

成都市 2021 级高中毕业班摸底测试

数学(理科)

本试卷分选择题和非选择题两部分。第 I 卷(选择题)1 至 3 页,第 II 卷(非选择题)3 至 4 页,共 4 页,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

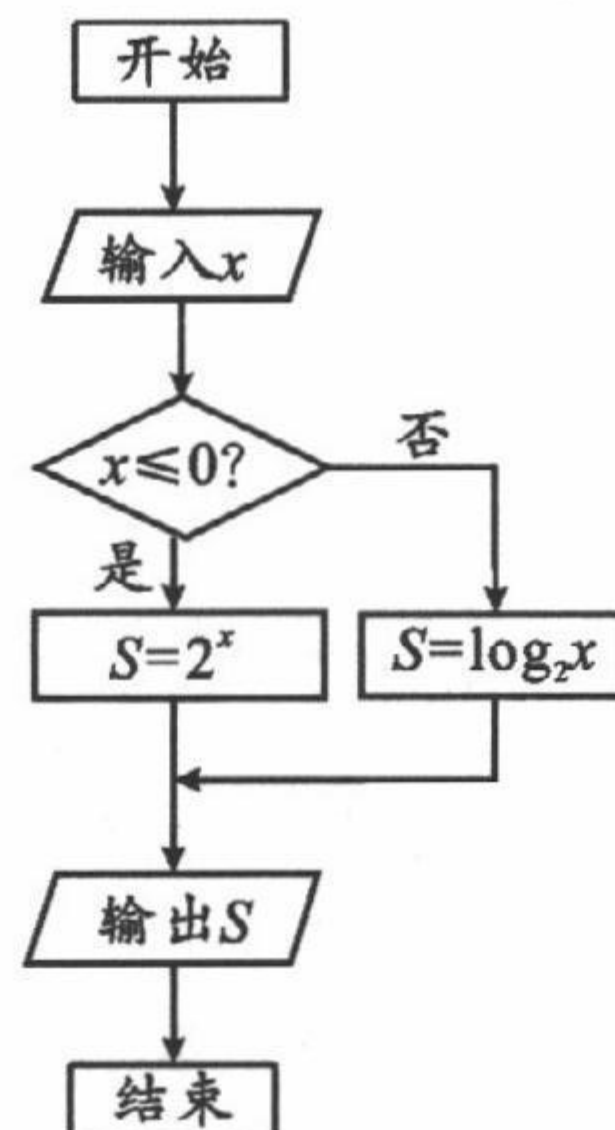
1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用 0.5 毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

第 I 卷(选择题,共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 < 0\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B =$
(A) $\{-2, 0, 1\}$ (B) $\{-1, 0, 1, 2\}$ (C) $\{0, 1\}$ (D) $\{1, 2\}$
2. 命题“ $\exists m_0 \in \mathbf{N}, \sqrt{m_0^2 + 1} \in \mathbf{N}$ ”的否定为
(A) $\forall m \notin \mathbf{N}, \sqrt{m^2 + 1} \in \mathbf{N}$ (B) $\forall m \in \mathbf{N}, \sqrt{m^2 + 1} \notin \mathbf{N}$
(C) $\exists m_0 \in \mathbf{N}, \sqrt{m_0^2 + 1} \notin \mathbf{N}$ (D) $\exists m_0 \notin \mathbf{N}, \sqrt{m_0^2 + 1} \in \mathbf{N}$
3. 双曲线 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 的渐近线方程为
(A) $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$ (B) $y = \pm \frac{1}{2}x$
(C) $y = \pm \sqrt{2}x$ (D) $y = \pm 2x$
4. 执行如图所示的程序框图,若输出 S 的值为 4,则输入的 x 的值为
(A) -4 (B) -2
(C) 2 (D) 16

5. 若实数 x, y 满足 $\begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ x + y - 3 \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$, 则 $3x + 2y$ 的最大值为
(A) 0 (B) 6 (C) 7 (D) 9



