江西省 东乡一中 都昌一中 丰城中学 赣州中学 景德镇二中 上饶中学 上栗中学 新建二中 新八校 2023届高三第一次联考理科数学试题答案

命题人：新建二中 边群根 审题人：新建二中 邓国平

考试时间：120分钟 满分：150分

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x\in R\mid \lg x\le 1\}$，$B=\{x\in R\mid x<1\}$，$U=R$，则 $A\cap(\complement_R B)=$（ ）

A. $\{x\mid 1<x\le 10\}$ B. $\{x\mid 1\le x\le 10\}$ C. $\{x\mid 0\le x\le 1\}$ D. $\{x\mid 1\le x<10\}$

【答案】B

【解析】因为 $A=\{x\in R\mid \lg x\le 1\}=\{x\mid 0<x\le 10\}$，$B=\{x\in R\mid x<1\}$，

$U=R$，所以 $\complement_R B=\{x\mid x\ge 1\}$，所以 $A\cap(\complement_R B)=\{x\mid 1\le x\le 10\}$，故选：B.

2. 若复数 $z=(1-\mathrm{i})\times \mathrm{i}^{2023}$，则复数 $\bar{z}$ 的虚部为（ ）

A. 1 B. -1 C. i D. $-i$

【答案】A

【解析】复数 $z=(1-\mathrm{i})\times \mathrm{i}^{2023}=(1-i)(-i)=-1-i$，$\therefore \bar{z}=-1+i$，则复数 $\bar{z}$ 的虚部为1，选A.

3. 下列说法正确的是（ ）

A. “$\forall x>0$，$e^x>x+1$”的否定形式是“$\exists x\le 0$，$e^x\le x+1$”

B. 若函数 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(0)=0$.

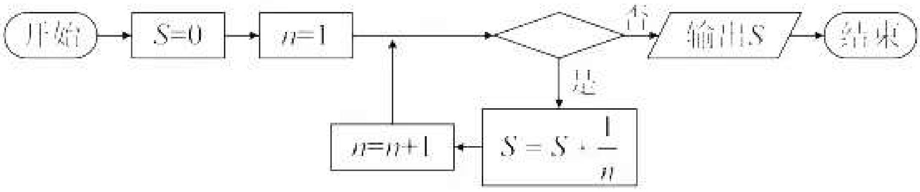
C. 两个非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{a}/\!/\vec{b}$ 是 $\vec{a}=\vec{b}$ 的充分不必要条件

D. 若 $xy\ge 0$（$x\in R$，$y\in R$），则 $|x+y|+|x|+|y|\ge 2|x-y|$

【答案】D 来源：高三答案公众号

【解析】对于A：“$\forall x>0$，$e^x>x+1$”的否定形式是“$\exists x>0$，$e^x\le x+1$”，故A错误；对于B：若 $x=0$ 无定义，则 $f(0)\ne 0$，故B错误；对于C：对两个非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{a}/\!/\vec{b}$ 不能推出 $\vec{a}=\vec{b}$，但是“$\vec{a}=\vec{b}$”能推出 $\vec{a}/\!/\vec{b}$，所以 $\vec{a}/\!/\vec{b}$ 是 $\vec{a}=\vec{b}$ 的必要不充分条件，故C错误；对于D：若 $xy\ge 0$（$x\in R$，$y\in R$），则 $|x+y|+|x|+|y|=2(|x|+|y|)$.由绝对值的三角形不等式可得 $|x-y|\le|x|+|y|$，所以 $2|x-y|\le 2(|x|+|y|)=|x+y|+|x|+|y|$.即证.故D正确.故选：D.

4. 要计算 $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2023}$ 的结果，如图程序框图中的判断框内可以填（ ）



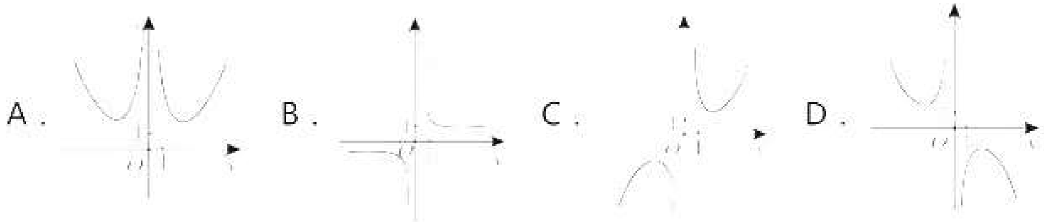
A. $n<2023$ B. $n\le 2023$ C. $n>2023$ D. $n\ge 2023$

