百师联盟2021届高三开年摸底联考 全国卷 I
理科数学参考答案及评分意见

1. B 【解析】$M=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，$N=\{x|x\in\mathbf{R},x\neq 1\}$，$M\cap N=\{x|0\leqslant x<1$ 或 $1<x\leqslant 2\}$，选 B.

2. A 【解析】$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{3}{5}$，所以 $3\tan^2\alpha-10\tan\alpha+3=0$，

$\tan\alpha=\frac{1}{3}$ 或 $\tan\alpha=3$，选 A.

3. B 【解析】对于①$c^2>0$，根据不等式性质得 $a<b$，正确；

对于②，$b=0$ 不成立，错误；

对于③可得 $0<a^2<b^2$，即 $|a|<|b|$，$a\leqslant|a|$，不等式成立，正确；

对于④错误；选 B.

4. D 【解析】总数 $C_4^2A_3^3$，恰好一名女生和一名男生分法有 $C_3^1A_2^2$，恰好一名女生和一名男生分到甲社区的概率是 $P=\frac{C_3^1A_2^2}{C_4^2A_3^3}=\frac{1}{6}$，选 D.

5. C 【解析】C

6. C 【解析】设雪花曲线的边长分别为 a_1,a_2,a_3,a_4，边数为 b_1,b_2,b_3,b_4，设周长为 $S_n(n=1,2,3,4,5)$。

$a_2=a_1\times\frac{1}{3}=1$，$a_3=\frac{1}{3}a_2=\frac{1}{3}$，$a_4=\frac{1}{3}a_3=\frac{1}{9}$，$a_5=\frac{1}{27}$，$b_1=3$，$b_2=3\times 4$，$b_3=3\times 4\times 4$，$b_4=3\times 4\times 4\times 4$，$b_5=3\times 4\times 4\times 4\times 4$.

$S_1=9$，$S_2=12$，$S_3=16$，$S_4=\frac{64}{3}$，$S_5=\frac{256}{9}$，选 C.

7. B 【解析】$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}=(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MP})\cdot(\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{MP})=|BM|^2-|MP|^2$，

$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}=|BM|^2-5$，只需要求 $|BM|$ 的最小值即可，

当 $BM\perp AC$ 时，$|BM|$ 最小，此时 $|BM|=\frac{12}{5}$，

$(\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ})_{\min}=\frac{144}{25}-5=\frac{19}{25}$，选 B.

8. A 【解析】圆 $C:x^2+y^2-4x-2y+3=0$，$(x-2)^2+(y-1)^2=2$，因为 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，$AC=BC=\sqrt{2}$，当 $\angle ACB=90°$ 时，$\triangle ABC$ 的面积最大，此时圆心 C 到直线 l 的距离等于 $\frac{\sqrt{2}}{2}r=1$，

设直线 l 方程 $y=kx$，$\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k=0$ 或 $k=\frac{4}{3}$，直线 l 的方程为 $y=0$ 或 $y=\frac{4}{3}x$，选 A.

9. C 【解析】当 $n=1$ 时，$s=[\frac{1+1}{3}]=0$，$k=2$；

当 $n=2$ 时，$s=[\frac{0+2}{3}]=0$，$k=3$；

当 $n=3$ 时，$s=[\frac{0+3}{3}]=1$，$k=4$；

当 $n=4$ 时，$s=[\frac{1+4}{3}]=1, k=5$；

当 $n=5$ 时，$s=[\frac{1+5}{3}]=2, k=6$；

当 $n=6$ 时，$s=[\frac{2+6}{3}]=2, k=7$；

当 $n=7$ 时，$s=[\frac{2+7}{3}]=3, k=8$；

当 $n=8$ 时，$s=[\frac{3+8}{3}]=3, k=9$；

当 $n=9$ 时，$s=[\frac{3+9}{3}]=4, k=10$；

选 C.

