绝密★启用前

2022—2023 学年第一学期高三期中联考

数学文科试卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{x|x^2-3x<0,x\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{x|x=ab,a\in A,b\in B\}$，则集合 $B\cup C=$

A. $\{-2,2\}$　　B. $\{0,1,2,4\}$

C. $\{1,2,4\}$　　D. $\{1,2\}$

2. 设 $a=0.6^{\frac{1}{3}}$，$b=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{4}}$，$c=\log_3 0.6$，则 a,b,c 的大小关系是

A. $c<a<b$　　B. $c<b<a$　　C. $a<c<b$　　D. $a<b<c$

3. 聪明又童心未泯的数学系教授，在高数课堂上利用表情包，以“可倒”与“可导”的谐音生动形象地说明了高等数学中“连续”和“可导”两个概念之间的关系. 根据该表情包，$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导的

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

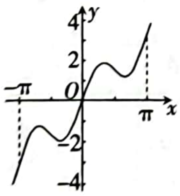
C. 充要条件

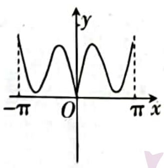
D. 既不充分也不必要条件

4. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_{10}=2a_8-2$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 11 项的和 $S_{11}=$

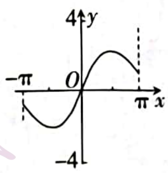
A. 8　　B. 16　　C. 22　　D. 44

5. 已知函数 $y=f(x)$ 的部分图象如图所示，则函数 $y=2f\left(\frac{1}{2}x\right)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的大致图象为

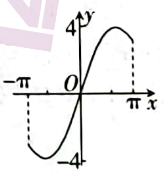




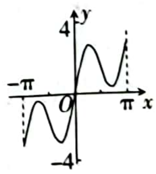
A.



B.



C.



D.

6. 若 $pq\neq0$，直线 $y=px+1$ 与曲线 $y=e^{qx-3}$ 相切于点 (x_0,y_0)，则 $x_0=$

A. $\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$　　B. $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$　　C. $\frac{1}{q}-\frac{3}{p}$　　D. $\frac{1}{p}-\frac{3}{q}$

7. 已知 $a>0,b>0$ 且 $\frac{1}{4a}+\frac{1}{9b}=1$，则当 $a+b$ 取到最小值时，$\frac{a}{b}=$

A. $\frac{4}{9}$　　B. $\frac{9}{4}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{2}$

8. 设 a,b 为两条直线，α,β 为两个平面，下列说法正确的是

A. 若 $a\perp b,a\perp\alpha$，则 $b/\!/\alpha$　　B. 若 $a\perp b,b/\!/\alpha$，则 $a/\!/\alpha$

C. 若 $a/\!/b,a/\!/\alpha$，则 $b/\!/\alpha$　　D. 若 $\alpha\perp\beta,a\subset\alpha,\alpha\cap\beta=b,a\perp b$，则 $a\perp\beta$

9. 已知 $\sin 2\alpha=\frac{1}{3}$，且 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

10. 某学习小组用计算机软件对一组数据 (x_i,y_i) $(i=1,2,\cdots,8)$ 进行回归分析，甲同学首先求出回归直线方程 $\hat{y}=2x+5$，样本的中心点为 $(2,m)$. 乙同学对甲的计算过程进行检查发现甲将数据 $(3,7)$ 误输成 $(7,3)$，数据 $(4,6)$ 误输成 $(4,-6)$，将这两个数据修正后得到回归直线方程 $\hat{y}=kx+\frac{9}{2}$，则实数 $k=$

A. $\frac{8}{5}$　　B. $\frac{5}{3}$　　C. $\frac{10}{3}$　　D. $\frac{13}{3}$

11. 向量 $\boldsymbol{a}=(1,3)$，$\boldsymbol{b}=(3x-1,x+1)$，$\boldsymbol{c}=(5,7)$，若 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\parallel(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$，且 $\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$，则 $m+n$ 的值为

A. 2　　B. $\frac{5}{2}$　　C. 3　　D. $\frac{7}{2}$

12. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=-f(x)$，当 $1\leqslant x<2$ 时，$f(x)=x-2$. 若 $y=\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}$ 与 $f(x)$ 的图象交于点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，$\cdots$，(x_n,y_n) $(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)=$

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 14

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知平面向量 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 满足 $|\boldsymbol{m}|=3$，$|\boldsymbol{n}|=2$，$\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，则 $|2\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}|=$________.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，其前 n 项和为 S_n，前三项和为 13，前三项积为 27，则 $S_5=$________.