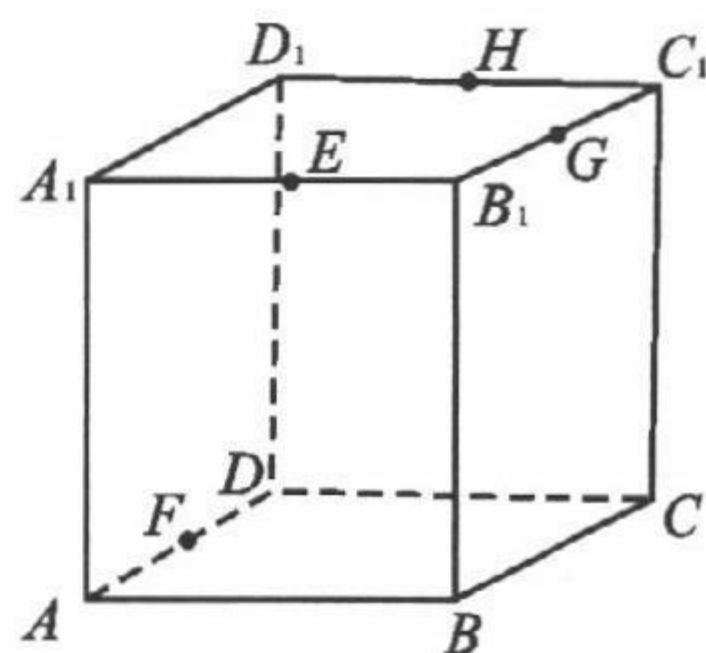
6. 全国文明典范城市是以全国文明城市为基础的文明城市范例,是城市治理“桂冠上的明珠”.为争创全国文明典范城市,某城市特邀请甲、乙两组评委分别从公共服务、文化建设、社会治理等 10 个不同维度对城市建设进行评分,每个维度满分为 10 分.现将两组评委的评分制成如下的茎叶图,其中茎叶图中茎部分是得分的个位数,叶部分是得分的小数,则下列结论中正确的是

- (A) 甲组评分的平均数小于乙组评分的平均数
(B) 甲、乙两组评分的中位数不相同
(C) 甲组评分的极差大于乙组评分的极差
(D) 甲组评分的众数小于乙组评分的众数

甲		乙
9 8 6 5	7	5 6 8 8
6 5 3 3 1 0	8	0 1 2 3 5
	9	8

7. 如图,在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中,已知 E, F, G, H 分别是 $A_1B_1, AD, B_1C_1, C_1D_1$ 的中点,则下列结论中错误的是

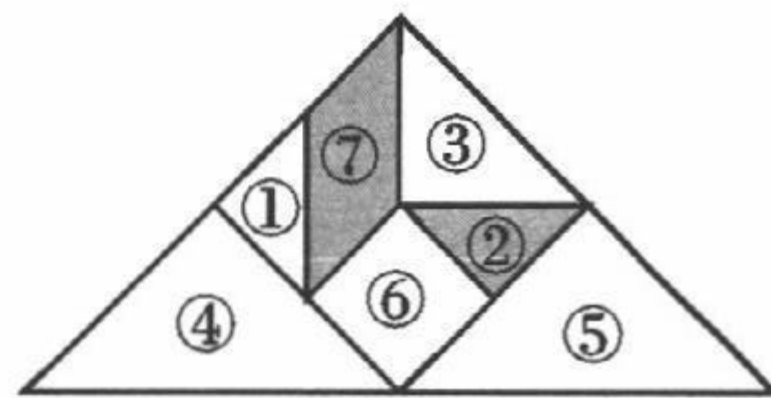
- (A) C, G, A_1, F 四点共面
(B) 直线 $EF \parallel$ 平面 BDD_1B_1
(C) 平面 $HCG \parallel$ 平面 BDD_1B_1
(D) 直线 EF 和 HG 所成角的正切值为 $\sqrt{2}$



