湘豫名校2020届高三年级12月份联考

数学(文科)参考答案

一、选择题(本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.)

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答　案	A	C	B	C	D	A	C	D	C	B	C	D

1. A 【解析】因为 $M=\left\{y\mid y=\dfrac{6}{x+3},x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\right\}$,所以当 $x=0$ 时,$y=2\in\mathbf{N}$;当 $x=1$ 时,$y=\dfrac{3}{2}\notin\mathbf{N}$;当 $x=2$ 时,$y=\dfrac{6}{5}\notin\mathbf{N}$;当 $x=3$ 时,$y=1\in\mathbf{N}$;当 $x\geqslant4$ 时,$0<y<1$,$\therefore y\notin\mathbf{N}$. 综上 $M=\left\{y\mid y=\dfrac{6}{x+3},x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\right\}=\{1,2\}$,元素个数是2个.故选A.

2. C 【解析】$z=\mathrm{i}^{2019}(-1-2\mathrm{i})=-\mathrm{i}(-1-2\mathrm{i})=-2+\mathrm{i}$,$\overline{z}=-2-\mathrm{i}$,故选C.

3. B 【解析】$\because\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BD}$,$\therefore D$ 为 BC 边上的中点,$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})$,$\therefore\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2)=\dfrac{1}{2}(1^2-2^2)=-\dfrac{3}{2}$,故选B.

4. C 【解析】$\because\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)+\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{2}$,$\therefore$ 由诱导公式知 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left[\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)\right]=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,故选C.

5. D 【解析】$a=(\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}=3^{\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}}=3^{\frac{1}{3}}>3^0=1$,且 $3^{\frac{1}{3}}<8^{\frac{1}{3}}=2^{3\times\frac{1}{3}}=2$. $\therefore 1<a<2$. $b=\log_3 \mathrm{e}<\log_3 3=1$,$c=\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}=2^{-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)}=2$,故 $c>a>b$. 选D.

6. A 【解析】由题意得:$\overline{x}=\dfrac{12+23+31}{3}=22$,$\overline{y}=\dfrac{15+30+45}{3}=30$,

回归直线过样本中心点(22,30),故有 $30=22\times1.6+\hat{a}$,$\therefore\hat{a}=-5.2$,

故 $\hat{y}=1.6x-5.2$,当 $x=100$ 时,$\hat{y}=154.8\approx155$. 故选A.

7. C 【解析】因为阳数:1,3,5,7,9,阴数:2,4,6,8,10,所以从阳数和阴数中各取一数有:$5\times5=25$ 种,满足差的绝对值为3的有:(1,4),(3,6),(5,2),(5,8),(7,10),(7,4),(9,6)共7种,则 $P=\dfrac{7}{25}$. 故选C.

8. D 【解析】$\because f(x)=\dfrac{1+x^4}{x^2}+1=\dfrac{1}{x^2}+x^2+1\geqslant2\sqrt{\dfrac{1}{x^2}\cdot x^2}+1=3$,当且仅当 $\dfrac{1}{x^2}=x^2$,即 $x=\pm1$ 时,等号成立,$\therefore a=3$. 则 $g(x)=\sin\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{\pi}{3}\right)$. 将函数 $g(x)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位长度,得到函数 $h(x)$ 的图象,则 $h(x)=\sin\left[\dfrac{1}{3}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{\pi}{3}\right]=\sin\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\dfrac{1}{3}x$.

对于A选项,$\because h(-x)=\cos\left(-\dfrac{1}{3}x\right)=\cos\dfrac{1}{3}x=h(x)$,$\therefore$ 函数 $h(x)$ 是偶函数,A选项错误;

对于B选项,$\because-\pi\leqslant x\leqslant\pi$,$\therefore-\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{1}{3}x\leqslant\dfrac{\pi}{3}$,$\therefore$ 函数 $h(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上不单调,B选项错误;

对于C选项，$\because h(2\pi)=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}\neq 0$，$\therefore$函数$h(x)$图象不关于$(2\pi,0)$对称，C选项错误；

对于D选项，$\because h(3\pi)=\cos\pi=-1$，$\therefore$函数$h(x)$图象关于直线$x=3\pi$对称，D选项正确. 故选D.

9. C 【解析】第一次循环：$S=1$，不满足条件，$i=2$；

第二次循环：$S=3$，不满足条件，$i=3$；

第三次循环：$S=6$，不满足条件，$i=4$；

第四次循环：$S=10$，不满足条件，$i=5$；

第五次循环：$S=15$，满足条件，输出的值为5.

