贵州省预赛试题（参考答案）

本试卷共 18 题，满分 150 分，考试时间 150 分钟

一. 选择题（每小题 6 分，本大题共 30 分，其中第 1，2，3 题为单项选择题，第 4，5 题为多项选择题）。

1. 已知 i 是虚数单位，则 $\sum_{k=1}^{2020}(k\cdot i^k)=$

A. $-1010-1010i$　　B. $1010+1010i$
C. $-1010+1010i$　　D. $1010-1010i$

解：

设 $S=i+2i^2+3i^3+\cdots+2019i^{2019}+2020i^{2020}$，则

$iS=i^2+2i^3+3i^4+\cdots+2019i^{2020}+2020i^{2021}$

两式相减，得

$S-iS=i+i^2+i^3+\cdots+i^{2020}-2020i^{2021}$

$=\dfrac{i(1-i^{2020})}{1-i}-2020i^{2021}=-2021i$

故 $S=-\dfrac{2020i}{1-i}=1010-1010i$，即 $\sum_{k=1}^{2020}(k\cdot i^k)=1010-1010i$.

2. 设 $a=\ln 2$，$b=\lg 3$，$c=\log_3 2$，则 a，b，c 的大小关系是

A. $a>c>b$　　B. $a>b>c$　　C. $b>c>a$　　D. $c>a>b$

解：

因为 $c=\log_3 2=\dfrac{\ln 2}{\ln 3}<\ln 2=a$，$2b=\lg 9<1$，$2c=\log_3 4>1\Rightarrow c>b$，

所以 $a>c>b$.

3. 点 A，B，C 均位于单位圆上，且 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3}$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的最大值为

A. $\sqrt{3}+\dfrac{3}{2}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　　D. 3

解：

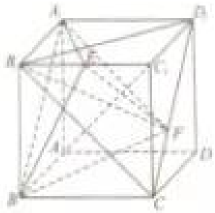
由已知，可设 $A(-1,0)$，$B\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$C(\cos\theta,\sin\theta)$ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$，则

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot(\cos\theta+1,\sin\theta)=\frac{3}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{3}{2}$$

$$=\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{3}{2}\leqslant\sqrt{3}+\frac{3}{2}.$$

所以，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的最大值为 $\sqrt{3}+\frac{3}{2}$.

4. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 是棱 B_1C_1 的中点，点 F 是线段 CD_1 上的一个动点，则以下叙述正确的是



A. 异面直线 AC_1 与 B_1F 所成的角是定值；

B. 直线 A_1F 与平面 B_1CD_1 所成的角是定值；

C. 三棱锥 $B-A_1EF$ 的体积是定值；

D. 二面角 $E-BF-A_1$ 为定值.

解：

（1）因为 $AC_1\perp$ 面 B_1CD_1，而 $B_1F\subset$ 面 B_1CD_1，所以 $AC_1\perp B_1F$，即异面直线 AC_1 与 B_1F 所成的角恒为 90°，所以 A 正确；

（2）因为 A_1 到面 B_1CD_1 的距离为定值，而 A_1F 的长度有变化，故直线 A_1F 与平面 B_1CD_1 所成的角不为定值，所以 B 不正确；

（3）因为 $V_{锥B-A_1EF}=V_{锥F-A_1EB}=\frac{1}{3}S_{\Delta A_1EB}\cdot d$，而 ΔA_1EB 面积为定值，CD_1 // 面 A_1EB，故 d 为定值，即三棱锥 $B-A_1EF$ 的体积是定值，所以 C 正确；

（4）二面角 $E-BF-A_1$ 即为面 EBF 与面 A_1BCD_1 所成的角，而面 A_1BCD_1 的法向量为定值，而 EBF 的法向量有变化，故二面角 $E-BF-A_1$ 不为定值，所以 D 不正确.

综上所得，真命题为 A，C.