15. 已知函数 $f(x)=2\cos(2x+\varphi)$ 图象上的一条对称轴为 $x=\frac{\pi}{8}$，若 $0<\varphi<4\pi$，则 φ 的最大值是________.

16. 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 9，$AB>BC$，$AC=AB_1$，且异面直线 AC 与 B_1D_1 所成的角为 $60°$，则该长方体的表面积为________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）某地出现新冠肺炎疫情，这次疫情持续了 6 周，根据每周统计的新增病例的情况，得到下面的统计表.

第 n 周	1	2	3	4	5	6
新增病例数	5	20	55	40	15	5

（1）有人从该地的人口数据电子信息表中，随机抽取了 6000 人，结果发现里面有 2 人是这次疫情新增的病例，估计该地人口总数；

（2）已知最后两周新增的病例中，有 1 人是重症患者. 现从最后两周新增的病例中，随机抽取 2 人，求重症患者被抽到的概率.

18. (12 分)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n, $a_1=\frac{1}{2}$, $2S_n\cdot S_{n+1}=-a_{n+1}$.

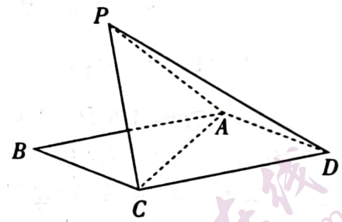
(1)证明:数列$\{\frac{1}{S_n}\}$是等差数列;

(2)设数列$\{b_n\}$满足 $b_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}$,求 b_1+b_{21}的值.

19. (12 分)如图,四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形,$\angle ABC=60°$,将$\triangle ABC$ 沿直线 AC 折起到$\triangle APC$ 的位置,使 $PD=3$.

(1)证明:$PD\perp AC$;

(2)求点 C 到平面 APD 的距离.



20. (12 分)已知$\triangle ABC$ 的三个内角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c,$\frac{1-\cos 2B}{\sin B}=\frac{\sin 2A}{\sin A}$.

(1)若 $C=\frac{\pi}{6}$,求 B 的大小;

(2)若$\triangle ABC$ 不是钝角三角形,且 $c=1$,求$\triangle ABC$ 的面积的取值范围.

21. (12 分)已知函数 $f(x)=x\ln x-ax^2(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=e$ 时,证明:$f(x)+2x\leqslant 0$;

(2)记函数 $g(x)=(x-1)e^x-f(x)$,若 $g(x)$ 为增函数,求 a 的取值范围.

(二)选考题:共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做,则按所做的第一题计分.

22. (10 分)【选修 4-4:坐标系与参数方程】

在平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\alpha\\ y=\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数),以坐标原点 O 为极点,x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系,直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+2=0$.

(1)求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程;

(2)若直线 l 与曲线 C 交于 A,B 两点,点 $P(0,2)$,求 $\dfrac{1}{|PA|}+\dfrac{1}{|PB|}$ 的值.

23. (10 分)【选修 4-5:不等式选讲】

已知函数 $f(x)=|x-3|+|x+a|(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=2$ 时,求不等式 $f(x)\leqslant 7$ 的解集;

(2)若 $f(x)\geqslant 2$ 恒成立,求 a 的取值范围.

2022—2023 学年第一学期高三期中联考

数学文科参考答案

1.【答案】B

【解析】因为集合 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{x|x^2-3x<0,x\in\mathbf{Z}\}=\{x|0<x<3,x\in\mathbf{Z}\}=\{1,2\}$，所以 $C=\{0,1,2,4\}$，所以 $B\cup C=\{0,1,2,4\}$，故选 B.

2.【答案】A

【解析】因为 $0<a=0.6^{\frac{1}{3}}<1$，$b=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{4}}>1$，$c=\log_3 0.6<0$，所以 $c<a<b$，故选 A.