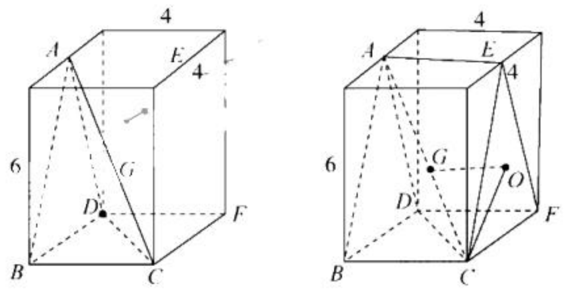
10. D 【解析】由题意知，函数的最小正周期为 $T=6$，$\frac{T}{4}=\frac{3}{2}$，$P(-\frac{1}{2},2)$ 在图象上且是最高点，

所以对称中心的横坐标 $x=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+k\frac{T}{2}=1+3k, k\in\mathbf{Z}$，

当 $k=2$ 时，$x=7$，选 D.

11. C 【解析】构造一个长方体，三棱锥 $A-BCD$ 的三视图即为图中所示，将三棱锥 $A-BCD$ 补成直三棱柱 $ABD-CEF$，只需要求出直三棱柱 $ABD-CEF$ 的外接球面积即可，因为它们有同一个外接球. 设球心为 G，$\triangle EFC$ 的外接圆圆心为 O，$\cos\angle CEF=\frac{4}{5}$，$\sin\angle CEF=\frac{3}{5}$，由正弦定理得：$2OC=\frac{CF}{\sin\angle CEF}=\frac{20}{3}$，$OC=\frac{10}{3}$，$OG=2$，

$GC^2=OC^2+OB^2=4+\frac{100}{9}=\frac{136}{9}$，球的表面积为 $S=4\pi R^2=\frac{544\pi}{9}$. 选 C.



12. B 【解析】$m(\frac{1}{x}+1)=\ln x$，$m=\frac{x\ln x}{x+1}$，令 $h(x)=\frac{x\ln x}{x+1}$，$h'(x)=\frac{x+1+\ln x}{(x+1)^2}$，令，$k(x)=x+1+\ln x$，$k'(x)=1+\frac{1}{x}>0$，函数 $y=k(x)$ 在区间 (e^{-1},e) 单调递增，$k(x)>k(e^{-1})=e^{-1}>0$，所以 $h'(x)>0$，函数 $y=h(x)$ 在区间 (e^{-1},e) 单调递增，所以有 $h(e^{-1})<h(x)<h(e)$，即 $\frac{-1}{e+1}<h(x)<\frac{e}{e+1}$，$\frac{-1}{e+1}<m<\frac{e}{e+1}$，选 B.

13. $z=\frac{2}{5}-\frac{1}{15}i$ 【解析】设 $z=a+bi,a,b\in\mathbf{R}$, $a+bi+\frac{2+i}{5}=2(a-bi)$, $\begin{cases}a+\frac{2}{5}=2a\\b+\frac{1}{5}=-2b\end{cases}$, $a=\frac{2}{5}$,

$b=-\frac{1}{15}$, $z=\frac{2}{5}-\frac{1}{15}i$.

14. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ 【解析】由题意可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增,又 $f(1)=0$,

$x<1$ 时,$f(x)<0$;$x>1$ 时,$f(x)>0$;

对于 $(x-2)f(x)>0$,当 $x>2$ 时,不等式成立,

当 $1<x<2$ 时,$x-2<0$,$f(x)>0$,不等式不成立;

当 $x<1$ 时,$x-2<0$,且 $f(x)<0$,不等式成立.

不等式的解集 $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

15. $e>\sqrt{3}$ 【解析】由题意可知直线 l 的斜率 k 存在,M 是 MP 的中点,当 $k>0$ 时,$P(c,\frac{b^2}{a})$,

$M(0,\frac{b^2}{2a})$,$\frac{b^2}{2a}>a$,$c^2>3a^2$,所以 $e>\sqrt{3}$;同理可得,当 $k<0$ 时,$e>\sqrt{3}$.