5. 已知函数 $f(x)=\sin x|\cos x|$，则以下叙述正确的是（　　）

A. 若 $|f(x_1)|=|f(x_2)|$，则 $x_1=x_2+k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$

B. $f(x)$ 的最小正周期为 π

C. $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上为增函数

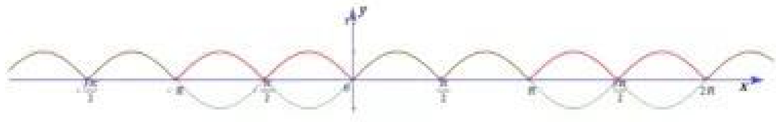
D. $f(x)$ 的图像关于 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ 对称

解：

易知，$f(x)=\sin x|\cos x|$ 为奇函数，而 $x>0$ 时，

$$f(x)=\sin x|\cos x|=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin 2x, & 0\leqslant x<\frac{\pi}{2},\\ -\frac{1}{2}\sin 2x, & \frac{\pi}{2}\leqslant x<\frac{3\pi}{2},\\ \frac{1}{2}\sin 2x, & \frac{3\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2\pi.\end{cases}$$

由 $f(x)$ 的图像知，A 不正确；最小正周期为 2π，故 B 不正确；显然 C，D 是正确的.



二、填空题（每小题 6 分，本大题共 60 分）。

6. 已知关于 x 的方程 $mx^2-2(m-3)x+m-2=0$ 至少有一个整数根，则负整数 $m=$______.

解：

由 $mx^2-2(m-3)x+m-2=0\Rightarrow m(x^2-2x+1)=2-6x$，

显然 $x\neq 1$，所以，$m=\dfrac{2-6x}{x^2-2x+1}$，（*）

m 为负整数，即 $m\leqslant -1$，

故 $\dfrac{2-6x}{x^2-2x+1}\leqslant -1\Rightarrow x^2-8x+3\leqslant 0\Rightarrow 4-\sqrt{13}\leqslant x\leqslant 4+\sqrt{13}$

所以 x 的整数值只能为 2，3，4，5，6，7.

分别代入（*）式，得 $x=2$ 时，$m=-10$，$x=3$ 时，$m=-4$.

因此，$m=-4$ 和 $m=-10$ 时方程至少有一个整数根.

7. 已知过点 $M(9,0)$ 与椭圆 C：$x^2+2y^2=9$ 相切的直线分别为 l_1，l_2，又直线 l：$y=x+b$ 与椭圆 C 相交于 A，B 点，与 l_1，l_2 分别交于点 M，N，若 $|AM|=|BN|$，则 $b=$______.

解：

设 l_1：$x_1x+2y_1y=9$，l_2：$x_2x+2y_2y=9$，其中 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) 为切点.

因为 l_1，l_2 过点 $M(9,0)$，所以 $\begin{cases}9x_1=9\\ 9x_2=9\end{cases}\Rightarrow x_1=x_2=1$，

代入椭圆 C，求得 $y_1=2$，$y_2=-2$，

故 l_1：$x+4y=9$，l_2：$x-4y=9$. 由 $|AM|=|BN|$，

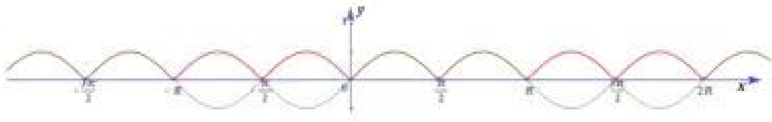
得点 A，B 与点 M，N 的中点重合. 所以 $x_A+x_B=x_M+x_N$.

解：

易知，$f(x)=\sin x|\cos x|$ 为奇函数，而 $x>0$ 时，

$$f(x)=\sin x|\cos x|=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin 2x, & 0\leqslant x<\frac{\pi}{2},\\ -\frac{1}{2}\sin 2x, & \frac{\pi}{2}\leqslant x<\frac{3\pi}{2},\\ \frac{1}{2}\sin 2x, & \frac{3\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2\pi.\end{cases}$$

由 $f(x)$ 的图像知，A 不正确；最小正周期为 2π，故 B 不正确；显然 C，D 是正确的.



二、填空题（每小题 6 分，本大题共 60 分）。

6. 已知关于 x 的方程 $mx^2-2(m-3)x+m-2=0$ 至少有一个整数根，则负整数 $m=$______.