8. 函数 $f(x) = e^x - 2023|x - 2|$ 的零点个数为

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

9. 七巧板又称七巧图,智慧板,是一种古老的中国传统智力玩具.据清代陆以湜《冷庐杂识》说:“宋黄伯思宴几图,以方几七,长段相参,衍为二十五体,变为六十八名.明严澂蝶几图,则又变通其制,以勾股之形,作三角相错形,如蝶翅.其式三,其制六,其数十有三,其变化之式,凡一百有余.近又有七巧图,其式五,其数七,其变化之式多至千余.体物肖形,随手变幻,盖游戏之具,足以排闷破寂,故世俗皆喜为之.”如图是一个用七巧板拼成的三角形(其中①②为两块全等的小型等腰直角三角形,③为一块中型等腰直角三角形,④⑤为两块全等的大型等腰直角三角形,⑥为一块正方形,⑦为一块平行四边形).现从该三角形中任取一点,则此点取自阴影部分的概率为



- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{3}{16}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{3}{8}$

10. 已知直线 $l: mx + y + 1 - 2m = 0 (m \in \mathbf{R})$ 和圆 $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$, 则“ $m = 0$ ”是“圆 C 上恰有三个不同的点到直线 l 的距离为 1”的

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

11. 记函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$. 若 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ 时恒有

$f(x) < f'(x)\tan x$ 成立, 则

(A) $\sqrt{2}f(-\frac{\pi}{6}) > f(-\frac{\pi}{4})$

(B) $f(-\frac{\pi}{3}) > -\sqrt{3}f(\frac{\pi}{6})$

(C) $\sqrt{2}f(\frac{\pi}{3}) > \sqrt{3}f(\frac{\pi}{4})$

(D) $f(-\frac{\pi}{3}) < \sqrt{3}f(-\frac{\pi}{6})$

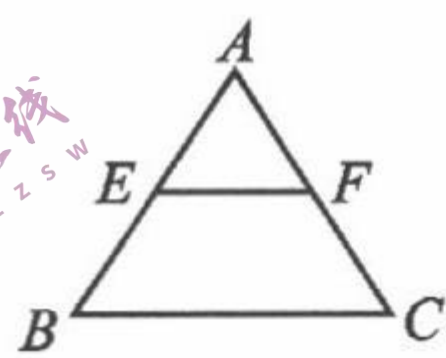
12. 如图①, 已知边长为 4 的等边 $\triangle ABC$, 点 E, F 分别为边 AB, AC 的中点. 现以 EF 为折痕将 $\triangle ABC$ 折起为四棱锥 $A' - BCFE$, 使得 $A'B = \sqrt{10}$, 如图②. 则四棱锥 $A' - BCFE$ 的外接球的表面积为

(A) 15π

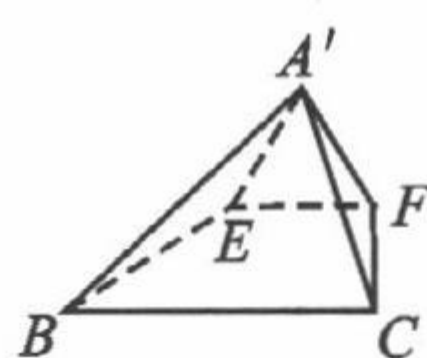
(B) 16π

(C) $\frac{52}{3}\pi$

(D) 19π



图①



图②

第Ⅱ卷(非选择题, 共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡上.

13. 已知复数 $z = \frac{1-i}{i}$ (i 为虚数单位), 则 $|z| =$ _____.

14. 第 31 届世界大学生夏季运动会将于 2023 年 7 月 28 日—8 月 8 日在成都举行, 比赛项目包括 15 个必选项目和武术、赛艇、射击 3 个自选项目, 共 18 个大项, 269 个小项. 小张、小王、小李三位大学生在谈论自己是否会武术、赛艇、射击 3 个自选项目时, 小张说: 我和小王都不会赛艇; 小王说: 我会的自选项目比小张多一个; 小李说: 三个自选项目中我们都会的项目只有一项, 但我不会射击. 假如他们三人都说的是真话, 则由此可判断小张会的自选项目是 _____ (填写具体项目名称).

15. 已知直线 l 经过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F , 且与抛物线相交于 P, Q 两点, 若点 $(-1, 1)$ 在以 PQ 为直径的圆上, 则直线 l 的方程为 _____.

16. 一条直线与函数 $y = \ln x$ 和 $y = e^x$ 的图象分别相切于点 $P(x_1, y_1)$ 和点 $Q(x_2, y_2)$, 则 $(1 - e^{y_1})(1 + x_2)$ 的值为 _____.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

记函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$. 已知 $f(x) = x^3 + ax + 10$, $f'(2) = 0$.

