秘密★启用前

数学试卷

注意事项：

1. 答题前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚.

2. 每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 在试题卷上作答无效.

3. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回. 满分 150 分，考试用时 120 分钟.

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求）

1. 设全集 $U=\mathbf{R}$，若集合 $A=\{x\mid y=\sqrt{1-x^2}\}$，$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$，则如图 1 阴影部分表示的集合为

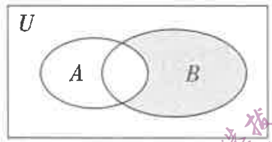

图 1

A. $\{x\mid 0<x<1\}$　　B. $\{x\mid 1<x\leqslant 2\}$

C. $\{x\mid 0<x\leqslant 2\}$　　D. $\{x\mid x>2\}$

2. 复数 z 满足 $i^3\cdot z=2+i$，则 z 在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知圆 C：$(x-1)^2+y^2=4$，直线 l：$y=x+1$ 被圆 C 截得的弦长为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{3}$

4. 欧几里得在《几何原本》中证明了算术基本定理：任何一个大于 1 的自然数 N，可以唯一分解成有限个素数的乘积，如果不考虑这些素数在乘积中的顺序，那么这个乘积形式是唯一的. 记 $N=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot\cdots\cdot p_k^{a_k}$（其中 p_i 是素数，a_i 是正整数，$1\leqslant i\leqslant k$，$p_1<p_2<\cdots<p_k$），这样的分解称为自然数 N 的标准素数分解式. 若 N 的标准素数分解式为 $N=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot\cdots\cdot p_k^{a_k}$，则 N 的正因子有 $(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_k+1)$ 个，根据以上信息，180 的正因子个数为

A. 6　　B. 12　　C. 13　　D. 18

5. 已知 $\{a_n\}$ 为递增的等比数列，且满足 $a_3=4$，$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_5}=\dfrac{5}{8}$，则 $a_7=$

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 1　　C. 16　　D. 32

6. 有 5 张奖券，其中 3 张可以中奖，现有 5 个人从中不放回地依次各随机抽取一张，设每张奖券被抽到的可能性相同，记事件 $A_i=$"第 i 个人抽中中奖券"，则下列结论正确的是

A. 事件 A_1 与 A_2 互斥　　B. $P(A_2)=\dfrac{1}{2}$　　C. $P(A_1A_2)=\dfrac{3}{10}$　　D. $P(A_3\mid A_2)=\dfrac{3}{5}$

7. 若 α，$\beta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$，满足 $(1-\sin 2\alpha)\sin\beta=\cos\beta\cos 2\alpha$，下列正确的是

A. $\beta-\alpha=\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{4}$　　C. $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$　　D. $\alpha=\beta$

8. 已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，$f(x+1)+f(x-1)=2$，$g(x+2)$ 是偶函数，且 $f(x)+g(2+x)=4$，$g(2)=2$，则

A. $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称　　B. $f(x)$ 关于点 $(1,\ 0)$ 中心对称

C. $f(2023)=1$　　D. $\sum\limits_{k=1}^{15}f(k)=15$

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分）

9. 已知 $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$ 是夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 的单位向量，$\vec{a}=\overrightarrow{e_1}-2\overrightarrow{e_2}$，$\vec{b}=\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$，下列结论正确的是

A. $|\vec{a}|=\sqrt{3}$　　B. $\vec{a}\perp\vec{b}$

C. $\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle=\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量为 $-\dfrac{1}{2}\vec{b}$

10. 已知 $f(x)=\cos x(\cos x+\sqrt{3}\sin x)$，下列结论正确的是

A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π

B. 把 $f(x)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到的图象关于 y 轴对称

C. 若 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{6},\ m\right]$ 上的最大值是 $\dfrac{3}{2}$，则 m 的最小值为 $\dfrac{\pi}{3}$

D. 若 $x_1+x_2=\dfrac{5\pi}{6}$，则 $f(x_1)+f(x_2)=1$

11. 已知函数 $f(x)=|\ln x|-kx-1$，下列结论正确的是

A. 若 $k=0$，则 $f(x)$ 有 2 个零点

B. 若 $0<k<e^{-2}$，则 $f(x)$ 有 3 个零点

C. 存在负数 k，使得 $f(x)$ 只有 1 个零点

D. 存在负数 k，使得 $f(x)$ 有 3 个零点

12. 如图 2，棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M，N 满足 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AC_1}$，$\overrightarrow{CN}=\mu\overrightarrow{CD}$，其中 λ，$\mu\in(0,\ 1)$，点 P 是正方体表面上一动点，下列说法正确的是

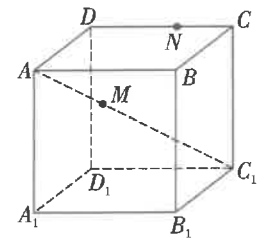

图 2

A. 当 $\lambda=\dfrac{1}{3}$ 时，DM // 平面 CB_1D_1

B. 当 $\mu=\dfrac{1}{2}$ 时，若 B_1P // 平面 A_1NC_1，则 $|B_1P|$ 的最大值为 $\sqrt{3}$

C. 当 $\lambda=\mu=\dfrac{1}{2}$ 时，若 $PM\perp D_1N$，则点 P 的轨迹长度为 $4+2\sqrt{5}$

D. 过 A，M，N 三点作正方体的截面，截面图形可以为矩形

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 若 $(1-2x)^5=a_0+a_1x+\cdots+a_5x^5$，$a_i\in\mathbf{R}$，$i=0$，1，…，5，则 $a_2+a_4=$________.（用数字作答）

14. 写出一条过点 $A(1,\ 2)$ 且与抛物线 C：$y^2=4x$ 仅有一个公共点的直线方程：________.