3.【答案】B

【解析】根据表情包可知连续不一定可导，但是可导一定连续，故 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导的必要不充分条件，故选 B.

4.【答案】C

【解析】设 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公差为 d，则 $a_1+9d=2(a_1+7d)-2$，解得 $a_1+5d=a_6=2$，故 $S_{11}=\frac{11(a_1+a_{11})}{2}=11a_6=11\times2=22$，故选 C.

5.【答案】C

【解析】将函数 $y=f(x)$ 的图象上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，再将所得图象上各点的纵坐标伸长到原来的 2 倍，得到函数 $y=2f\left(\frac{1}{2}x\right)$ 的图象，根据 $y=f(x)$ 的部分图象可知，只有选项 C 符合，故选 C.

6.【答案】A

【解析】因为 $y'=qe^{qx-3}$，所以 $qe^{qx_0-3}=p$，又 $px_0+1=\frac{p}{q}$，则 $x_0=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$，故选 A.

7.【答案】D

【解析】依题意，$a+b=\left(\frac{1}{4a}+\frac{1}{9b}\right)(a+b)=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{b}{4a}+\frac{a}{9b}\geqslant\frac{13}{36}+2\sqrt{\frac{b}{4a}\cdot\frac{a}{9b}}=\frac{25}{36}$，当且仅当 $\frac{b}{4a}=\frac{a}{9b}$，即 $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$ 时等号成立，故选 D.

8.【答案】D

【解析】若 $a\perp b$，$a\perp\alpha$，则 $b/\!/\alpha$ 或 $b\subset\alpha$，故 A 错误；若 $a\perp b$，$b/\!/\alpha$，则 $a/\!/\alpha$ 或 $a\perp\alpha$ 或 a 与 α 斜交，故 B 错误；若 $a/\!/b$，$a/\!/\alpha$，则 $b/\!/\alpha$ 或 $b\subset\alpha$，故 C 错误；若 $\alpha\perp\beta$，$a\subset\alpha$，$\alpha\cap\beta=b$，$a\perp b$，则 $a\perp\beta$，故 D 正确，故选 D.

9.【答案】A

【解析】$\because \sin2\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{1}{3}$，$\therefore \tan^2\alpha-6\tan\alpha+1=0$，$\tan\alpha=3\pm2\sqrt{2}$，$\because \alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore \tan\alpha>1$，$\therefore \tan\alpha=3+2\sqrt{2}$，则 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\alpha\cdot\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{3+2\sqrt{2}-1}{1+3+2\sqrt{2}}=\frac{2+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故选 A.

10.【答案】D

【解析】依题意知 $m=2\times2+5=9$，设修正后的样本点的中心为 $(\bar{x},\bar{y})$，则 $\bar{x}=\frac{2\times8-4}{8}=\frac{3}{2}$，$\bar{y}=\frac{9\times8+4+12}{8}=11$，$\therefore 11=\frac{3}{2}k+\frac{9}{2}$，得 $k=\frac{13}{3}$，故选 D.

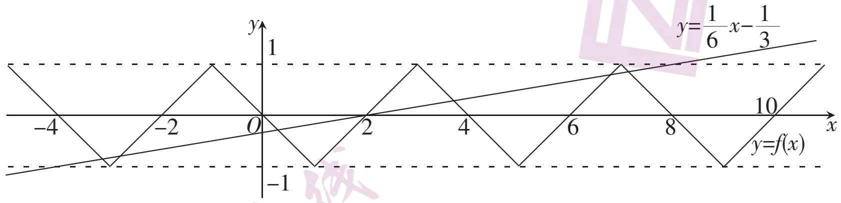
11.【答案】C

【解析】$\because \boldsymbol{a}=(1,3)$，$\boldsymbol{b}=(3x-1,x+1)$，$\boldsymbol{c}=(5,7)$，$\therefore \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3x,x+4)$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=(6,10)$，又 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/\!/(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$，

$\therefore 30x=6x+24$，解得 $x=1$，$\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}=(m,3m)+(2n,2n)=(m+2n,3m+2n)=(5,7)$，即$\begin{cases}m+2n=5\\3m+2n=7\end{cases}$，解得 $m=1$，$n=2$，则 $m+n=3$，故选 C.