【答案】B

【解析】由题意，输出 $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2023}$ 故程序一直循环，直到 $n=2024$

故程序框图中的判断框内可以填：n<2023 故选：B

5. 函数 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{x^2}$ 的图像大致为（　　）



【答案】C

【解析】$\because x\neq 0, f(-x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{x^2}=-f(x)\therefore f(x)$为奇函数，舍去A，

$\because f(1)=e-e^{-1}>0\therefore$舍去D；$\because f'(x)=\frac{(e^x+e^{-x})x^2-(e^x-e^{-x})2x}{x^4}=\frac{(x-2)e^x+(x+2)e^{-x}}{x^3}$，

$\therefore x>2, f'(x)>0$ 所以舍去B；因此选C．

6. 防疫工作，人人有责，某单位选派了甲、乙、丙、丁、戊五名志愿者到 A，B，C 三处核酸点参加志愿者工作，若每个核酸点至少去1名志愿者，则甲、乙两人派到同一处核酸点参加志愿者工作的概率为（　　）

A．$\frac{3}{25}$　　B．$\frac{6}{25}$　　C．$\frac{2}{5}$　　D．$\frac{3}{5}$

【答案】B

【解析】甲、乙、丙、丁、戊5人分到三个不同的核酸点，每个核酸点至少分1人的方法数是

$(C_5^3+\frac{C_5^1C_4^2}{A_2^2})A_3^3=150$，其中甲、乙两人派到同一处核酸点的方法数是 $(C_3^1+C_3^2)A_3^3=36$，因

此所求概率 $P=\frac{36}{150}=\frac{6}{25}$ 故选：A．

7. 设 $a,b\in\mathbf{R}$，数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1, a_{n+1}=ba_n+a$，$n\in N^*$，则下列选项正确的是（　　）

A. 当 $a=1, b=-1$,时，则$a_{10}=1$　　B. 当 $a=2, b=1$,时，则$S_n=n^2-2n$

C. 当 $a=0, b=2$,时，则$a_n=2^n$　　D. 当 $a=1, b=2$,时，则$a_n=2^n-1$

【答案】D

【解析】选项A：当 $a=1, b=-1$,时，，$a_1=1$，$a_2=0$，$a_3=1\therefore$ 数列为$T=2$的数列 $\therefore a_{10}=0$，故A不正确；选项B：$a=2, b=1$,时，$a_n=2n-1,\therefore S_n=n^2$，故选项B不正确；

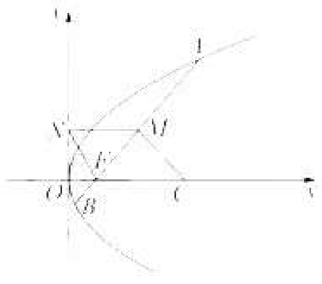
选项C：当 $a=0, b=2$,时，则$a_n=2^{n-1}$则选项C也不正确；

选项D：当 $a=1, b=2$,时，$a_{n+1}+1=2(a_n+1)\therefore a_n+1=(a_1+1)2^{n-1}\therefore a_n=2^n-1$ 则选项D正确

8. 如图，已知抛物线 E：$y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，过 F 且斜率为1的直线交 E 于 A，B 两点，线段 AB 的中点为 M，其垂直平分线交 x 轴于点 C，$MN\perp y$ 轴于点 N．若四边形 $OCMN$ 的面积

等于8，则E的方程为（　　）.

A. $y^2=2x$　　B. $y^2=4x$　　C. $y^2=4\sqrt{3}x$　　D. $y^2=8x$



【答案】B

【解析】易知$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，直线$AB$的方程为$y=x-\frac{p}{2}$，四边形$OCMN$为直角梯形，且$FC // NM$．设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x_0,y_0)$，则

$k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y_1-y_2}{\frac{y_1^2}{2p}-\frac{y_2^2}{2p}}=\frac{2p}{y_1+y_2}=1$，所以$y_1+y_2=2p$，所以

$y_0=p\therefore M(\frac{3p}{2},p)$，所以$MC$直线方程为$y-p=-(x-\frac{3p}{2})\therefore$令$y=0\therefore x=\frac{5p}{2}\therefore C(\frac{5p}{2},0)$

所以四边形$OCMN$的面积为$\frac{1}{2}\times\left(\frac{5p}{2}+\frac{3p}{2}\right)\times p=8\therefore p=2$，故抛物线$E$的方程为$y^2=4x$.故选B.