所以判断框中的条件可填写“$S\geqslant 15$?”. 故选C.

10. B 【解析】设F为抛物线$y^2=4x$的焦点，则$F(1,0)$，抛物线$y^2=4x$准线方程为$x=-1$，因此P到双曲线C的上焦点$F_1(0,c)$的距离与到直线$x=-1$的距离之和等于PF_1+PF，因为$PF_1+PF\geqslant F_1F$，所以$F_1F=2\sqrt{2}$，即$\sqrt{1+c^2}=2\sqrt{2}$，$\therefore c=\sqrt{7}$，又$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{2}$，$\therefore a^2=4,b^2=3$，即双曲线的方程为$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{3}=1$. 故选B.

11. C 【解析】设$y=f(x)=\sin x$，$x_1=0$，$x_2=\frac{\pi}{2}$，$x_3=\pi$，则有$y_1=0$，$y_2=1$，$y_3=0$，

则$k_1=\frac{1-0}{\frac{\pi}{2}-0}=\frac{2}{\pi}$，$k=\frac{0-1}{\pi-\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}$，$k_2=-\frac{4}{\pi^2}$，

由$f(x)\approx y_1+k_1(x-x_1)+k_2(x-x_1)(x-x_2)=-\frac{4}{\pi^2}x^2+\frac{4}{\pi}x$，

可得$\sin x\approx-\frac{4}{\pi^2}x^2+\frac{4}{\pi}x$，$\sin\frac{\pi}{5}\approx-\frac{4}{\pi^2}\times\left(\frac{\pi}{5}\right)^2+\frac{4}{\pi}\times\frac{\pi}{5}=\frac{16}{25}$，故选C.

12. D 【解析】设$g(x)=f(x)-x^2$，$g'(x)=f'(x)-2x<0$，$\therefore g(x)$是单调递减函数，不等式$f(\sin\alpha)+\frac{1}{2}\cos 2\alpha-\frac{3}{4}>0$变形为$f(\sin\alpha)+\frac{1}{2}(1-2\sin^2\alpha)>\frac{3}{4}$，即为$f(\sin\alpha)-\sin^2\alpha>\frac{1}{4}$，

$\because g\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，则有$g(\sin\alpha)>g\left(\frac{1}{2}\right)$，又$\because g(x)$是单调递减函数，$\therefore\sin\alpha<\frac{1}{2}$.

$\because\alpha\in[0,2\pi]$，$\therefore 0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}<\alpha\leqslant 2\pi$，即$\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6},2\pi\right]$，故选D.

二、填空题(本题共4小题，每小题5分，共20分.)

13. 2 【解析】因为$f(x)=\begin{cases}x^2-2x,x\leqslant -1,\\ \log_2(x+1),x>-1,\end{cases}$所以$f(-1)=(-1)^2-2\times(-1)=3$，$f(f(-1))=f(3)=\log_2(3+1)=2$.

14. $(-3,0]$ 【解析】此题等价为全称命题：“$\forall x\in\mathbf{R}$，$4mx^2+4mx-3<0$成立”是真命题.

当$m=0$时，原不等式化为“$-3<0$”，$\forall x\in\mathbf{R}$显然成立；

当$m\neq 0$时，只需$\begin{cases}m<0,\\ \Delta<0,\end{cases}$即$\begin{cases}m<0,\\ m^2+3m<0,\end{cases}$解得$-3<m<0$. 综合①②，得$-3<m\leqslant 0$. 故答案为：$(-3,0]$.

15. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】由正弦定理可知，$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\sin C\cos A$，易得$c\cos A=c\sin A$，$A=\frac{\pi}{4}$，又$a,b,c$成等比数列，所以$\frac{b}{c}=\frac{a}{b}$，$\frac{b\sin B}{c}=\frac{a\sin B}{b}=\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 则$\frac{b\sin B}{c}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

16. 2 【解析】设四面体 $ABCD$ 所在的长方体棱长分别为 a,b,c，则 $\begin{cases}a^2+b^2=5,\\a^2+c^2=13,\\b^2+c^2=10,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=1,\\c=3,\end{cases}$ 所以四面体的体积 $V=abc-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}abc\times4=\frac{1}{3}abc=2$，故答案为 2.