16. 58 【解析】由题意,$a_1=2$,$a_2=4$,$a_3=16$,$a_4=37$,$a_5=58$,$a_6=89$,$a_7=145$,

$a_8=42$,$a_9=20$,$a_{10}=4$,……,可知该数列从第二项开始是周期为 8 的周期数列,

$a_{2021}=a_5=58$.

17.【解析】$5\cos(B+C)+2=2\cos^2A-1$,$2\cos^2A+5\cos A-3=0$,

$\cos A=\frac{1}{2}$ 或 $\cos A=-3$(舍去). ………………………………………… 4 分

$0<A<\pi$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………… 5 分

(2)$S=\frac{3}{2}\sqrt{3}=\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}$,$bc=6$,

$c=\sqrt{3}$,$b=2\sqrt{3}$, ………………………………………… 7 分

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-bc=12+3-6=9$,$a=3$, ……………………………… 10 分

由正弦定理得 $\triangle ABC$ 外接圆直径

$2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$, ………………………………………… 11 分

$(2R)^2\sin B\sin C=6$,

所以 $\sin B\sin C=\frac{1}{2}$. ………………………………………… 12 分

18.【解析】(1)取 A_1B 的中点为 N,连接 MN,NQ,因为 $A_1M\perp MB$,所以 $A_1B=2\sqrt{2}$,$BC=2\sqrt{3}$,$A_1C=2$,所以 $A_1C\perp A_1B$, ………………………………………… 2 分

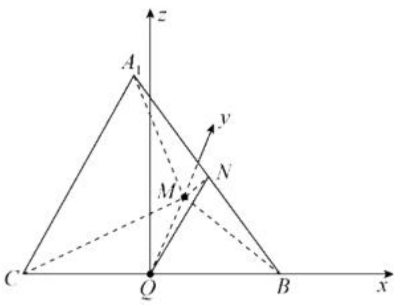
又 $NQ \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}A_1B$,所以 $A_1B\perp QN$. ………………………………………… 4 分

又 $\triangle A_1MB$ 为等腰三角形,所以 $A_1B\perp NM$,$MN\cap QN=N$

所以 $A_1B\perp$ 面 MNQ, ………………………………………………………………………… 5 分

$QM\subset$ 面 MNQ,所以 $MQ\perp A_1B$. ……………………………………………………………… 6 分

(2) $MQ\perp BA_1$, $MQ\perp BC$, $BC\cap BA_1=B$, 所以 $QM\perp$ 面 A_1CB.



取 QB 所在直线为 x 轴,QM 所在直线为 y 轴,过 Q 点作面 MCB 的垂线为 z 轴,建立空间直角坐标系.

则 $B(\sqrt{3},0,0)$,$C(-\sqrt{3},0,0)$,$M((0,1,0)$,

$A_1(-\frac{\sqrt{3}}{3},0,\frac{2\sqrt{6}}{3})$

设面 A_1MC 一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,$\overrightarrow{CM}=(\sqrt{3},1,0)$,

$\overrightarrow{CA_1}=(\frac{2\sqrt{3}}{3},0,\frac{2\sqrt{6}}{3})$,得 $\begin{cases}\sqrt{3}x+y=0\\ x+\sqrt{2}z=0\end{cases}$,取 $z=-1$,$x=\sqrt{2}$,$y=-\sqrt{6}$,

$\boldsymbol{n}=(\sqrt{2},-\sqrt{6},-1)$, ……………………………………………………………………… 8 分

又 $\overrightarrow{MB}=(\sqrt{3},-1,0)$,

$\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{MB}>=\frac{2\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{3}$, ……………………………………………………………… 11 分

直线 MB 与面 A_1MC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. …………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)由题意可得关于商品和服务评价的 2×2 列联表如下:

