解得 $a=3$，或 $a=-8$（应舍去）．…………………………………………………9 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$．………………………………10 分

解法三 选择③

在 $\triangle ABC$ 中，根据正弦定理，由 $b\sin A+\sqrt{3}a\cos B=0$，

得 $\sin B\sin A+\sqrt{3}\sin A\cos B=0$，即 $\sin A\left(\sin B+\sqrt{3}\cos B\right)=0$．………………2 分

因为 $A\in(0,\pi)$，则 $\sin A>0$，所以 $\sin B+\sqrt{3}\cos B=0$．…………………………3 分

因为 $B\in(0,\pi)$，$\sin B>0$，所以 $\cos B\neq 0$，

所以 $\tan B=\dfrac{\sin B}{\cos B}=-\sqrt{3}$．……………………………………………………5 分

所以 $B=\dfrac{2\pi}{3}$．…………………………………………………………………6 分

根据余弦定理，$a^2+c^2-2ac\cos B=b^2$．

因为 $b=7$，$c=5$，所以 $a^2+5a-24=0$．…………………………………………8 分

解得 $a=3$，或 $a=-8$（应舍去）．…………………………………………………9 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$．………………………………10 分

18．（1）设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，$\{b_n\}$ 的公比为 q．

由 $S_2=6$，$S_3=6$ 得：$\begin{cases}2a_1+d=6,\\3a_1+3d=12.\end{cases}$ ……………………………………1 分

解得$\begin{cases} a_1 = 2, \\ d = 2. \end{cases}$ ……………………………………2 分

所以$a_n = 2 + 2(n-1) = 2n$. ……………………………………3 分

又由$a_1 b_1 = 2$，$b_1 + b_2 = 3$得：$\begin{cases} 2b_1 = 2, \\ b_1(1+q) = 3. \end{cases}$ ……………………………………4 分

解得$\begin{cases} b_1 = 1, \\ q = 2. \end{cases}$ ……………………………………5 分

所以$b_n = 2^{n-1}$. ……………………………………6 分

（2）由（1）知，$S_{n+1} = (n+1)(n+2)$. ……………………………………7 分

所以$c_n = \dfrac{n \cdot 2^n}{(n+1)(n+2)}$ ……………………………………8 分

$= \dfrac{(2(n+1)-(n+2))2^n}{(n+1)(n+2)}$

$= \dfrac{2^{n+1}}{n+2} - \dfrac{2^n}{n+1}$ ……………………………………10 分

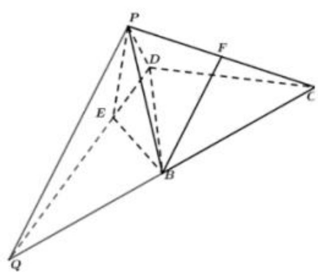
所以$T_n = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots c_n$

$= \left(\dfrac{2^2}{3} - \dfrac{2}{2}\right) + \left(\dfrac{2^3}{4} - \dfrac{2^2}{3}\right) + \cdots + \left(\dfrac{2^{n+1}}{n+2} - \dfrac{2^n}{n+1}\right)$ ……………………………………11 分

$= \dfrac{2^{n+1}}{n+2} - 1$. ……………………………………12 分

19．解法一

(1) 在平面$BCDE$内，设DE，CB的延长线交于点Q，连结PQ. ……………1 分



在$\triangle BCD$中，设$BD = 1$，则$BC = \sqrt{3}$，$CD = 2$，

所以$BD \perp BC$，且$\angle BDC = \angle BDE = 60°$，

……………………………………2 分

所以$DQ = DC$，且B为CQ中点. ……………………3 分

因为F是PC中点，所以$BF // PQ$. ……………………4 分

又因为$BF \not\subset$平面PDE，$PQ \subset$平面PDE，

所以$BF //$平面PDE. ……………………………………5 分

（2）因为在图 1 中，E 是 AD 中点，即 $AE=DE$，所以 $BE\perp AE$.

所以在图 2 中，$DE\perp BE$，$PE\perp BE$，$DE\bigcap PE=E$.

所以 $BE\perp$ 平面 PDE，则平面 $BCDE\perp$ 平面 PDE.

且 $\angle PED$ 是二面角 $P-BE-D$ 的平面角，即 $\angle PED=60^\circ$，……………………………6 分

所以 $PD=PE=DE=\dfrac{BD}{2}=\dfrac{1}{2}$.

设 O 为 DE 中点，连结 PO，则 $PO\perp DE$，$PO=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，且 $PO\perp$ 平面 $BCDE$.

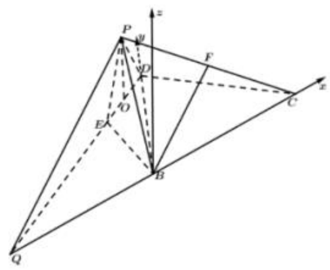
过 B 作 $BT//OP$，则 $BT\perp$ 平面 $BCDE$.

