2022～2023 学年河北省高三年级下学期 4 月份联合考试
数学参考答案

1. A　由题意知 $B=\{2,4,6,\cdots\}$，所以 $A\cap B=\{0,2,4\}$.

2. D　$z=\dfrac{(1-2i)^2}{1+i}=\dfrac{(-3-4i)(1-i)}{2}=\dfrac{-3+3i-4i+4i^2}{2}=-\dfrac{7}{2}-\dfrac{1}{2}i$，故 $a+b=-4$.

3. D　以拱顶为坐标原点，建立直角坐标系（图略），可设拱桥所在抛物线的方程为 $x^2=-2py$ $(p>0)$，则 $16=4p$，得 $p=4$，则抛物线的方程为 $x^2=-8y$. 当 $x=5$ 时，$y=-\dfrac{25}{8}$，故当水面宽度为 10 米时，拱顶与水面之间的距离为 $\dfrac{25}{8}$ 米.

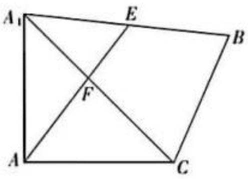
4. B　$\sin(2x-\dfrac{\pi}{4})=\sin(2x-\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2})=\cos(2x-\dfrac{3\pi}{4})$，故为了得到 $f(x)$ 的图象，只需将 $g(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{3\pi}{8}$ 个单位长度.

5. B　因为 $\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=1$，所以 $a_{n+1}=\dfrac{1+a_n}{1-a_n}$. 因为 $a_1=2$，所以 $a_2=\dfrac{1+2}{1-2}=-3$，$a_3=\dfrac{1-3}{1+3}=-\dfrac{1}{2}$，$a_4=\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$，$a_5=\dfrac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2$，…，所以 $\{a_n\}$ 是周期为 4 的数列，故 $a_{2023}=a_3=-\dfrac{1}{2}$.

6. C　因为 $f(x)=x^3+\dfrac{f'(2)}{5}x^2-9x$，所以 $f'(x)=3x^2+\dfrac{2f'(2)}{5}x-9$，则 $f'(2)=12+\dfrac{4}{5}f'(2)-9$，解得 $f'(2)=15$，故 $f(x)=x^3+3x^2-9x$，$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$. 当 $x<-3$ 或 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，当 $-3<x<1$ 时，$f'(x)<0$，故当 $x=-3$ 时，$f(x)$ 取得极大值 27.

7. A　$f(x)=\log_a[k(x+1)^2]=\log_ak+2\log_a(x+1)$，由 $f(2)=2$，$f(8)=3$，得 $\log_ak+2\log_a(2+1)=2$，$\log_ak+2\log_a(8+1)=3$，两式相减得 $\log_a9=1$，则 $a=9$，所以 $\log_ak+2=3$，$k=9$. 该住房装修完成后要达到安全入住的标准，则 $0.48-0.1f(x)\leqslant 0.08$，则 $f(x)\geqslant 4$，即 $1+2\log_9(x+1)\geqslant 4$，解得 $x\geqslant 26$，故至少需要通风 26 周.

8. C　如图，将平面 A_1BC 与平面 A_1AC 翻折到同一平面上，连接 AE，记 $AE\cap A_1C=F$. 由题意可知 $A_1A=AC=BC=2$，$A_1C=A_1B=2\sqrt{2}$，则 $\angle AA_1C=45°$，$\cos\angle BA_1C=\dfrac{8+8-4}{2\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{3}{4}$，从而 $\sin\angle BA_1C=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，故 $\cos\angle AA_1B=\cos(\angle AA_1C+\angle BA_1C)=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{14}}{8}$. 因为 E 是



A_1B 的中点，所以 $A_1E=\sqrt{2}$，由余弦定理可得 $AE^2=4+2-2\times2\times\sqrt{2}\times\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{14}}{8}=3+\sqrt{7}$.

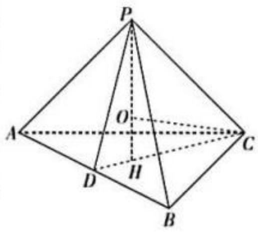
因为 D 在 A_1C 上，所以 $AD+DE\geqslant AE$，则 $(AD+DE)^2\geqslant 3+\sqrt{7}$.