9. 已知函数$f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$，若方程$f(x)=1$在区间$[0,2\pi]$上恰有3个实根，则$\omega$的取值范围是（　　）

A. $\left[1,\frac{4}{3}\right)$　　B. $\left(1,\frac{4}{3}\right]$　　C. $\left(\frac{5}{6},1\right]$　　D. $\left(\frac{4}{3},\frac{3}{2}\right]$

【答案】A

【解析】由方程$f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)=1\therefore\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，所以

$\omega x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{6}$或$2k\pi+\frac{5\pi}{6}(k\in Z)$，当$x\in[0,2\pi]$时，$\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},2\omega\pi+\frac{\pi}{6}\right]$，所以$\omega x+\frac{\pi}{6}$的可能取值为$\frac{\pi}{6}$，$\frac{5\pi}{6}$，$\frac{13\pi}{6}$，$\frac{17\pi}{6}$，…，因为原方程在区间$[0,2\pi]$上恰有3个实根，所以

$\frac{13\pi}{6}\le 2\omega\pi+\frac{\pi}{6}<\frac{17\pi}{6}$，解得$1\le\omega<\frac{4}{3}$，即$\omega$的取值范围是$\left[1,\frac{4}{3}\right)$.故选：A

10. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左焦点为$F$，右顶点为$A$，点$B$在$C$的一条渐近线上，且$FB\perp BO$（点$O$为坐标原点），直线$FB$与$y$轴交于点$D$，若$AD || OB$，则双曲线$C$的离心率为（　　）来源：高三答案公众号

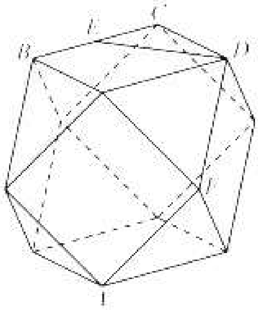
A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$　　C. $\sqrt{5}+1$　　D. $\sqrt{5}-1$

【答案】B

【解析】由双曲线方程知：一条渐近线方程为$y=-\frac{b}{a}x$，$F(-c,0)$，$A(a,0)$，则直线FD方程为：$y=\frac{a}{b}(x+c)$，令$x=0$，则$y_D=\frac{ac}{b}$，即$D\left(0,\frac{ac}{b}\right)$；

$\therefore k_{BD}=\dfrac{\frac{ac}{b}}{-a}=-\dfrac{c}{b}$，$\therefore -\dfrac{b}{a}=-\dfrac{c}{b}\therefore b^2=ac\therefore c^2-a^2=ac\therefore e^2-e-1=0\therefore e=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，

$\because e>1\therefore e=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.故选：B.



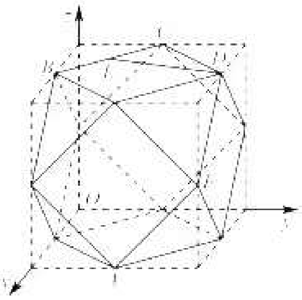
11.有很多立体图形都体现了数学的对称美，其中半正多面体是由两种或两种以上的正多边形围成的多面体，半正多面体因其最早由阿基米德研究发现，故也被称作阿基米德体.如图，这是一个棱数为 24，棱长为$\sqrt{2}$的半正多面体，它的所有顶点都在同一个正方体的表面上，可以看成是由一个正方体截去八个一样的四面体所得.若点 为线段 上的动点，则下列结论不正确的是（　　）

A.存在点E,使得 A、F、D、E四点共面;

B.存在点E,使$DE\perp DF$;

C.存在点E,使得直线 DE 与平面CDF所成角为$\dfrac{\pi}{3}$;

D.存在点E,使得直线 DE 与直线AF所成角的余弦值为$\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.



【答案】C

【解析】对 A 当点E在点 C 时，A、F、D、E四点共面，A 正确；对 B 当点E在点 B 时，易得$DE\perp DF$，B 正确；

将半正多面体补成正方体，建立如图所示的空间直角坐标系.因为半正多面体的棱长为$\sqrt{2}$，故正方体的棱长为 2.所以 A(2,1,0), F(2,2,1)，B(1,0,2), C(0,1,2), D(1,2,2),.