12.【答案】D

【解析】由题意可得 $f(x+2)=-f(x)=f(-x)$，所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，故函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，且直线 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴，且 $f(x+4)=-f(x+2)=-f(-x)$，故点 $(2,0)$ 是函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心，作出函数 $f(x)$ 的图象如下图所示.



且当 $x\geqslant 8$ 时，$y=\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}\geqslant 1$；当 $x\leqslant -4$ 时，$y=\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}\leqslant -1$. 且直线 $y=\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}$ 关于点 $(2,0)$ 对称，由图可知，直线 $y=\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}$ 与曲线 $y=f(x)$ 有 7 个不同的公共点，故 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_7=7\times 2=14$，$y_1+y_2+y_3+\cdots+y_7=0$，因此，$\sum_{i=1}^{7}(x_i+y_i)=14$，故选 D.

13.【答案】6

【解析】依题意，$|2\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}|^2=4\boldsymbol{m}^2-12\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}+9\boldsymbol{n}^2=4\times 9-12\times 3\times 2\times\frac{1}{2}+9\times 4=36$，故 $|2\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}|=6$.

14.【答案】121 或 $\frac{121}{9}$

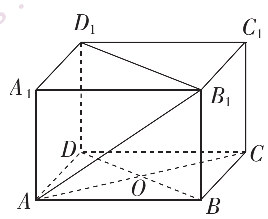
【解析】设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，$\because$ 前三项积为 27，$\therefore a_1a_2a_3=a_2^3=27$，解得 $a_2=3$，$\because$ 前三项和为 13，$\therefore S_3=\frac{a_2}{q}+a_2+a_2q=\frac{3}{q}+3+3q=13$，解得$\begin{cases}a_1=1\\q=3\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=9\\q=\frac{1}{3}\end{cases}$，$\therefore S_5=\frac{1-3^5}{1-3}=121$ 或 $S_5=\frac{9\times\left(1-\frac{1}{3^5}\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{121}{9}$.

15.【答案】$\frac{15\pi}{4}$

【解析】根据题意，得 $2\times\frac{\pi}{8}+\varphi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 又因为 $0<\varphi<4\pi$，所以 φ 的最大值是 $\frac{15\pi}{4}$.

16.【答案】$6+12\sqrt{3}$

【解析】设 $BC=x$，因为 $AC=AB_1$，所以 $BC=BB_1=x$，异面直线 AC 与 B_1D_1 所成的角即 AC 与 BD 的夹角为 $60°$，设 AC 与 BD 交于点 O，因为 $AB>BC$，所以 $\triangle OBC$ 是等边三角形，$\angle ACB=60°$，所以 $AB=\sqrt{3}BC=\sqrt{3}x$，则 $\sqrt{3}x\cdot x\cdot x=9$，得 $x=\sqrt{3}$，所以长方体的表面积为 $4\times 3\times\sqrt{3}+2\times(\sqrt{3})^2=6+12\sqrt{3}$.



17. 解：(1) 设该地的人口总数约为 x，

依题意 $\frac{2}{6000}=\frac{5+20+55+40+15+5}{x}$，(3 分)

解得 $x=420\ 000$. 故该地人口总数约为 420 000 人(5 分)

(2)最后两周新增的病例共有 20 人,将其编号为 1,2,…,20,且不妨设重症患者的编号为 1,从 20 人中随机抽取 2 人,不同的抽取方法有(1,2),(1,3),…,(1,20),(2,3),(2,4),…,(2,20),…,(19,20),共有 $19+18+\cdots+1=\frac{20\times19}{2}=190$ 种,(8 分)

其中重症患者被抽到的方法共有 19 种,(10 分)

所以重症患者被抽到的概率为 $P=\frac{19}{190}=\frac{1}{10}$.(12 分)

18.(1)证明:$\because 2S_n\cdot S_{n+1}=-a_{n+1}$,$\therefore 2S_n\cdot S_{n+1}=S_n-S_{n+1}$,(1 分)