9. ABC　由图可知，猪肉、鸡蛋、鲜果、禽肉、粮食、食用油这 6 种食品中，粮食价格同比涨幅最小，所以 A 错误. $34.4\%<5\times8.5\%$，所以 B 错误. 去年 11 月鲜菜价格要比今年 11 月高，所

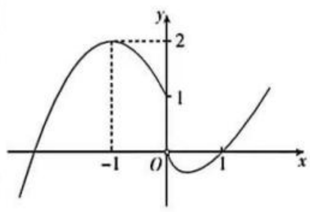
以C错误. 因为$\frac{1}{7}\times(-21.2\%+7.6\%+3\%+8.5\%+9.6\%+10.4\%+34.4\%)>\frac{1}{7}\times(-22\%+7\%+3\%+8\%+9\%+10\%+34\%)=\frac{1}{7}\times49\%=7\%$,所以D正确.

10. BD 因为圆O的半径为3,$|OA|=2$,所以$2\sqrt{3^2-2^2}\leqslant|MN|\leqslant6$,即$2\sqrt{5}\leqslant|MN|\leqslant6$,故A不正确. 若$|MN|$的长为整数,则$|MN|=5$或$|MN|=6$,且满足$|MN|=5$的直线$l$有2条,满足$|MN|=6$的直线有1条,B正确. $\triangle MON$的面积$S=\frac{1}{2}|OM||ON|\sin\angle MON=\frac{9}{2}\sin\angle MON$,若$S=\frac{9}{2}$,则$\sin\angle MON=1$,则$\angle MON=\frac{\pi}{2}$,则$O$到直线$l$的距离为$\frac{3\sqrt{2}}{2}>2$,不符合条件,C不正确. 若$S=\frac{9\sqrt{3}}{4}$,则$\sin\angle MON=\frac{\sqrt{3}}{2}$,则$\angle MON=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$. 若$\angle MON=\frac{\pi}{3}$,则$O$到直线$l$的距离为$\frac{3\sqrt{3}}{2}>2$,不符合条件. 若$\angle MON=\frac{2\pi}{3}$,则$O$到直线$l$的距离为$\frac{3}{2}<2$,符合条件,D正确.

11. ABD 如图,取棱AB的中点D,连接CD、PD,易证$AB\perp CD$,$AB\perp PD$. 因为$PD,CD\subset$平面PCD,且$PD\cap CD=D$,所以$AB\perp$平面PCD,则$AB\perp PC$,故A正确. 作$PH\perp$平面ABC,垂足为H,则$PH=\sqrt{6}$. 由正三棱柱的性质可知H在CD上,且$CH=2DH$. 因为$AB=3$,所以$CD=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,则$CH=\sqrt{3}$. 因为$PH=\sqrt{6}$,所以$PC=\sqrt{3+6}=3$,则三棱锥$P-ABC$的表面积$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\times9\times4=9\sqrt{3}$,故B正确. 设三棱锥$P-ABC$的外接球的球心为$O$,半径为$R$,则$O$在$PH$上,连接$OC$,则$R^2=CH^2+OH^2=(PH-OH)^2$,即$R^2=3+OH^2=(\sqrt{6}-OH)^2$,解得$R^2=\frac{27}{8}$,则三棱锥$P-ABC$的外接球的表面积为$4\pi R^2=\frac{27\pi}{2}$,故C错误. 设三棱锥$P-ABC$的内切球的半径为$r$,则$V_{P-ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times9\times\sqrt{6}=\frac{1}{3}\times9\sqrt{3}r$,解得$r=\frac{\sqrt{6}}{4}$,从而三棱锥$P-ABC$的内切球的表面积为$4\pi r^2=\frac{3\pi}{2}$,故D正确.