对 C,当点E在点 B 时，直线 DE 与平面 CDF 所成角最大，设平面 CDF 的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$

$CD=(1,1,0).CF=(2,1,-1)$

$\begin{cases}\vec{n}\bullet\overrightarrow{CD}=x+y=0\\\vec{n}\bullet\overrightarrow{CF}=2x+y-z=0\end{cases}$ 令$x=1,y=-1,z=1\therefore\vec{n}=(1,-1,1),\overrightarrow{DB}=(0,-2,0)$ 所以 直线 DE 与平面 CDF

所成角最大$\theta\therefore\sin\theta=\left|\dfrac{\vec{n}\bullet\overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{DB}|\bullet|\vec{n}|}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,C 不对；对 D 设$BE=\lambda BC=(-\lambda,\lambda,0),\lambda\in[0,1]$，则

$E(1-\lambda,\lambda,2), DE=(-\lambda,\lambda-2,0).AF=(0,1,1)$,

所以$\cos\left\langle\overrightarrow{AF},\overrightarrow{DE}\right\rangle=\left|\dfrac{\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{DE}}{|\overrightarrow{AF}||\overrightarrow{DE}|}\right|=\left|\dfrac{\lambda-2}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2+(\lambda-2)^2}}\right|=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}\therefore\lambda=\dfrac{1}{2}$，故 D 正确.

12. 已知$a=e^{0.2}-1,b=2(e^{0.1}-1),c=\sin 0.1+\tan 0.1$，则（　　）

A. $b>c>a$　　B. $a>c>b$　　C. $c>a>b$　　D. $a>b>c$

【答案】D

【解析】$\because a-b=e^{0.2}-2e^{0.1}+1=(e^{0.1}-1)^2>0\therefore a>b$

$b-c=2(e^{0.1}-1)-\sin 0.1-\tan 0.1$. 设$f(x)=2e^x-\sin x-\tan x-2$

$f'(x)=2e^x-\cos x-\dfrac{1}{\cos^2 x}\therefore f'(0)=0$，又$\because f''(x)=2e^x+\sin x-\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$，

当$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right)$时，$2e^{x}+\sin x\ge 2,\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}<\dfrac{2\sin\dfrac{\pi}{6}}{\cos^3\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{8\sqrt{3}}{9}<2,\therefore x\in\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right)$时，$f''(x)>0$

$\therefore f'(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right)$为增函数$\because f'(0)=0$，$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right)$时，$f'(x)>0,\therefore f(0.1)>f(0),\therefore b>c$.

故选 D.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。来源：高三答案公众号

13.已知非零向量$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{a}|=2|\vec{b}|-2$，且$(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{b}$，则向量$\vec{b}$在向量$\vec{a}$上的投影为______.

【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解析】因为$(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{b}$，所以$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^2=0$，所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}^2$，所以$|\vec{b}|\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=\dfrac{|\vec{b}|^2}{|\vec{a}|}=\dfrac{1}{2}$，

14.已知$a=\int_1^{e^2}\dfrac{1}{x}dx$，则$\left(ax+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$的展开式中$x^3$项的系数是______.(用数字作答)

【答案】240

【解析】由$a=\int_1^{e^2}\dfrac{1}{x}dx=2$，所以$\left(ax+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6=\left(2x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$，

$\left(2x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$展开式的通项为$T_{k+1}=C_6^k(2x)^{6-k}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^k=C_6^k\cdot 2^{6-k}x^{6-\frac{3}{2}k}$，$k=0,1,\cdots 6$，

令$6-\dfrac{3}{2}k=3,k=2$，则x^3项的系数是$C_6^2 2^4=240$

15.已知正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的顶点都在球 O 的球面上，若正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的侧面积为12，则球 O 的表面积的最小值是______.

【答案】$\dfrac{16\sqrt{3}\pi}{3}$

【解析】因为正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$是直三棱柱，设其高为$h,AC=BC=AB=a$

则$3a\times h=12\therefore h=\dfrac{4}{a}\therefore\dfrac{h^2}{4}=\dfrac{4}{a^2}$设三角形$ABC$的外接圆半径为$r$，则$2r=\dfrac{a}{\sin\dfrac{\pi}{3}}\therefore r=\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$，

所以球 O 的半径 R,则$R^2=r^2+\dfrac{h^2}{4}=\dfrac{a^2}{3}+\dfrac{4}{a^2}\ge\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，所以球 O 的表面积的最小值为

$\frac{16\sqrt{3}\pi}{3}$

16. 已知函数 $f(x)=\ln x+ax^2-(a+2)x(a<2)$，若 $f(x)$ 存在极小值点 m ，则 $f(m)$ 的最大值为________.