易知 $S_n\neq0$,$\therefore \frac{S_n-S_{n+1}}{S_n\cdot S_{n+1}}=\frac{1}{S_{n+1}}-\frac{1}{S_n}=2$,(3 分)

$\therefore$ 数列$\{\frac{1}{S_n}\}$是公差为 2 的等差数列.(4 分)

(2)解:$\because \frac{1}{S_1}=\frac{1}{a_1}=2$,$\therefore \frac{1}{S_n}=2+2(n-1)=2n$,$\therefore S_n=\frac{1}{2n}$.(6 分)

当 $n=1$ 时,$b_1=\frac{a_1}{a_2}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}=-2$;(8 分)

当 $n>1$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n-1)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n(n-1)}$,(9 分)

$$b_n=\frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n(n-1)}}{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n(n+1)}}=\frac{n+1}{n-1}.\text{(11 分)}$$

$\therefore b_1+b_{21}=-2+\frac{21+1}{21-1}=-\frac{9}{10}$.(12 分)

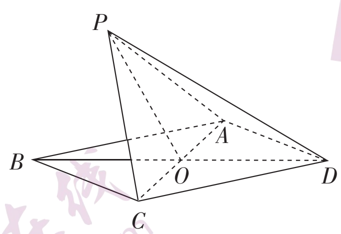
19.(1)证明:如图,连接 BD 与 AC 交于点 O,连接 OP,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,$\therefore AC\perp BD$,即 $OD\perp AC$.(1 分)

由翻折可知 $OP\perp AC$,(2 分)

$\because OD\cap OP=O$,$\therefore AC\perp$平面 OPD,(4 分)

又 $PD\subset$平面 OPD,$\therefore AC\perp PD$.(5 分)



(2)解:设点 C 到平面 APD 的距离为 h,点 P 到平面 ACD 的距离为 h',

由 $V_{\text{三棱锥}C-PAD}=\frac{1}{3}\cdot h\cdot S_{\triangle APD}=\frac{1}{3}\cdot h'\cdot S_{\triangle ACD}$,得 $h=\frac{S_{\triangle ACD}\cdot h'}{S_{\triangle APD}}$.(*)(7 分)

由已知可得 $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.(8 分)

$\because OP=OD=\sqrt{3}$,$PD=3$,

$\therefore \cos\angle POD=\frac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-3^2}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}$,$\therefore \angle POD=120°$,

$\therefore h'=OP\cdot\sin\angle POD=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$,(10 分)

$\because \triangle APD$ 是边长分别为 2,2,3 的等腰三角形,

$\therefore S_{\triangle APD}=\frac{1}{2}\times 3\times\sqrt{2^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{7}}{4}$,(11 分)

将上述结果代入(＊)可得 $h=\frac{\sqrt{3}\times\frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{7}}{4}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$,

$\therefore$ 点 C 到平面 APD 的距离为$\frac{2\sqrt{21}}{7}$.(12 分)

20. 解:原式可化为$\frac{2\sin^2 B}{\sin B}=\frac{2\sin A\cos A}{\sin A}$,可得 $\sin B=\cos A$.(2 分)

(1)因为 $C=\frac{\pi}{6}$,所以 $A=\frac{5\pi}{6}-B$,

得 $\sin B=\cos\left(\frac{5\pi}{6}-B\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B$,(4 分)

得 $\tan B=-\sqrt{3}$,因为 $0<B<\pi$,所以 $B=\frac{2\pi}{3}$.(6 分)

(2)$\sin B=\cos A=\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)$,因为$\triangle ABC$ 不是钝角三角形,所以 $B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$,$\frac{\pi}{2}-A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$,

又由 $y=\sin x$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增,所以 $B=\frac{\pi}{2}-A$,即 $C=\frac{\pi}{2}$,(8 分)

故 $a^2+b^2=c^2=1$,

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\leqslant\frac{1}{4}(a^2+b^2)=\frac{1}{4}$,(10 分)

当且仅当 $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$时等号成立,所以$\triangle ABC$ 的面积的取值范围为$\left(0,\frac{1}{4}\right]$.(12 分)