15. 幻方又称为魔方，方阵或厅平方，最早记载于中国公元前 500 年的春秋时期《大戴礼》中，宋代数学家杨辉称之为纵横图. 如图 3 所示，将 1，2，3，…，9 填入 3×3 的方格内，使三行、三列、两对角线的三个数之和都等于 15，便得到一个 3 阶幻方；一般地，将连续的正整数 1，2，3，…，n^2 填入 $n\times n$ 的方格内，使得每行、每列、每条对角线上的数字的和相等，这个正方形就叫做 n 阶幻方. 记 n 阶幻方的一条对角线上的数字之和为 S_n（如：$S_3=15$），则 $S_{10}=$________.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图 3

秘密

16. 如图 4 所示，在圆锥内放入两个大小不同的球 O_1，O_2，使得它们分别与圆锥的侧面和平面 α 都相切，平面 α 分别与球 O_1，O_2 相切于点 E，F. 数学家 Germinal Dandelin 利用这个模型证明了平面 α 与圆锥侧面的交线为椭圆，E，F 为此椭圆的两个焦点，这两个球也被称为 Dandelin 双球. 若球 O_1，O_2 的半径分别为 6 和 3，球心距离 $O_1O_2=11$，则此椭圆的长轴长为________.

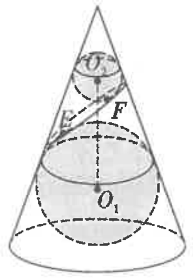

图 4

四、解答题（共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 10 分）

2019 年，5G 基站正式获得国家工信部入网批准，自此，中国进入“5G 时代”. 相比于 4G，5G 具有“更高网速、低延时高可靠、低功率海量连接”的特点，目前这一技术被广泛应用于工业、能源、教育等多个领域. 某运营商为了解 5G 网络使用满意度，从运营系统中选出 300 名客户进行调查，其中，青年（≤45 岁）客户与中老年（>45 岁）客户的比例为 3∶2，在 220 名持满意态度的客户中，中老年客户的比例为 $\frac{4}{11}$.

（1）完成 2×2 列联表，根据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，能否认为对 5G 网络的满意度和年龄有关联？

年龄	5G 网络满意度		合计
	满意	不满意	
青年（≤45 岁）			
中老年（>45 岁）			
合计			

（2）为更好地推广 5G 网络，运营商计划开展抽奖活动，规则如下：参与者从装有 3 个红球，6 个白球（形状，大小，质地完全相同）的箱子中随机摸一个球，摸出后放回，摸到红球奖励 5 元充值券，摸到白球奖励 2 元充值券. 若计划有 100 名客户参与抽奖，求运营商需提供充值券总金额 X 的数学期望.

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

$P(\chi^2\geqslant k)$	0.01	0.05	0.025
k	2.706	3.841	5.024

18.（本小题满分 12 分）

数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 b_n，$b_1=1$.

（1）若 $b_{n+1}=2a_n$，求 b_4；

（2）若 $b_n=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$，设 $c_n=\log_4 a_{2n-1}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和.

19.（本小题满分 12 分）

如图 5，P 为圆锥的顶点，A，B 为底面圆 O 上两点，$\angle AOB=\frac{2\pi}{3}$，$E$ 为 PB 中点，点 F 在线段 AB 上，且 $AF=2FB$.

（1）证明：平面 $AOP\perp$ 平面 OEF；

（2）若 $OP=AB$，求直线 AP 与平面 OEF 所成角的正弦值.

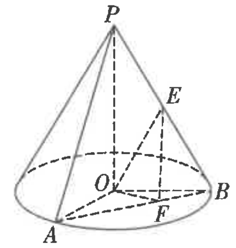

图 5

20.（本小题满分 12 分）

对平面向量 $\vec{m}$，$\vec{n}$，定义运算：$|\vec{m}\times\vec{n}|=|\vec{m}||\vec{n}|\sin\theta$，其中 $|\vec{m}|$，$|\vec{n}|$ 分别表示 $\vec{m}$，$\vec{n}$ 的模长，θ 是 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角.

在△ABC 中，已知 $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=4\sqrt{3}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4$.

（1）是否存在满足条件的△ABC，使得 $2|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|=6$？若存在，求 $|\overrightarrow{BC}|$ 的值；若不存在，请说明理由；

（2）若 $2|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|=8$，$D$ 是线段 AC 上一点，且 $\sqrt{2}BD=\sqrt{3}AD$，求 $\dfrac{|\overrightarrow{DB}\times\overrightarrow{DA}|}{|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CD}|}$.

21.（本小题满分 12 分）

设 a，b，$c\in\mathbf{R}$，$a\neq0$，$6a+b=0$，函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$，$f(1)=4a$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $0\leqslant x\leqslant3$ 时，函数 $y=f(x)-xe^{-x}$ 有三个零点 x_1，x_2，x_3，其中 $x_1<x_2<x_3$，试比较 $x_1+x_2+x_3$ 与 2 的大小关系，并说明理由.

22.（本小题满分 12 分）

已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率是 $\sqrt{3}$，实轴长是 2，O 为坐标原点. 设点 $P(x_0,y_0)$ 为双曲线 C 上任意一点，过点 P 的直线 l 与双曲线 C 的两条渐近线分别交于 M，N 两点，△OMN 的面积为 S.

（1）当 l 的方程为 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$ 时，求 S 的值；

（2）设 $\overrightarrow{MP}=\lambda\overrightarrow{PN}$，求证：$\dfrac{(1+\lambda)^2}{|\lambda|\cdot S}$ 为定值.