【答案】[illegible]

【解析】∵函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$， $f'(x)=\frac{1}{x}+2ax-(a+2)=\frac{(2x-1)(ax-1)}{x}$

当 $a\le 0$ 时， $x\in(0,\frac{1}{2}),f'(x)>0,f(x)$ 递增， $x\in(\frac{1}{2},+\infty),f'(x)<0,f(x)$ 递减，此时无极小值；

当 $0<a<2$ 时，由 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{2},x=\frac{1}{a}$， 且 $\frac{1}{2}<\frac{1}{a}$， $f(x)$ 存在极小值点 m， 且 $m=\frac{1}{a}$，

$f(m)=f(\frac{1}{a})=\ln\frac{1}{a}+\frac{1}{a}-\frac{a+2}{a}=-\ln a-\frac{1}{a}-1$ 设 $h(a)=-\ln a-\frac{1}{a}-1$， 则 $h'(a)=-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}=\frac{1-a}{a^2}$，

当 $a\in(0,1),h'(a)>0$, 当 $a\in(1,2),h'(a)<0$, ∴ $h(a)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增， 在 $(1,2)$ 上单调递减， 所以 $h(a)\le h(1)=-2$， 即 $f(m)$ 的最大值为 -2

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

17. 设 ΔABC 的三个内角 A ，B ，C 所对的边分别为 a ，b ，c ，

且满足 $(4\cos^2\frac{B}{2}-3)\sin A+(2\cos A-1)\sin B=0$ （1）证明：$a+b=2c$ ；

（2）求 $\cos C$ 的最小值．

【解析】由 $(4\cos^2\frac{B}{2}-3)\sin A+(2\cos A-1)\sin B=0$

$\therefore(2\cos B-1)\sin A+(2\cos A-1)\sin B=0$ 得 $2\cos B\sin A+2\cos A\sin B=\sin A+\sin B$ ，

$\therefore 2\sin C=\sin A+\sin B$ 由正弦定理，得 $a+b=2c$． ……6 分

（2）由 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(a+b)^2-2ab-c^2}{2ab}=\frac{3c^2}{2ab}-1\ge\frac{3c^2}{2(\frac{a+b}{2})^2}-1=\frac{1}{2}$．

所以 $\cos C$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$． ……12 分

18. 2022 年 10 月 16 日二十大胜利召开后，学习贯彻党的二十大精神，要在全面学习上下功夫，只有全面、系统、深入学习，才能完整、准确、全面领会党的二十大精神.有关部门就学习宣传二十大精神推进学校和机关单位，某学校计划选派部分优秀学生干部参加宣传活动，报名参加的学生需进行测试，共设 4 道选择题，规定必须答完所有题，且每答对一题得 1 分，答错得 0 分，至少得 3 分才能选成为宣传员；甲、乙、丙三名同学报名参加测试，他们答对每道题的概率都为 $\frac{1}{3}$，且每个人答题相互不受影响.

（1）求甲、乙、丙三名同学有两位同学通过测试的概率;

（2）用随机变量 ξ 表示三名同学能够成为宣传员的人数，求 ξ 的数学期望与方差.

【解析】（1）每个同学通过测试需得 3 分或 4 分，即答对 3 道或 4 道试题

所以 $p=C_4^3(\frac{1}{3})^3(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3})^4=\frac{1}{9}$,因为每个人答题相互不受影响，所以三人是否成为宣传员是相互独立事件，又因为每个人成为宣传员的概率均为 $\frac{1}{9}$，甲、乙、丙三名同学有两位同学通过测试的概率为 $p=C_3^2(\frac{1}{9})^2(1-\frac{1}{9})=\frac{8}{243}$；......6 分 来源：高三答案公众号

(2)因为每个人成为宣传员的概率均为 $\frac{1}{9}$,故为独立重复试验，又随机变量 ξ 表示能够成为宣传员的人数，即 3 次独立重复试验中发生 ξ 次的概率，所以随即变量 ξ 满足二项分布，$\xi\sim B(3,\frac{1}{9})$,所以 $E\xi=np=3\times\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$, $D\xi=np(1-p)=\frac{8}{27}$ ......12 分