三、解答题（共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.）

17.【解析】(1) 因为 $a_3+a_4=2\times6a_2$，所以 $a_1q^2+a_1q^3=12a_1q$，又 $q>0$，

则 $q^2+q-12=0$，即 $q=3$ 或 $q=-4$（舍）. …… 3 分

所以 $S_4=\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=\frac{a_1(1-81)}{1-3}=120$，解得 $a_1=3$，

所以 $a_n=3^n$. …… 6 分

(2) 因为 $b_n=\frac{1}{(\log_3 a_n)\cdot(\log_3 a_{n+1})}$，所以 $b_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$， …… 9 分

所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$. …… 12 分

18.【解析】(1) ∵志愿者年龄在 $[40,45)$ 内的人数为 15 人，

∴志愿者年龄在 $[40,45)$ 内的频率为：$\frac{15}{100}=0.15$； …… 1 分

由频率分布直方图得：$(0.020+2m+4n+0.010)\times5+0.15=1$，

化简得：$m+2n=0.07$. ① …… 2 分

由中位数为 34 可得：$0.020\times5+2m\times5+2n\times(34-30)=0.5$，

化简得：$5m+4n=0.2$， ② …… 3 分

由①②解得：$m=0.020$，$n=0.025$. …… 4 分

志愿者的平均年龄为 $(22.5\times0.020+27.5\times0.040+32.5\times0.050+37.5\times0.050+42.5\times0.030+47.5\times0.010)\times5=34$（岁）. …… 6 分

(2) 根据题意得到列联表：

	男性	女性	总计
现场报名	19	31	50
网络报名	31	19	50
总计	50	50	100

…… 8 分

∴$K^2=\frac{100\times(19\times19-31\times31)^2}{50\times50\times50\times50}=5.76<10.828$， …… 10 分

∴不能在犯错误的概率不超过 0.001 的前提下，认为选择哪种报名方式与性别有关系. …… 12 分

19.【解析】(1) 证明：因为 O 为等边 $\triangle PAD$ 边 AD 的中点，所以 $AD\perp PO$， …… 1 分

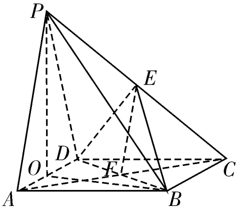
又因为在菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=60^\circ$，所以 $\triangle ABD$ 为等边三角形，

又 O 为 AD 的中点，

所以 $AD\perp BO$. …… 3 分

而 $PO\cap BO=O$，所以 $AD\perp$ 平面 POB， …… 4 分

又 $AD\subset$ 平面 PAD，所以平面 $PAD\perp$ 平面 POB. …… 5 分



(2)解:连结 AC 交 BD 于点 F,连结 EF,如图所示.

因为底面 $ABCD$ 为菱形,E 为 PC 中点,F 为 AC 中点,所以 $EF/\!/PA$, …… 6 分

又 $EF\subset$平面 BDE,所以 $PA/\!/$平面 BDE. …………………………… 7 分

故 P 点到平面 BDE 的距离等于 A 点到平面 BDE 的距离,

即 $V_{P-BDE}=V_{A-BDE}=V_{E-ABD}$. …………………………………………… 8 分

由(1)知 $AD\perp PO$,平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$,所以 $PO\perp$底面 $ABCD$,

因为等边$\triangle PAD$ 的边长为 2,所以 $PO=\sqrt{3}$. …………………………………………… 9 分

又因为 E 为 PC 中点,所以点 E 到底面 $ABCD$ 的距离为$\frac{1}{2}PO=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ………………… 10 分

易知$\triangle ABD$ 为边长为 2 的等边三角形,所以三棱锥 $E-ABD$ 的体积为:

$V_{E-ABD}=\frac{1}{3}\cdot h\cdot S_{\triangle ABD}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\frac{1}{2}$. ………………………………………… 11 分

故所求四面体 $P-BDE$ 的体积为$\frac{1}{2}$. ……………………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)由题意得 $b=1$,$a=\frac{|0+0-\sqrt{6}|}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$,则 $a^2=3$. ………………………………… 2 分

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$. ……………………………………………………………… 4 分

(2)设直线 l 的方程为 $y=x+m$,$P(3,y_P)$,

由$\begin{cases}\frac{x^2}{3}+y^2=1,\\ y=x+m\end{cases}$得 $4x^2+6mx+3m^2-3=0$. ………………………………………… 5 分

令 $\Delta=36m^2-48m^2+48>0$,得 $-2<m<2$, ……………………………………………… 6 分

则 $x_1+x_2=-\frac{3}{2}m$,$x_1x_2=\frac{3}{4}(m^2-1)$. …………………………………………………… 7 分

因为$\triangle PMN$ 是以$\angle PMN$ 为顶角的等腰直角三角形,

所以 NP 平行于 x 轴.过 M 作 NP 的垂线,则垂足 Q 为线段 NP 的中点. ……………… 8 分

设点 Q 的坐标为(x_Q,y_Q),则 $x_Q=x_M=x_1=\frac{x_2+3}{2}$. …………………………………… 9 分

由方程组$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{3}{2}m,\\ x_1x_2=\frac{3}{4}(m^2-1),\\ x_1=\frac{x_2+3}{2},\end{cases}$ …………………………………………………… 10 分