12. ACD 令$g(x)=[f(x)]^2-(a-1)f(x)-a=0$,即$[f(x)-a][f(x)+1]=0$,解得$f(x)=-1$或$f(x)=a$. 当$x>0$时,$f'(x)=\ln x+1$. 由$f'(x)>0$,得$x>\frac{1}{e}$,由$f'(x)<0$,得$0<x<\frac{1}{e}$,则$f(x)$在$(0,\frac{1}{e})$上单调递减,在$(\frac{1}{e},+\infty)$上单调递增,故$f(x)$的大致图象如图所示. 由图可知$f(x)=-1$有且仅有1个实根. 当$a=-1$时,$g(x)$恰有1个零点,故A错误. 当$1\leqslant a<2$时,$f(x)=a$有3个实根,则$g(x)$恰有4个零点,故B正确. 由$g(x)$恰有3个零点,得$f(x)=a$恰有2个实根,则$a=2$或$0\leqslant a<1$或$a=-\frac{1}{e}$,则C错误. 由$g(x)$恰有2个零点,得$f(x)=a$恰有1个实根,且$a\neq-1$,则$a<-1$或$-1<a<$



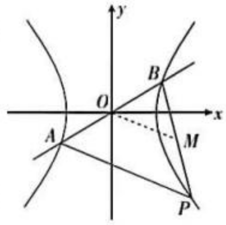
$-\frac{1}{e}$或$a>2$,则D错误.

13. $\sqrt{13}$　因为$\boldsymbol{m}=(2,-3)$,$\boldsymbol{n}=(1,1)$,所以$\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}=(3,-2)$,则$|\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}|=\sqrt{13}$.

14. $2\sin 3$;$0.1^{-0.2}$　因为$1<4^{0.2}<10^{0.2}$,$0.1^{-0.2}=10^{0.2}>10^{0.15}>1$,$2\sin 3\approx 2\sin 171.9^{\circ}<2\sin 150^{\circ}=1$,所以最小的是$2\sin 3$,最大的是$0.1^{-0.2}$.

15. 2940　人数分配有2,2,4和3,3,2两种情形,所以共有$(\frac{C_8^4C_4^2C_2^2}{A_2^2}+\frac{C_8^3C_5^3C_2^2}{A_2^2})A_3^3=490\times 6=2940$种安排方案.

16. $\frac{\sqrt{15}}{3}$　如图,取PB的中点M,连接OM,则$OM/\!/AP$,所以$\tan\angle OMB=\tan\angle APB=\frac{5}{3}$,设直线$PB$的倾斜角为$\alpha$,则$\tan\alpha=-3$,所以$\tan\angle xOM=-\tan(\angle OMB+\alpha)=-\frac{\frac{5}{3}-3}{1+5}=\frac{2}{9}$,所以直线$OM$的斜率为$-\frac{2}{9}$.设$A(x_1,y_1)$,$P(x_2,y_2)$,则$M(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$.由$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$得到$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{b^2}{a^2}$,所以$\frac{b^2}{a^2}=-3\times(-\frac{2}{9})=\frac{2}{3}$,所以$e^2=1+\frac{b^2}{a^2}=\frac{5}{3}$,则$e=\frac{\sqrt{15}}{3}$.



17. 解:(1)因为$a\sin B=b\sin(A+\frac{\pi}{3})$,所以$\sin A\sin B=\sin B\sin(A+\frac{\pi}{3})$. ………………… 1分

又$\sin B\neq 0$,所以$\sin A=\sin(A+\frac{\pi}{3})$, ………………… 2分

所以$\sin A=\sin A\cos\frac{\pi}{3}+\cos A\sin\frac{\pi}{3}$, ………………… 3分

即$\sin A=\sqrt{3}\cos A$,所以$\tan A=\sqrt{3}$, ………………… 4分

又$0<A<\pi$,所以$A=\frac{\pi}{3}$. ………………… 5分

(2)因为$\cos B=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以$\sin B=\frac{\sqrt{6}}{3}$. ………………… 7分

$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{3+\sqrt{6}}{6}$. ………… 10分

18. 解:(1)由题意可得投到该杂志的1篇稿件初审直接被录用的概率$P_1=(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{9}$; … 2分

投到该杂志的1篇稿件初审没有被录用,复审被录用的概率$P_2=C_2^1\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{9}$.