方法二：所得分数 ξ 的所有取值为 0、1、2、3

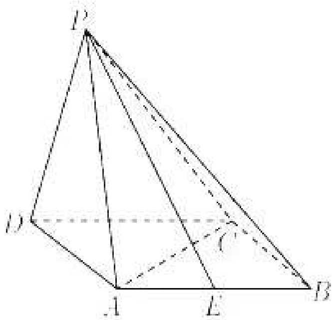
$p(\xi=0)=C_3^0(\frac{1}{9})^0(1-\frac{1}{9})^3=\frac{512}{729}$， $p(\xi=1)=C_3^1(\frac{1}{9})^1(1-\frac{1}{9})^2=\frac{192}{729}$

$p(\xi=2)=C_3^2(\frac{1}{9})^2(1-\frac{1}{9})=\frac{24}{729}$， $p(\xi=3)=C_3^3(\frac{1}{9})^3(1-\frac{1}{9})^0=\frac{1}{729}$

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{512}{729}$	$\frac{192}{729}$	$\frac{24}{729}$	$\frac{1}{729}$

$E(\xi)=0\times\frac{512}{729}+1\times\frac{192}{729}+2\times\frac{24}{729}+3\times\frac{1}{729}=\frac{243}{729}=\frac{1}{3}$；$D\xi=np(1-p)=\frac{8}{27}$ ......12 分

19. 如图所示，四边形 $ABCD$ 为菱形，$PA=PD$，二面角 $P-AD-C$ 为直二面角，点 E 是棱 AB 的中点.(1)求证：$PE\perp AC$；(2)若 $PA=AB$，$AC=4$，当二面角 $P-AC-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 时，求直线 PE 与平面 PAC 所成的角正弦值.



【解析】(1)证明：如图所示，设点 F 是棱 AD 的中点，连 PF、EF、BD，

由 $PA=PD$ 及点 F 是棱 AD 的中点，可得 $PF\perp AD$，

又二面角 $P-AD-C$ 为直二面角，故 $PF\perp$ 平面 $ABCD$，

又因为 $AC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PF\perp AC$，

又因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $BD\perp AC$，

而 EF 是 $\triangle ABD$ 的中位线，所以 $EF//BD$，可得 $EF\perp AC$，

又由 $PF\cap EF=F$，且 $PF\subset$ 平面 PEF，$EF\subset$ 平面 PEF，所以 $AC\perp$ 平面 PEF

又因为 $PE\subset$ 平面 PEF，所以 $PE\perp AC$ ......6 分

(2)设点 O 是 AC 与 BD 的交点，以 OA 所在直线为 x 轴，OB 所在直线为 y 轴，过点 O 垂直平面 ABC 的直线为 z 轴，建立空间直角坐标系，如图所示，

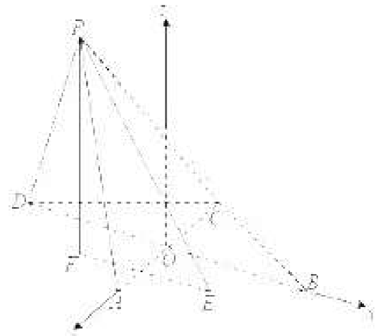
设 $OB=2b$，则 $A(2,0,0),C(-2,0,0),P\left(1,-b,\sqrt{3+3b^2}\right)$，

则 $\overrightarrow{CA}=(4,0,0),\overrightarrow{AP}=\left(-1,-b,\sqrt{3+3b^2}\right)$，设平面 PAC 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AP}=-x-by+\sqrt{3+3b^2}z=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CA}=4x=0\end{cases}$，取 $z=1$，可得 $x=0,y=\frac{\sqrt{3+3b^2}}{b}$，即 $\vec{m}=\left(0,\frac{\sqrt{3+3b^2}}{b},1\right)$，…8分

又因为平面 ABC 的一个法向量为 $\vec{n}=(0,0,1)$，由二面角 $P-AC-D$ 余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$，

则 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{\frac{3+3b^2}{b^2}+1}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，解得 $b=\sqrt{3}$，…10分则



$P\left(1,-\sqrt{3},2\sqrt{3}\right),E\left(1,\sqrt{3},0\right),\overrightarrow{PE}=\left(0,2\sqrt{3},-2\sqrt{3}\right)$，

则 $\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{PE},\vec{m}\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{PE}\cdot\vec{m}\right|}{\left|\overrightarrow{PE}\right|\cdot|\vec{m}|}=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

所以直线 PE 与平面 $ABCD$ 所成的角正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ……12分

20.已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $A\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，点 $F(1,0)$ 为椭圆 C 的右焦点.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)过点 $F(1,0)$ 作两条斜率都存在且不为 0 的互相垂直的直线 l_1，l_2，直线 l_1，l_2 与椭圆相交四点为 A_1、A_2、B_1、B_2，求四边形 $A_1A_2B_1B_2$ 的面积 S 的最小值.