解得 $m^2+2m+1=0$,即 $m=-1$. …………………………………………………………… 11 分

而 $m=-1\in(-2,2)$,所以直线 l 的方程为 $y=x-1$. …………………………………… 12 分

21.【解析】(1)当 $x\geqslant 0$ 时,$f'(x)=e^x+\cos x\geqslant e^0+\cos x=1+\cos x\geqslant 0$.

故 $f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增, ……………………………………………………………… 2 分

$\therefore$不等式等价于$\begin{cases}2x^2-1\geqslant 0,\\ x\geqslant 0,\\ 2x^2-1>x,\end{cases}$ ………………………………………………………… 5 分

解得 $x>1$.

故关于 x 的不等式的解集为 $(1,+\infty)$. ………………………………………………………………………… 6 分

(2)证明:由(1)知函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,且 $f(x)_{\min}=f(0)=1>0$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上没有零点. ………………………………………………………………………… 7 分

设 $g(x)=f'(x)=e^x+\cos x$, $g'(x)=e^x-\sin x$,

当 $x\in[-\pi,0)$ 时, $\sin x\leqslant 0$, $e^x>0$, $\therefore g'(x)>0$. $\therefore g(x)$ 在 $[-\pi,0)$ 上单调递增. ……………………… 8 分

易知 $f'(x)$ 在 $[-\pi,0)$ 上单调递增,且 $f'(-\pi)=e^{-\pi}-1<e^0-1=0$, $f'(0)=2>0$. …………………… 9 分

故 $\exists x_0\in[-\pi,0)$,使得 $f'(x_0)=0$,所以 $f(x)$ 在 $[-\pi,x_0]$ 上单调递减,在 $[x_0,0)$ 上单调递增. ……… 10 分

又因为 $f(-\pi)=e^{-\pi}>0$, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}-1<0$, $f(0)=1>0$. ………………………………………… 11 分

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 上分别有一个零点.

综上所述: $f(x)$ 有且仅有 2 个零点. ………………………………………………………………………………… 12 分

22.**【解析】**(1)由 $\begin{cases}x=1+\sqrt{3}\cos\alpha,\\ y=\sqrt{3}\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数)得曲线 C 的普通方程为 $(x-1)^2+y^2=3$. …………………… 2 分

由直线 l 的方程为: $x+\sqrt{3}y-2=0$,得极坐标方程为 $\sqrt{3}\rho\sin\theta+\rho\cos\theta-2=0$,即 $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1$. …… 4 分

(2)曲线 C 的极坐标方程是 $\rho^2-2\rho\cos\theta-2=0$, ……………………………………………………………… 6 分

把 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 代入曲线 C 的极坐标方程得 $\rho^2-\rho-2=0$,解之得 $\rho_M=2$ 或 $\rho_M=-1$(舍). …………………… 8 分

把 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 代入直线 l 的极坐标方程得 $\rho_N=1$, …………………………………………………………………… 9 分

所以 $MN=|\rho_M-\rho_N|=|2-1|=1$. ………………………………………………………………………………… 10 分

23.**【解析】**(1)由 $|x-m|+2x\leqslant 0$,得 $\begin{cases}x\geqslant m,\\ x-m+2x\leqslant 0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<m,\\ m-x+2x\leqslant 0,\end{cases}$ …………………………………… 2 分

化简得: $\begin{cases}x\geqslant m,\\ x\leqslant\frac{m}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<m,\\ x\leqslant -m,\end{cases}$ 由于 $m>0$,所以不等式组的解集为 $(-\infty,-m]$. …………………… 4 分

由题设可得 $-m=-1$,故 $m=1$. …………………………………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)可知, $a+b+c=1$,又由均值不等式有: $\frac{b^2}{a}+a\geqslant 2b$, $\frac{c^2}{b}+b\geqslant 2c$, $\frac{a^2}{c}+c\geqslant 2a$, ………………… 8 分

三式相加可得: $\frac{b^2}{a}+a+\frac{c^2}{b}+b+\frac{a^2}{c}+c\geqslant 2b+2c+2a$,

所以 $\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}\geqslant a+b+c=1$. ………………………………………………………………………… 10 分