解：

由 $mx^2-2(m-3)x+m-2=0\Rightarrow m(x^2-2x+1)=2-6x$，

显然 $x\neq 1$，所以，$m=\dfrac{2-6x}{x^2-2x+1}$，（*）

m 为负整数，即 $m\leqslant -1$，

故 $\dfrac{2-6x}{x^2-2x+1}\leqslant -1\Rightarrow x^2-8x+3\leqslant 0\Rightarrow 4-\sqrt{13}\leqslant x\leqslant 4+\sqrt{13}$

所以 x 的整数值只能为 2，3，4，5，6，7.

分别代入（*）式，得 $x=2$ 时，$m=-10$，$x=3$ 时，$m=-4$.

因此，$m=-4$ 和 $m=-10$ 时方程至少有一个整数根.

7. 已知过点 $M(9,0)$ 与椭圆 C：$x^2+2y^2=9$ 相切的直线分别为 l_1，l_2，又直线 l：$y=x+b$ 与椭圆 C 相交于 A，B 点，与 l_1，l_2 分别交于点 M，N，若 $|AM|=|BN|$，则 $b=$________.

解：

设 l_1：$x_1x+2y_1y=9$，l_2：$x_2x+2y_2y=9$，其中 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 为切点.

因为 l_1，l_2 过点 $M(9,0)$，所以 $\begin{cases}9x_1=9\\9x_2=9\end{cases}\Rightarrow x_1=x_2=1$，

代入椭圆 C，求得 $y_1=2$，$y_2=-2$，

故 l_1：$x+4y=9$，l_2：$x-4y=9$. 由 $|AM|=|BN|$，

得点 A，B 与点 M，N 的中点重合. 所以 $x_A+x_B=x_M+x_N$.

解：

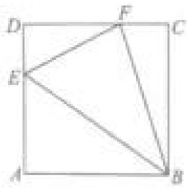
先求一方达到6分时还不能获胜的概率 p. 此时，前10局的比分是5 : 5. 由此可见，在前10局中，甲，乙各胜5局，有 C_{10}^{5} 种可能，而所有可能的胜负情形有 2^{10} 种可能. 于是，$p=\frac{C_{10}^{5}}{2^{10}}=\frac{63}{256}$.

故获胜者的得分是6分的概率为 $1-\frac{63}{256}=\frac{193}{256}$.

12. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为3，点 E，F 分别在边 AD，CD 上，且 $AE=DF=2$. 将此正方形沿 BE，BF，EF 切割得四个三角形，现用这四个三角形作为一个三棱锥的四个面，则该三棱锥的外接球与内切球的面积之比为________.

解：

设三棱锥的内切球与外接球的半径分别为 r，R. 由题意知，三棱锥的侧面分别为直角边长是1和2，2和3，1和3的直角三角形，从而得体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times2\times3=1$，另一方面，$V=\frac{1}{3}\cdot S_{表}\cdot r=\frac{1}{3}\times9\times r=3r$，所以 $r=\frac{1}{3}$.



又因为，三棱锥的外接球与棱长分别为1，2，3的长方体的外接球相同，所以 $2R=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}\Rightarrow R=\frac{\sqrt{14}}{2}$.

因此，外接球与内切球的面积之比为 $\frac{63}{2}$.

13. 双曲线 $mx^2-ny^2=1(m>0,\ n>0)$ 的左，右焦点分别为 F_1，F_2，渐近线分别为 l_1，l_2，过点 F_2 且与 l_1 垂直的直线分别交 l_1，l_2 于 P，Q 两点，若满足 $\overline{OF_2}+\overline{OQ}=2\overline{OP}$，则双曲线的离心率为________.

解：

由 $\overline{OF_2}+\overline{OQ}=2\overline{OP}$，得 P 是 F_2Q 的中点，又因为 $OP\perp F_2Q$，O 为 F_1F_2 的中点，

所以 ΔQF_1F_2 是直角三角形，且 $\angle POF_2=\frac{\pi}{3}$，故 l_1 的斜率为 $\sqrt{3}$，从而离心率 $e=2$.

14. 杨辉三角是二项式系数在三角形中的一种几何排列. 我国南宋数学家杨辉1261年所著的《详解九章算术》一书里出现了如图所示的表，这是我国数学史上的一个伟大成就. 在“杨辉三角”中，去除所有为1的项，依次构成数列2，3，3，4，6，4，5，10，10，5，…，则此数列的前188项之和为________.