【解析】(1)由题意，$\begin{cases}\frac{1}{a^2}+\frac{2}{4b^2}=1\\ c=1,\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=\sqrt{2}\\ b=1\\ c=1\end{cases}$，所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ ……5分

(2)因为直线 l_1，l_2 的斜率都存在且不为 0 时，设直线 l_1 的方程为 $x=ty+1(t\neq0)$

联立直线与椭圆 $\begin{cases}x=ty+1\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$ 得：$(t^2+2)y^2+2ty-1=0$，

设 $A_1(x_1,y_1)$，$B_1(x_2,y_2)$ 则 $y_1+y_2=-\frac{2t}{t^2+2}$，$y_1y_2=\frac{-1}{t^2+2}$，……7分

所以 $|A_1B_1|=\sqrt{1+t^2}|y_1-y_2|=\frac{2\sqrt{2}(t^2+1)}{t^2+2}$，同理 $|A_2B_2|=\frac{2\sqrt{2}\left(\left(\frac{1}{t}\right)^2+1\right)}{\left(\frac{1}{t}\right)^2+2}=\frac{2\sqrt{2}(t^2+1)}{1+2t^2}$

则S=8•$\dfrac{(t^2+1)^2}{(t^2+2)(2t^2-1)} \geq \dfrac{8(t^2+1)^2}{\left(\dfrac{t^2+2+2t^2+1}{2}\right)^2}=\dfrac{32}{9}$. 当$2t^2+1=t^2+2 \therefore t=\pm1$时取等号……12 分

21. 已知函数 $f(x)=xe^x-a\ln x-ax(a>0)$ （e 是自然对数的底数）有两个零点.

（1）求实数 a 的取值范围；来源：高三答案公众号

（2）若 $f(x)$ 的两个零点分别为 x_1，x_2，证明：$x_1x_2>\dfrac{e^2}{e^{x_1+x_2}}$.

【解析】（1）由题意可得，$h(x)=xe^x-a\ln x-ax=xe^x-a\ln(xe^x)=0$ 有 2 个零点，

令 $t(x)=xe^x$，则 $t'(x)=(x+1)e^x>0$ 在 $x>0$ 时恒成立，故 $t(x)=xe^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x)$ 有 2 个零点可转化为 $g(t)=t-a\ln t$ 有 2 个零点，

因为 $g'(t)=1-\dfrac{a}{t}$（$a>0$），由 $g'(t)>0$ 可得 $t>a$，$g(t)$ 单调递增；$g'(t)<0$ 可得 $0<t<a$，$g(t)$ 单调递减，$g(t)_{min}=g(a)=a-a\ln a$，……3 分

若 $0<a<e$，则 g（a）>0，此时 $g(t)>0$ 恒成立，没有零点，

若 $a=e$，则 g（a）$=0$，有一个零点，

若 $a>e$，则 g（a）<0，因为 g（1）$=1>0$，$g(e^a)=e^a-a^2>0$，

所以 $g(t)$ 在 $(1,e)$，(e,e^a) 上各有 1 个零点，符合题意，综上，a 的范围 $(e,+\infty)$；……5 分

（2）证明：要证 $x_1x_2>\dfrac{e^2}{e^{x_1+x_2}}$，只要证 $x_1x_2e^{x_1+x_2}>e^2$，即证 $\ln(x_1e^{x_1})+\ln(x_2e^{x_2})>2$，

由（1）可知，$t_1=x_1e^{x_1}$，$t_2=x_2e^{x_2}$，所以 $a(\ln t_2-\ln t_1)=t_2-t_1$，$a(\ln t_2+\ln t_1)=t_2+t_1$，

所以 $\ln t_1+\ln t_2=\dfrac{t_2+t_1}{t_2-t_1}(\ln t_2-\ln t_1)=\dfrac{(\frac{t_2}{t_1}+1)\ln\frac{t_2}{t_1}}{\frac{t_2}{t_1}-1}$，只要证 $\dfrac{(\frac{t_2}{t_1}+1)\ln\frac{t_2}{t_1}}{\frac{t_2}{t_1}-1}>2$，