以 B 为坐标原点，分别以 BC，BD，BT 为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系.

……………………………………………………………………………………………………7 分

则 $B(0,0,0)$，$C(\sqrt{3},0,0)$，$D(0,1,0)$，$Q(-\sqrt{3},0,0)$，$E(-\dfrac{\sqrt{3}}{4},\dfrac{3}{4},0)$，$O(-\dfrac{\sqrt{3}}{8},\dfrac{7}{8},0)$，

$P(-\dfrac{\sqrt{3}}{8},\dfrac{7}{8},\dfrac{\sqrt{3}}{4})$.



所以 $\overrightarrow{DP}=(-\dfrac{\sqrt{3}}{8},-\dfrac{1}{8},\dfrac{\sqrt{3}}{4})$，$\overrightarrow{DC}=(\sqrt{3},-1,0)$，

$\overrightarrow{PQ}=(-\dfrac{7\sqrt{3}}{8},-\dfrac{7}{8},-\dfrac{\sqrt{3}}{4})$. ……………………… 8 分

因为 $BC\bigcap DE=Q$，所以平面 $PBC\bigcap$ 平面 $PDE=PQ$. ……………………………9 分

设平面 PCD 的一个法向量为 $\vec{n}=(x_0,y_0,z_0)$.

由 $\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{DC},\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{DP},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}\sqrt{3}x_0-y_0=0,\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{8}x_0-\dfrac{1}{8}y_0+\dfrac{\sqrt{3}}{4}z_0=0.\end{cases}$ ……………………………………………10 分

取 $x_0=1$，得 $y_0=\sqrt{3}$，$z_0=1$，此时 $\vec{n}=(1,\sqrt{3},1)$. ……………………………11 分

设 PQ 与平面 PCD 所成角为 α，

则 $\sin\alpha=\left|\cos<\overrightarrow{PQ},\vec{n}>\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\dfrac{\sqrt{13}}{2}\times\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{195}}{65}$.

即l与平面PCD所成角的正弦值为$\dfrac{4\sqrt{195}}{65}$. ……………………………………12 分

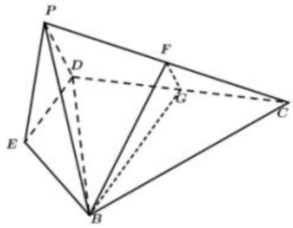
解法二

（1）设CD的中点为G，连结FG，BG.

因为F是PC中点，所以$FG//PD$.

又因为$FG\not\subset$平面PDE，$PD\subset$平面PDE，

所以$FG//$平面PDE. ……………………………………1 分



设$BD=1$，则$BC=\sqrt{3}$，$CD=2$，

所以$\angle DBC=90°$，$\angle BDC=60°$，

所以$BG=DG=CG=BD$，

则$\angle DBG=\angle BDE=60°$，

所以$BG//DE$. ……………………………………2 分

又因为$BG\not\subset$平面PDE，$DE\subset$平面PDE，

所以$BG//$平面PDE. ……………………………………3 分

因为$FG\bigcap BG=G$，所以平面$BFG//$平面PDE. ……………………………………4 分

因为$BF\subset$平面BFG，所以$BF//$平面PDE. ……………………………………5 分

（2）在图 1 中，因为E是AD中点，即$AE=DE$，所以$BE\perp AE$.

所以在图 2 中，$DE\perp BE$，$PE\perp BE$，$DE\bigcap PE=E$.

所以$BE\perp$平面PDE，则平面$BCDE\perp$平面PDE.

且$\angle PED$是二面角$P-BE-D$的平面角，即$\angle PED=60°$，……………………………………6 分

所以$PD=PE=DE=\dfrac{BD}{2}=\dfrac{1}{2}$.

设O为DE中点，M为BD中点，连结PO，OM.

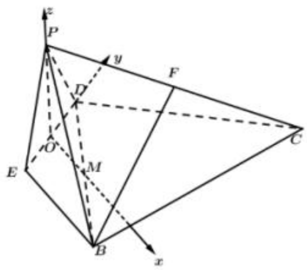
则$OM\perp DE$，$PO\perp DE$，故$PO\perp$平面$BCDE$.

以O为坐标原点，分别以OM，OD，OP为x轴，y轴，z轴建立空间直角坐标系.

……………………………………7 分

则$D(0,\dfrac{1}{4},0)$，$P(0,0,\dfrac{\sqrt{3}}{4})$，$B(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{4},0)$，

$C(\sqrt{3},\dfrac{5}{4},0)$，$F(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{5}{8},\dfrac{\sqrt{3}}{8})$.