………………… 4分

故投到该杂志的1篇稿件被录用的概率$P=P_1+P_2=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$. ………………… 5分

(2)由题意可知X的所有可能取值为0,1,2,3,且$X\sim B(3,\frac{2}{9})$, ………………… 6分

$P(X=0)=C_3^0\times(\frac{7}{9})^3=\frac{343}{729}$，$P(X=1)=C_3^1\times\frac{2}{9}\times(\frac{7}{9})^2=\frac{294}{729}=\frac{98}{243}$，…………………… 8 分

$P(X=2)=C_3^2\times(\frac{2}{9})^2\times\frac{7}{9}=\frac{84}{729}=\frac{28}{243}$，$P(X=3)=C_3^3\times(\frac{2}{9})^3=\frac{8}{729}$，…………………… 10 分

则 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{343}{729}$	$\frac{98}{243}$	$\frac{28}{243}$	$\frac{8}{729}$

…………………………………………………………………………………… 11 分

故 $E(X)=3\times\frac{2}{9}=\frac{2}{3}$. …………………………………………………… 12 分

19. 解：(1)当 $n=1$ 时，由 $S_1=2a_1-4$，得 $a_1=4$， ………………………………… 1 分

当 $n\geqslant2$ 时，$S_{n-1}=2a_{n-1}-4$，…………………………………………………… 2 分

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$，所以 $a_n=2a_{n-1}$， ……………………………… 3 分

所以$\{a_n\}$是首项为 4，公比为 2 的等比数列，故 $a_n=2^{n+1}$. ……………………………… 5 分

(2)由(1)知 $S_n=\frac{4(1-2^n)}{1-2}=2^{n+2}-4$， ………………………………………… 6 分

所以 $nS_n=n\times2^{n+2}-4n$，所以 $T_n=1\times2^3+2\times2^4+\cdots+n\times2^{n+2}-4(1+2+\cdots+n)$，………

……………………………………………………………………………………… 7 分

令 $M=1\times2^3+2\times2^4+\cdots+n\times2^{n+2}$，则 $2M=1\times2^4+2\times2^5+\cdots+n\times2^{n+3}$， ………… 8 分

所以 $-M=2^3+2^4+2^5+\cdots+2^{n+2}-n\times2^{n+3}=\frac{2^3(1-2^n)}{1-2}-n\times2^{n+3}=(1-n)\times2^{n+3}-8$，

所以 $M=(n-1)\times2^{n+3}+8$. ……………………………………………………………… 10 分

因为 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$， ………………………………………………………… 11 分

所以 $T_n=(n-1)\times2^{n+3}+8-2n(n+1)$. ……………………………………………… 12 分

20. (1)证明：连接 BC_1，交 B_1C 于 O，连接 AO. ……………………………………… 1 分

因为侧面 BB_1C_1C 为菱形，所以 $B_1C\perp BC_1$. ……………………………………… 2 分

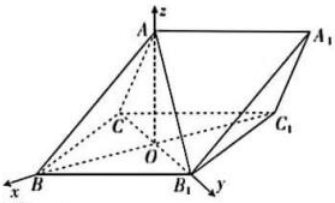
因为 $AC=AB_1$，O 为 B_1C 的中点，所以 $AO\perp B_1C$. ……………………………… 3 分

因为 $AO\cap BC_1=O$，且 $AO,BC_1\subset$平面 AOB，所以 $B_1C\perp$平面 AOB. ………………… 4 分

因为 $AB\subset$平面 AOB，所以 $AB\perp B_1C$. ……………………………………………… 5 分

(2)解：设 $AB=BC=2$，因为$\angle CBB_1=\frac{\pi}{3}$，所以 $B_1C=2$，$OB=\sqrt{3}$. ……………………… 6 分

因为 $AC\perp AB_1$，所以 $AO=1$.



因为 $AO^2+OB^2=AB^2$，所以 $AO\perp OB$，所以 OA,OB,OB_1 两两垂直. …………………………………… 7 分

以 O 为坐标原点，分别以$\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB_1},\overrightarrow{OA}$的方向为 x,y,z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系，则 $B_1(0,1,0)$，$C_1(-\sqrt{3},0,0)$，$A_1(-\sqrt{3},1,1)$，所以$\overrightarrow{B_1C_1}=(-\sqrt{3},-1,0)$，$\overrightarrow{C_1A_1}=(0,1,1)$. ………… 8 分

设平面 $A_1B_1C_1$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}=-\sqrt{3}x-y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{C_1A_1}=y+z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$. ························ 9 分