	对服务好评	对服务不满意	总计
对商品好评	80	40	120
对商品不满意	60	20	80
总计	140	60	200

$K^2=\frac{200\,(1600-2400)^2}{140\times 60\times 120\times 80}=1.587$,$1.587<2.706$, ………………………………… 5 分

所以,不可以在犯错误概率不超过 0.1 的前提下,认为商品好评与服务好评有关. …… 6 分

(2)每次购物时,对商品和服务都好评的概率为 $\frac{2}{5}$,且 X 的取值可以是 0,1,2,3,4. … 6 分

其中 $P(X=0)=(\frac{3}{5})^4=\frac{81}{5^4}$;$P(X=1)=C_4^1(\frac{2}{5})(\frac{3}{5})^3=\frac{216}{5^4}$;

$P(X=2)=C_4^2(\frac{2}{5})^2(\frac{3}{5})^2=\frac{216}{5^4}$;$P(X=3)=C_4^3(\frac{2}{5})^3(\frac{3}{5})=\frac{96}{5^4}$;

$P(X=4)=(\frac{2}{5})^4=\frac{16}{5^4}$. ……………………………………………………………………… 9 分

X 的分布列为:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{81}{5^4}$	$\frac{216}{5^4}$	$\frac{216}{5^4}$	$\frac{96}{5^4}$	$\frac{16}{5^4}$

由于 $X\sim B(4,\frac{2}{5})$,则 $EX=\frac{8}{5}$. ……………………………………………………

20.【解析】(1)$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\times 2b=1, b=1$,

$a^2-c^2=1$,

设$M(x,y)$是椭圆上任意一点,$F(-c,0)$,$MF^2=(x+c)^2+y^2=\frac{c^2}{a^2}x^2+2cx+a^2$,

对称轴$x=-\frac{a^2}{c}<-a$,区间$x\in[-a,a]$为增区间,$x=-a$时,$MF_{\min}=a-c$,即

$a-c=\sqrt{2}-1$, ………………………………………………………………………… 3分

$a+c=\sqrt{2}+1, a=\sqrt{2}$,

椭圆方程$\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ………………………………………………………………………… 5分

(2)设$P(t,2)$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则$\begin{cases}k_{AP}=\frac{y_1-1}{x_1}=\frac{1}{t}\\ k_{BP}=\frac{y_2+1}{x_2}=\frac{3}{t}\end{cases}$,

所以有$3x_2(y_1-1)=x_1(y_2+1)$, ………………………………………………………… 6分

因为$\frac{x_1^2}{2}=1-y_1^2=(1-y_1)(1+y_1)$,代入上式得

$\frac{-3}{2}x_1x_2=(y_1+1)(y_2+1)$, ……………………………………………………………… 7分

$\frac{-3}{2}x_1x_2=y_1y_2+(y_1+y_2)+1$. ……………………………………………………………… ①

设直线MN:$y=kx+m$,代入$x^2+2y^2=2$,$(1+2k^2)y^2-2my+m^2-2k^2=0$.

$\begin{cases}y_1+y_2=\frac{2m}{1+2k^2}\\ y_1y_2=\frac{m^2-2k^2}{1+2k^2}\end{cases}$, ② ………………………………………………………… 9分

$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$,$x_1x_2=\frac{2m^2-2}{1+2k^2}$. ……………………………………… ③

将②③代入①得$2m^2+m-1=0$,$m=\frac{1}{2}$或-1(舍去). ……………………………… 11分

直线MN过定点$(0,\frac{1}{2})$. ……………………………………………………………… 12分

21.【解析】(1)证明:$f'(x)=ae^x+\cos x+1$,因为$x\in[0,\pi]$,所以$1+\cos x\geqslant 0$,

当$a=-1$时,$f'(x)=-e^x+\cos x+1$, ……………………………………………………… 2分

令$g(x)=-e^x+\cos x+1$,$g'(x)=-e^x-\sin x<0$, ………………………………………… 4分

$g(x)$在区间$[0,\pi]$上单调递减;$g(0)=-1+2=1$,$g(\pi)=-e^{\pi}<0$,

存在$x_0\in(0,\pi)$,使得$f'(x_0)=0$, ……………………………………………………… 5分

所以函数$f(x)$递增区间是$[0,x_0]$,递减区间是$[x_0,\pi]$.