所以$\overrightarrow{DP}=(0,-\dfrac{1}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{4})$，$\overrightarrow{DC}=(\sqrt{3},1,0)$，

$\overrightarrow{BF}=(0,\dfrac{7}{8},\dfrac{\sqrt{3}}{8})$. ……………………………………8 分

因为$BF//$平面PDE，$BF\subset$平面PBC，平面$PBC\bigcap$平面$PDE=l$.

所以$BF//l$，所以BF与平面PCD所成角即为l与平面PCD所成角. ……………9 分

设平面PCD的一个法向量为$\vec{n}=(x_0,y_0,z_0)$.

由$\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{DC},\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{DP},\end{cases}$得$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\sqrt{3}x_0+y_0=0,\\ -\dfrac{1}{4}y_0+\dfrac{\sqrt{3}}{4}z_0=0.\end{cases}$ ……10 分

取$z_0=1$，得$y_0=\sqrt{3}$，$x_0=-1$，此时$\vec{n}=(-1,\sqrt{3},1)$. ……11 分

设BF与平面PCD所成角为α，

则$\sin\alpha=\left|\cos<\overrightarrow{BF},\vec{n}>\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{BF}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{BF}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\sqrt{3}}{\dfrac{\sqrt{13}}{4}\times\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{195}}{65}$.

即l与平面PCD所成角的正弦值为$\dfrac{4\sqrt{195}}{65}$. ……12 分

20.（1）8 人平均分成四组，共有$\dfrac{C_8^2C_6^2C_4^2C_2^2}{A_4^4}$种方法，……1 分

其中甲，乙，丙都不分在同一组的方法数为A_5^3，……2 分

所以 $P(A)=\dfrac{A_5^3}{\dfrac{C_8^2C_6^2C_4^2C_2^2}{A_4^4}}$ ……3 分

$=\dfrac{4}{7}$ ……4 分

（2）①甲恰在对阵三场后淘汰，这三场的结果依次是“胜，败，败”或“败，胜，败”，

故所求的概率为$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}$

$=\dfrac{4}{27}$ ……6 分

②若甲在第一轮获胜，$\xi\in\{3,4,5,6,7\}$. ……7 分

当$\xi=3$时，表示甲在接下来的两场对阵都败，即$P(\xi=3)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$. ……8 分

当$\xi=4$时，有两种情况：

（i）甲在接下来的 3 场比赛都胜，其概率为$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{27}$；

（ii）甲 4 场对阵后被淘汰，表示甲在接下来的 3 场对阵 1 胜 1 败，且第 4 场败，概率为$C_2^1\cdot\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{27}$，

所以$P(\xi=4)=\dfrac{8}{27}+\dfrac{4}{27}=\dfrac{4}{9}$ ……9 分

当$\xi=5$时，有两种情况：

（i）甲在接下来的2场对阵都胜，第4场败，概率为$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$；

（ii）甲在接下来的2场对阵1胜1败，第4场胜，第5场败，概率为$C_2^1\cdot\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{81}$；

所以$P(\xi=5)=\frac{4}{27}+\frac{8}{81}=\frac{20}{81}$. ……10分

当$\xi=6$时，有两种情况：

（i）甲第2场胜，在接下来的3场对阵为“败，胜，胜”，其概率为$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{81}$；

（ii）甲第2场败，在接下来的4场对阵为“胜，胜，胜，败”，其概率为$\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{1}{3}=\frac{8}{243}$；

所以$P(\xi=6)=\frac{8}{81}+\frac{8}{243}=\frac{32}{243}$. ……11分

当$\xi=7$时，甲在接下来的5场对阵为“败，胜，胜，胜，胜”，即

$P(\xi=7)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{243}$.

所以ξ的分布列为：

ξ	3	4	5	6	7
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{20}{81}$	$\frac{32}{243}$	$\frac{16}{243}$

……12分

21．（1）由$f(x)=e^x+a(x+1)$，得$f'(x)=e^x+a$. ……1分

(i) 当$a\geqslant0$时，对任意$x\in\mathbf{R}$，都有$f'(x)>0$，

此时$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,+\infty)$，无单调递减区间；……3分

(ii) 当$a<0$时，令$f'(x)=0$，解得$x=\ln(-a)$，

且当$x<\ln(-a)$时，$f'(x)<0$；当$x>\ln(-a)$时，$f'(x)>0$.

此时$f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,\ln(-a))$，单调递增区间$(\ln(-a),+\infty)$. ……5分

（2）令$g(x)=e^{mx}-\sin x+\cos x-2$，则$g'(x)=me^{mx}-\sin x-\cos x$. ……6分

①当$m\geqslant1$时，$g(x)\geqslant e^x-\sin x+\cos x-2$. ……7分

令$\varphi(x)=x-\sin x$，则$\varphi'(x)=1-\cos x\geqslant 0$.

所以当$x\geqslant 0$时，$\varphi(x)\geqslant\varphi(0)=0$，即$x\geqslant\sin x$.