解：

去掉所有为1的项后，如图，则前 n 行共有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个数，当 $n=19$ 时，$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{19\times20}{2}=190$，即前19行共有190个数. 而第 n 行的所有数的和为 $C_{n+1}^{1}+C_{n+1}^{2}+\cdots+C_{n+1}^{n}=2^{n+1}-2$，

所以前19行的和为 $(2^2-2)+(2^3-2)+\cdots+(2^{20}-2)=2^{21}-42$，又第19行的最后两个数为

$C_{20}^{18}=190$，$C_{20}^{19}=20$，故此数列的前 188 项之和为 $2^{21}-42-190-20=2^{21}-252$.

15. 已知 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数. 若 $M=\sum\limits_{i=1}^{2020}\left[\dfrac{6^i}{7}\right]$，则 M 被 35 除的余数为______.

解：

先考察 $S=\dfrac{6}{7}+\dfrac{6^2}{7}+\cdots+\dfrac{6^{2020}}{7}$，此式中，任何一项都不是整数，而对 $\forall k\in\mathbf{N}^*$，

有 $\dfrac{6^k}{7}+\dfrac{6^{k+1}}{7}=6^k\in\mathbf{N}^*$，故 $\left[\dfrac{6^k}{7}\right]+\left[\dfrac{6^{k+1}}{7}\right]=\left[\dfrac{6^k}{7}+\dfrac{6^{k+1}}{7}\right]-1$.

因此 $M=S-1010$. 又因为 $S=\dfrac{6(6^{2020}-1)}{35}$，

所以，$35M=35(S-1010)=6^{2021}-6-35\times1010$.

由 $6^{2021}=6\times6^{2020}=6(35+1)^{1010}=6\times35^2P+6\times35\times1010+6(P\in\mathbf{N}^*)$，得
$M=6\times35P+5\times1010$，因此，M 被 35 除的余数即为 5×1010 被 35 除的余数.
故 M 被 35 除的余数为 2.

三．解答题（本大题共 50 分. 其中 16 题 10 分，17 题，18 题各 20 分）。

16. 数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 同时满足下列条件：

$$a_1=6,\ b_1=7,\ a_{n+1}=\frac{1+a_n+a_nb_n}{b_n},\ b_{n+1}=\frac{1+b_n+a_nb_n}{a_n}.$$

证明：$6\leqslant a_n<55$.

证明：

因为 $a_{n+1}=\dfrac{1+a_n+a_nb_n}{b_n}=\dfrac{1+a_n}{b_n}+a_n>a_n$，所以 $a_n\geqslant a_1=6$.

又由 $a_{n+1}=\dfrac{1+a_n+a_nb_n}{b_n}\Rightarrow a_{n+1}+1=\dfrac{(1+a_n)(1+b_n)}{b_n}$，

即，$\dfrac{1}{a_{n+1}+1}=\dfrac{b_n}{(1+a_n)(1+b_n)}$，类似的，有 $\dfrac{1}{b_{n+1}+1}=\dfrac{a_n}{(1+a_n)(1+b_n)}$，

从而，$\dfrac{1}{a_{n+1}+1}-\dfrac{1}{b_{n+1}+1}=\dfrac{b_n}{(1+a_n)(1+b_n)}-\dfrac{a_n}{(1+a_n)(1+b_n)}=\dfrac{1}{a_n+1}-\dfrac{1}{b_n+1}$

所以，$\dfrac{1}{a_{n+1}+1}-\dfrac{1}{b_{n+1}+1}=\dfrac{1}{a_n+1}-\dfrac{1}{b_n+1}=\cdots=\dfrac{1}{a_1+1}-\dfrac{1}{b_1+1}=\dfrac{1}{56}$．

即，$\dfrac{1}{a_n+1}=\dfrac{1}{b_n+1}+\dfrac{1}{56}$．显然，$b_n+1>0$，故$a_n<55$．

综上，对$\forall n\in\mathbf{N}_+$，均有$6\leqslant a_n<55$．

17. 平面上有$2n+3$ $(n\in\mathbf{N}^*)$个点，其中任意三点不共线，任意四点不共圆. 问能否其中三点作一个圆，使其余$2n$个点，一半在圆内，一半在圆外？

解：

对于已知平面内的$2n+3$ $(n\in\mathbf{N}^*)$个点，总可以找到这样的两个点A，B，使其余$2n+1$个点C_1，$C_2,\cdots$，$C_{n+1},\cdots$，C_{2n+1}均在直线AB的同侧.