取平面 AB_1C 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$， ························ 10 分

因为 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{1}{\sqrt{7}\times1}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$， ························ 11 分

所以平面 AB_1C 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成锐二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. ························ 12 分

21. 解：(1)设椭圆 E 的方程为 $mx^2+ny^2=1(m>0,n>0)$， ························ 1 分

则 $\begin{cases}4m=1,\\ m+6n=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=\dfrac{1}{4},\\ n=\dfrac{1}{8},\end{cases}$ ························ 3 分

故椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{8}=1$. ························ 4 分

(2)依题可设直线 l 的方程为 $x=my-1$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$M(x_0,y_0)$，

联立方程组 $\begin{cases}x=my-1,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{8}=1,\end{cases}$ 整理得 $(2m^2+1)y^2-4my-6=0$， ························ 5 分

则 $y_1+y_2=\dfrac{4m}{2m^2+1}$，$y_1y_2=\dfrac{-6}{2m^2+1}$. ························ 6 分

直线 AP 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线 BQ 的方程为 $y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，

联立方程组 $\begin{cases}y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2),\\ y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2),\end{cases}$ 得 $x_0=\dfrac{2y_1x_2-4y_1+2x_1y_2+4y_2}{(x_1+2)y_2-(x_2-2)y_1}=\dfrac{4my_1y_2-6y_1+2y_2}{3y_1+y_2}$. ························ 8 分

由 $y_1+y_2=\dfrac{4m}{2m^2+1}$，$y_1y_2=\dfrac{-6}{2m^2+1}$，得 $2my_1y_2=-3(y_1+y_2)$， ························ 10 分

所以 $x_0=\dfrac{-6(y_1+y_2)-6y_1+2y_2}{y_2+3y_1}=-4$， ························ 11 分

故点 M 在定直线 $x=-4$ 上. ························ 12 分

22. 解：(1) $f'(x)=\dfrac{a}{x}-x=\dfrac{-x^2+a}{x}$. ························ 1 分

当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减； ························ 2 分

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\sqrt{a}$，当 $x\in(0,\sqrt{a})$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(\sqrt{a},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$， ························ 3 分

所以 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{a})$ 上单调递增，在 $(\sqrt{a},+\infty)$ 上单调递减. ························ 4 分

(2)①由(1)知，当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，不可能有两个零点， ························ 5 分

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\sqrt{a})$ 上单调递增，在 $(\sqrt{a},+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x)_{\max}=f(\sqrt{a})=a\ln\sqrt{a}-\frac{1}{2}a>0$，所以 $a>e$，

即实数 a 的取值范围是 $(e,+\infty)$. …………………………………………………… 6 分

②曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_1,0)$ 和 $(x_2,0)$ 处的切线分别是 $l_1:y=(\frac{a}{x_1}-x_1)(x-x_1)$，$l_2:y=(\frac{a}{x_2}-x_2)(x-x_2)$，

联立两条切线方程得 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{\frac{a}{x_1x_2}+1}$，所以 $\dfrac{x_1+x_2}{x_0}=\dfrac{a}{x_1x_2}+1$. ……………………………… 7 分

因为 $\begin{cases}a\ln x_1-\frac{1}{2}x_1^2=0,\\ a\ln x_2-\frac{1}{2}x_2^2=0,\end{cases}$ 所以 $a=\dfrac{\frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2)}{\ln x_1-\ln x_2}$. ………………………………………… 8 分

要证 $x_1+x_2>2x_0$，只需证 $\dfrac{x_1+x_2}{x_0}>2$，即证 $\dfrac{a}{x_1x_2}>1$，只要证 $\dfrac{\frac{1}{2}(\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1})}{\ln\frac{x_1}{x_2}}>1$. ………… 9 分

令 $t=\frac{x_1}{x_2}<1$，$h(t)=\ln t-\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})(0<t<1)$，………………………………………… 10 分

则 $h'(t)=-\dfrac{(t-1)^2}{2t^2}<0$，所以 $h(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，所以 $h(t)>h(1)=0$，……… 11 分

所以 $\ln t>\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})(0<t<1)$，所以 $x_1+x_2>2x_0$. …………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。