(I) 求实数 a 的值;

(II) 求 $f(x)$ 在 $[-3, 4]$ 的值域.

18. (本小题满分 12 分)

某种产品的价格 x (单位:万元/吨)与需求量 y (单位:吨)之间的对应数据如下表所示:

x	12	11	10	9	8
y	5	6	8	10	11

(I) 已知可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系,求 y 关于 x 的线性回归方程;

(II) 请预测当该产品定价为 6 万元时需求量能否超过 15 吨? 并说明理由.

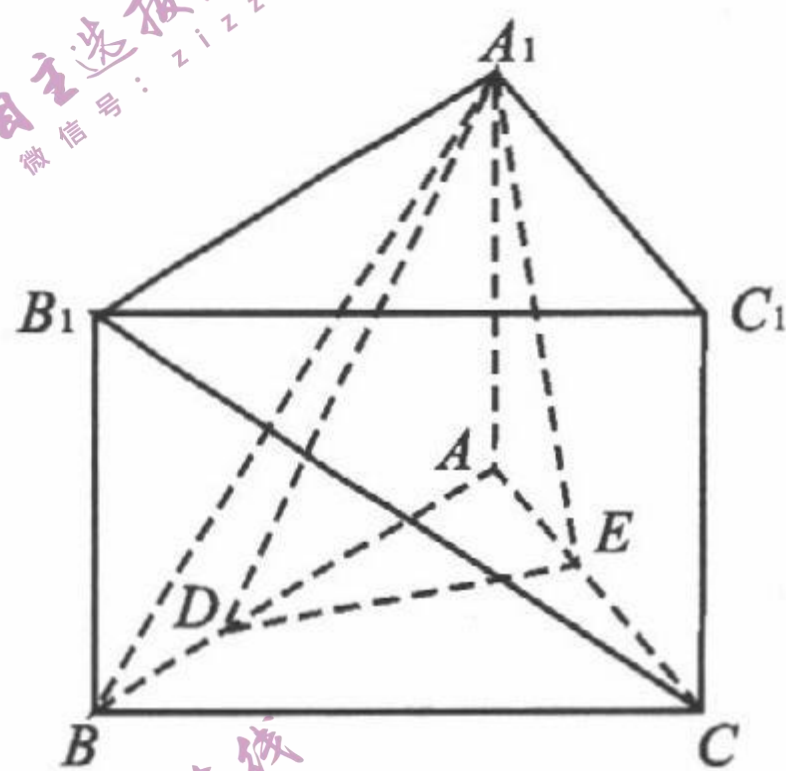
参考公式: $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}, \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$.

19. (本小题满分 12 分)

如图,在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $A_1B \perp B_1C$, $AB = AA_1 = AC = 2$.

(I) 求证: $AC \perp$ 平面 A_1ABB_1 ;

(II) 若 D, E 分别为棱 AB, AC 上的动点,且 $BD = AE$. 当三棱锥 $A - A_1DE$ 的体积最大时,求二面角 $A - DA_1 - E$ 的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 椭圆 E 上的点到其左、右焦点的距离之和为 4.

(I) 求椭圆 E 的方程;

(II) 设过左焦点 F 的直线 l 与椭圆 E 相交于 A, B 两点, M 为 AB 的中点, O 为坐标原点. 若椭圆 E 上存在点 N 满足 $\overrightarrow{ON} = \lambda \overrightarrow{OM} (\lambda > 0)$, 求四边形 $AOBN$ 面积的最小值及此时 λ 的值.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x + ax^2$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(I) 当 $a = -2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 当 $x > 1$ 时, 若 $f(x) < e^x$ 恒成立, 求整数 a 的最大值.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2t, \\ y = t^2 \end{cases} (t \text{ 为参数})$. 以坐标原点 O 为极点, x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho \sin \theta + \rho \cos \theta = 5$.

设曲线 C_1 与曲线 C_2 相交于 A, B 两点.

(I) 求曲线 C_1 的普通方程与曲线 C_2 的直角坐标方程;

(II) 已知点 $P(2, 3)$, 求 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|}$ 的值.