所以函数$f(x)$存在唯一的极大值点x_0. ……………………………………………………… 6分

(2)当$-2<a<0$时,令$h(x)=ae^x+\sin x+x-\pi$

$h'(x)=ae^{x}+\cos x+1$,

$h''(x)=ae^{x}-\sin x<0$,

$h'(x)$在区间$[0,\pi]$上单调递减,

$h'(0)=a+2>0, h'(\pi)=ae^{\pi}<0$, ……………………………………………… 7 分

存在$x_0\in(0,\pi)$,使得$h'(x_0)=0$,即$ae^{x_0}+\cos x_0+1=0$,

所以函数$h(x)$在区间$[0,x_0]$上是递增函数,在区间$[x_0,\pi]$上是递减函数. …………… 9 分

$h(x)_{\max}=h(x_0)=ae^{x_0}+\sin x_0+x_0-\pi, x_0\in(0,\pi)$,因为$ae^{x_0}+\cos x_0+1=0$,

只需证$h(x_0)=\sin x_0-\cos x_0+x_0-1-\pi<0$即可.

$h'(x_0)=\cos x_0+\sin x_0+1, h'(x_0)>0$, ……………………………………………… 10 分

$h(x_0)$在区间$(0,\pi)$上是增函数,$h(x_0)<h(\pi)=0$,即$f(x)<\pi$. ……………………… 12 分

22.【解析】(1)直线l普通方程为$y=2x-1$, ……………………………………………… 4 分

(2)曲线C的普通方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$,将直线l的参数方程

化为$\begin{cases}x=2+\frac{1}{\sqrt5}t\\ y=3+\frac{2}{\sqrt5}t\end{cases}$,($t$为参数) ……………………………………………… 5 分

代入椭圆方程得:$\frac{17}{5}t^2+\frac{52}{\sqrt5}t+36=0$,

$t_1+t_2=-\frac{52\times5}{17\sqrt5}, t_1t_2=\frac{36\times5}{17}$. ……………………………………………… 7 分

$t_1t_2>0$,t_1,t_2同号,$|AP|+|AQ|=|t_1+t_2|=\frac{52\sqrt5}{17}$. ……………………………… 10 分

23.【解析】(1)当$a=4$时,$f(x)=|3x-4|+x$.

由$|3x-4|<3-x$,得$x-3<3x-4<3-x$,

解得$\frac{1}{2}<x<\frac{7}{4}$.

所以,不等式$f(x)<3$的解集为$\{x|\frac{1}{2}<x<\frac{7}{4}\}$. ……………………………………… 4 分

(2)$f(x)+g(x)=|3x-a|+\left|x+\frac{6}{a}\right|=\left|3(x-\frac{a}{3})\right|+\left|x+\frac{6}{a}\right|$

$=2\left|x-\frac{a}{3}\right|+\left|x-\frac{a}{3}\right|+\left|x+\frac{6}{a}\right|$

$\geqslant\left|x-\frac{a}{3}\right|+\left|x+\frac{6}{a}\right|$(当且仅当$x=\frac{a}{3}$时取等号). ……………………………… 7 分

$\geqslant\left|(x-\frac{a}{3})-(x+\frac{6}{a})\right|$(当且仅当$(x-\frac{a}{3})(x+\frac{6}{a})\leqslant0$时取等号,$a>0$)

$=\left|\frac{a}{3}+\frac{6}{a}\right|\geqslant2\sqrt2$当且仅当$a=3\sqrt2$时,等号成立. ……………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线(原自主招生在线)创办于 2014 年,历史可追溯至 2008 年,隶属北京太星网络科技有限公司,是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵

盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 " 专业、专注、有态度 " 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。