设 $0<t_1<t_2$，令 $t=\dfrac{t_2}{t_1}$，（$t>1$），所以只要证 $\ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1}$ 即证 $\ln t+\dfrac{4}{t+1}-2>0$，

令 $h(t)=\ln t+\dfrac{4}{t+1}-2$，（$t>1$），则 $h'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，$\therefore h(t)>h$（1）$=0$，即

当 $t>1$ 时，$h(t)=\ln t+\dfrac{4}{t+1}-2>0$，所以 $\ln t_1+\ln t_2>2$ 即 $(x_1e^{x_1})\bullet(x_2e^{x_2})>e^2$，故 $x_1x_2>\dfrac{e^2}{e^{x_1+x_2}}$…12 分

选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分。

22.在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\sin\theta+\cos\theta \\ y=\sin 2\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数），以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，已知直线 l 方程为 $x-\sqrt{3}y=2\sqrt{3}$

（1）写出 l 的极坐标方程和曲线 C 的普通方程；

（2）点 A 为曲线 C 上一点，点 B 为直线 l 上点，求 $|AB|$ 的最小值.

【解析】（1）由 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$ 代入 $x-\sqrt{3}y=2\sqrt{3}$ 得 l 的极坐标方程为：

$\rho\cos\theta-\sqrt{3}\rho\sin\theta=2\sqrt{3}$ （即$\rho=\dfrac{2\sqrt{3}}{\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos(\theta+\dfrac{\pi}{3})}$） ……2 分

曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=\sin\theta+\cos\theta\\ y=\sin2\theta\end{cases}$ （θ为参数）化为普通方程

为$x^2=1+y\ (-1\le y\le 1)$…5 分（无范围得 4 分）

（2）设曲线上点 A(x_1,y_1)到直线的距离垂线段最短，由点到直线的距离公式

$|AB|=\dfrac{|x_1-\sqrt{3}y_1-2\sqrt{3}|}{2}=\dfrac{|x_1-\sqrt{3}(x_1^2-1)-2\sqrt{3}|}{2}=\dfrac{\left|\sqrt{3}(x_1-\dfrac{\sqrt{3}}{6})^2+\dfrac{11\sqrt{3}}{12}\right|}{2}$，

当$x_1=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$时，$|AB|_{min}=\dfrac{11\sqrt{3}}{24}$……10 分

23．**[选修 4—5：不等式选讲]**

已知函数$f(x)=|2x-1|+|x+a|$，$g(x)=x+2$．

（1）当$a=-1$时，求不等式$f(x)<g(x)$的解集；

（2）设$a>-\dfrac{1}{2}$，且当$x\in\left[-a,\dfrac{1}{2}\right)$，$f(x)\le g(x)$，求$a$的取值范围．

【解析】（1）当$a=-1$时，不等式$f(x)<g(x)$化为：$|2x-1|+|x-1|-x-2<0$，

当$x\le\dfrac{1}{2}$时，不等式化为$1-2x+1-x-x-2<0\therefore x>0$，此时不等式的解为：$\left\{x\middle|0<x\le\dfrac{1}{2}\right\}$；

当$\dfrac{1}{2}<x\le1$时，不等式化为$2x-1+1-x-x-2<0$，此时不等式的解为：$\left\{x\middle|\dfrac{1}{2}<x\le1\right\}$

当$x>1$时，不等式化为$2x-1+x-1-x-2<0\therefore x<2$，此时不等式的解为：$\{x|1<x<2\}$

综上，原不等式的解集为：$\{x|0<x<2\}$……5 分

（2）由$-a\le x<\dfrac{1}{2}$，得$-2a\le 2x<1$，$-2a-1\le 2x-1<0$，又$0\le x+a<\dfrac{1}{2}+a$

则$f(x)=-(2x-1)+x+a=-x+a+1$，$\therefore$不等式$f(x)\le g(x)$化为：$-x+a+1\le x+2$

得$a\le 2x+1$对$x\in\left[-a,\dfrac{1}{2}\right)$都成立$\therefore a\le-2a+1$，解得：$a\le\dfrac{1}{3}$，又$a>-\dfrac{1}{2}$，

故a的取值范围是$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right]$……10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线