记$\angle AC_iB=\alpha_i$ $(i=1,2,\cdots,2n+1)$，由于无四点共圆，故$\alpha_i(i=1,2,\cdots,2n+1)$中无任何两个相等，无妨设$\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_{n+1}<\cdots<\alpha_{2n+1}$，设以$A$，$B$，$C_{n+1}$所确定的圆，记为$\odot O$，由圆的性知，点$C_1$，$C_2,\cdots$，$C_n$在$\odot O$外，点$C_{n+2},\cdots$，$C_{2n+1}$在$\odot O$内. 故满足题设条件的$2n+3(n\in\mathbf{N}^*)$个点，过其中三个点作一个圆，能使其余$2n$个点，一半在圆内，一半在圆外.

18. 设函数$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$的图像S上有两个极值点P，Q，其中$P(1,0)$．

（1）当点$Q(2,2)$时，求$f(x)$的解析式；

（2）当点Q在圆C：$(x-6)^2+(y-5)^2=1$上时，求曲线S的切线斜率的最大值.

解：

（1）因为$f'(x)=3ax^2+2bx+c$，极值点为$P(1,0)$，$Q(2,2)$，

所以，$\begin{cases}f'(1)=0\\f(1)=0\\f'(2)=0\\f(2)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3a+2b+c=0\\a+b+c+d=0\\12a+4b+c=0\\8a+4b+2c+d=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-4\\b=18\\c=-24\\d=10\end{cases}$．

故$f(x)=-4x^3+18x^2-24x+10$．

（2）因为$f'(x)=3ax^2+2bx+c$，极值点为$P(1,0)$，

所以，$\begin{cases}f'(1)=0\\f(1)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3a+2b+c=0\\a+b+c+d=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=-3a-2b\\d=2a+b\end{cases}$．

$\Rightarrow f(x)=ax^3+bx^2-(3a+2b)x+2a+b$，$f'(x)=3ax^2+2bx-3a-2b$．

又由 $f(x)$ 极值点 Q 在圆 C：$(x-6)^2+(y-5)^2=1$ 上，显然 Q 在 P 的右上方，所以 $a<0$．

由曲线 S 的切线斜率 k 的最大值为 $f'(x)$ 的最大值，得 $k_{\max}=f'(-\frac{b}{3a})=-\frac{b^2}{3a}-3a-2b$．(*)

设点 $Q(m,n)$，因为点 Q 在圆 C 上，所以 $m\in[5,7]$．

由 $\begin{cases}f'(m)=0\\f(m)=n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3am^2+2bm-3a-2b=0\\am^3+bm^2-(3a+2b)m+2a+b=n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{2n}{(m-1)^3}\\b=\dfrac{3n(m+1)}{(m-1)^3}\end{cases}$．

代入 (*)，得 $k_{\max}=\dfrac{3n}{2(m-1)}$．问题转化为求点 $T(1,0)$ 与点 $Q(m,n)$ 连线斜率的最大值．

设 $\begin{cases}m=6+\cos\theta,\\n=5+\sin\theta,\end{cases}(\theta\in[0,2\pi))$，则 $k_{\max}=\dfrac{3(\sin\theta+5)}{2(\cos\theta+5)}$，

令 $t=\dfrac{\sin\theta+5}{\cos\theta+5}\Rightarrow\sin\theta-t\cos\theta=5t-5\Rightarrow\sqrt{1+t^2}\sin(\theta-\alpha)=5t-5$，其中 $\tan\alpha=t$．

所以，$\sqrt{1+t^2}\geqslant|5t-5|\Rightarrow\dfrac{3}{4}\leqslant t\leqslant\dfrac{4}{3}$，即 $k_{\max}=\dfrac{3}{2}t\leqslant2$．

因此，曲线 S 的切线斜率的最大值为 2．

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》