21. (1)证明:当 $a=\mathrm{e}$ 时,$f(x)=x\ln x-\mathrm{e}x^2$,

要证$f(x)+2x\leqslant 0$,即证 $\ln x-\mathrm{e}x+2\leqslant 0$,(1 分)

设 $h(x)=\ln x-x+1$,则 $h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$,(2 分)

当 $x\in(0,1)$时,$h'(x)>0$;当 $x\in(1,+\infty)$时,$h'(x)<0$,

所以 $h(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减,

所以 $h(x)_{\max}=h(1)=0$,则 $\ln x-x+1\leqslant 0$,(4 分)

故 $\ln(\mathrm{e}x)-\mathrm{e}x+1\leqslant 0$,即$f(x)+2x\leqslant 0$,当且仅当 $\mathrm{e}x=1$ 时等号成立.(5 分)

(2)解:因为 $g(x)=(x-1)\mathrm{e}^x-x\ln x+ax^2$,所以 $g'(x)=x\mathrm{e}^x-1-\ln x+2ax$,(6 分)

因为 $g(x)$为增函数,所以 $g'(x)=x\mathrm{e}^x-1-\ln x+2ax\geqslant 0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立,

所以 $2a\geqslant\frac{\ln x+1-x\mathrm{e}^x}{x}$在$(0,+\infty)$上恒成立,(8 分)

由(1)可知 $\ln x-x+1\leqslant 0$,则 $\ln(x\mathrm{e}^x)-x\mathrm{e}^x+1\leqslant 0$,即 $x+\ln x-x\mathrm{e}^x+1\leqslant 0$,

从而 $\ln x-x\mathrm{e}^x+1\leqslant -x$,即$\frac{\ln x+1-x\mathrm{e}^x}{x}\leqslant -1$,当且仅当 $x\mathrm{e}^x=1$ 时等号成立,(10 分)

故 $2a\geqslant -1$,解得 $a\geqslant -\frac{1}{2}$,即 a 的取值范围为$\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$.(12 分)

22. 解:(1)由$\begin{cases}x=2\cos\alpha\\ y=\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数),得$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

故曲线 C 的普通方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.(2 分)

由 $2\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+2=0$,

故直线 l 的直角坐标方程为 $2x-y+2=0$.(4 分)

(2)由题意可知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{5}}{5}t \\ y=2+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}t \end{cases}$ (t 为参数).(5 分)

将直线 l 的参数方程代入曲线 C 的普通方程并整理得 $17t^2+32\sqrt{5}t+60=0$,(7 分)

设 A,B 对应的参数分别是 t_1,t_2,

则 $t_1+t_2=-\dfrac{32\sqrt{5}}{17}$, $t_1t_2=\dfrac{60}{17}$,(8 分)

故 $\dfrac{1}{|PA|}+\dfrac{1}{|PB|}=\dfrac{|t_1|+|t_2|}{|t_1t_2|}=\dfrac{|t_1+t_2|}{|t_1t_2|}=\dfrac{8\sqrt{5}}{15}$.(10 分)

23. 解:(1)因为 $f(x)=|x-3|+|x+2|=\begin{cases} -2x+1, x\leqslant -2, \\ 5, -2<x<3, \\ 2x-1, x\geqslant 3, \end{cases}$ (2 分)

所以 $f(x)\leqslant 7$ 等价于 $\begin{cases} x\leqslant -2 \\ -2x+1\leqslant 7 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -2<x<3 \\ 5\leqslant 7 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x\geqslant 3, \\ 2x-1\leqslant 7, \end{cases}$ (3 分)

解得 $-3\leqslant x\leqslant 4$,即不等式 $f(x)\leqslant 7$ 的解集为 $[-3,4]$.(5 分)

(2)因为 $f(x)=|x-3|+|x+a|\geqslant|a+3|$,(7 分)

所以 $|a+3|\geqslant 2$,所以 $a+3\geqslant 2$ 或 $a+3\leqslant -2$,(8 分)

解得 $a\geqslant -1$ 或 $a\leqslant -5$,即 a 的取值范围为 $(-\infty,-5]\cup[-1,+\infty)$.(10 分)