由（1）得，当$a=-1$时，$f(x)$在$(-\infty,0)$单调递减，在$(0,+\infty)$单调递增.

所以当$x\geqslant 0$时，$f(x)\geqslant f(0)$，即$\mathrm{e}^x\geqslant x+1\geqslant\sin x+1$， ………………………… 8 分

令$h(x)=\mathrm{e}^x-\sin x+\cos x-2$，

则$h'(x)=\mathrm{e}^x-\sin x-\cos x\geqslant 1-\cos x\geqslant 0$，所以$h(x)$在$[0,+\infty)$单调递增，

……………………………………………………………………………………………… 9 分

所以当$x\geqslant 0$时，$h(x)\geqslant h(0)=0$.

所以，当$x\geqslant 0$时，$\mathrm{e}^{mx}-\sin x+\cos x-2\geqslant 0$，即$\mathrm{e}^{mx}\geqslant\sin x-\cos x+2$. ……10 分

②当$m<1$时，因为$g'(0)=m-1<0$， …………………………………………………… 11 分

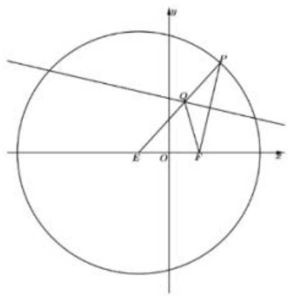
所以存在$x_1>0$，使得当$x\in(0,x_1)$，$g'(x)<0$，

则$g(x)$在$(0,x_1)$单调递减.

所以$g(x_1)<g(0)=0$，即$\mathrm{e}^{mx_1}<\sin x_1-\cos x_1+2$，与条件矛盾.

综合①，②，m的取值范围是$[1,+\infty)$. ……………………………………………12 分

22. 圆E的方程化为$(x+1)^2+y^2=16$，



所以圆心$E(-1,0)$，半径$r=4$. …………………… 1 分

因为Q在PF的垂直平分线上，所以$|QF|=|QP|$，

……………………………………………………………… 2 分

所以$|QE|+|QF|=|QE|+|QP|=|EP|=4$. ……… 3 分

又因为$|EF|=2$，则$|QE|+|QF|>2$，

所以Q的轨迹是以E，F为焦点，长轴长为4的椭圆，……………………………… 4 分

由$2a=4$，$c=1$，得$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$.

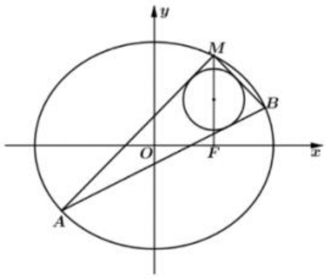
所以C的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………………… 5 分

（2）直线l满足性质②，证明如下：……………………………………………………6 分

若直线l的斜率不存在，则$AB//FM$，

此时$\triangle ABM$的内切圆圆心不在FM上，不符合题意.

设l的方程为$y=kx+m$.



联立$\begin{cases} y=kx+m, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1, \end{cases}$消$y$得：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{(kx+m)^2}{3}=1$，

整理得：$(4k^2+3)x^2+8kmx+4m^2-12=0$.

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则$x_1\neq1$，$x_2\neq1$，且$x_1+x_2=-\dfrac{8km}{4k^2+3}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{4m^2-12}{4k^2+3}$. ……………………7 分

因为$\triangle ABM$的内切圆圆心在直线FM上，

所以FM平分$\angle AMB$，即直线MA，MB关于直线FM对称.

又因为$FM\perp x$轴，且直线MA，MB的斜率均存在，

所以直线MA，MB的斜率之和为0，

即$\dfrac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}+\dfrac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2-1}=0$. ……………………………………………………8 分

化为$\dfrac{\left(y_1-\frac{3}{2}\right)(x_2-1)+(x_1-1)\left(y_2-\frac{3}{2}\right)}{(x_1-1)(x_2-1)}=0$，又由$y_1=kx_1+m$，$y_2=kx_2+m$，

整理得$\dfrac{2kx_1x_2+\left(m-k-\frac{3}{2}\right)(x_1+x_2)+3-2m}{(x_1-1)(x_2-1)}=0$，

所以$2k\cdot\dfrac{4m^2-12}{4k^2+3}+\left(m-k-\dfrac{3}{2}\right)\left(-\dfrac{8km}{4k^2+3}\right)+3-2m=0$， ……………………9 分

整理得：$4k^2+(4m-8)k-2m+3=0$.

化为$(2k-1)(2k+2m-3)=0$. ……………………………………………………10 分

若$2k+2m-3=0$，则l过点M，此时A，B，M共线，不符合题意. ………11 分

所以$2k-1=0$，即$k=\dfrac{1}{2}$.

所以l的斜率恒为定值$\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》