2022—2023学年度第一学期高三质量检测

数学试题

2022.12

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、考试号等填写在答题卡和试卷指定位置上.

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.若集合 $M=\{x|x^2>4\}$，$N=\{x|x>1\}$，则 $(\complement_{\mathbf{R}}M)\cup N=$

A.$\{x|1<x\leqslant 2\}$　　B.$\{x|x\geqslant -2\}$　　C.$\{x|x>1\}$　　D.$\{x|x\leqslant 2\}$

2.若 $z=\dfrac{2+i}{1-2i}$，则 $\bar{z}=$

A.1　　B.-1　　C.i　　D.$-i$

3.定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\begin{cases}\log_2(2-x), x\leqslant 0\\ f(x-3), x>0\end{cases}$，则 $f(2023)=$

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

4.已知函数 $f(x)=2^x-x^2$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线与直线 $x+ay+1=0$ 垂直，则 $a=$

A.$6(\ln 2-1)$　　B.$4(\ln 2-1)$　　C.$2(\ln 2-1)$　　D.0

5.在梯形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EC}$，且 $\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，则 $x+y=$

A.$\dfrac{1}{6}$　　B.$\dfrac{1}{2}$　　C.$\dfrac{5}{2}$　　D.$\dfrac{7}{2}$

6.已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=1-q^n(q>0,q\neq 1)$，则"$q>1$"是"数列 $\{a_n\}$ 为递减数列"的

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分又不必要条件

7.已知圆 C：$x^2+y^2-4y+3=0$，点 $M(7,12)$，直线 l：$y=x$.点 P 是圆 C 上的动点，点 Q 是 l 上的动点，则 $|PQ|+|QM|$ 的最小值为

A.11　　B.12　　C.13　　D.14

8. 设 $a=e^{0.1}$，$b=\ln\frac{6}{5}+\sqrt{\frac{5}{6}}$，$c=\sqrt{1.2}$，则

A. $b<c<a$　　B. $c<b<a$　　C. $a<c<b$　　D. $a<b<c$

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

9. 设 α,β 是两个不同的平面，a,b,c 是三条不同的直线，下列命题正确的是

A. 若 $a\perp b$，$a\perp c$，则 $b/\!/c$　　B. 若 $a\perp\alpha$，$b\perp\alpha$，则 $a/\!/b$

C. 若 $a\perp\alpha$，$a\perp\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$　　D. 若 $a/\!/b$，$a/\!/\alpha$，则 $b/\!/\alpha$

10. 已知函数 $f(x)=\cos|x|+|\sin x|$，则下列结论正确的是

A. $f(x)$ 是偶函数　　B. $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上有 4 个零点

C. $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$　　D. $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增

11. 已知抛物线 C：$y^2=4x$，其焦点为 F，点 M 是抛物线 C 上的动点，过点 F 作直线 l：$mx-y-3m+2=0$ 的垂线，垂足为 N，则

A. 直线 l 过定点 $(3,2)$　　B. 当点 F 到直线 l 的距离最大时，$m=-1$

C. 动点 N 的轨迹为椭圆　　D. $|MF|+|MN|$ 的最小值为 $3-\sqrt{2}$

12. 帕多瓦数列是与斐波那契数列相似的又一著名数列. 在数学上，帕多瓦数列被以下递推的方法定义：数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足：$a_1=a_2=a_3=1$，$a_{n+3}=a_{n+1}+a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$. 则下列结论正确的是

A. $a_8=7$　　B. $S_8=19$

C. a_{2021} 是偶数　　D. $S_n=2S_{n-3}+a_{n-2}+2$ $(n\geq4)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 若 $\tan\theta=-2$，则 $\sin\theta\cos\theta=$ ________.

14. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_5=15$，$a_5+a_6+a_7+a_8+a_9=35$，则 $S_{11}=$ ________.

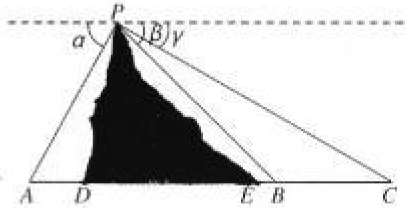
15. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，P 为双曲线上一点，且 $|PF_1|=3|PF_2|$，若 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{2}{3}$，则该双曲线的离心率是 ________.

16. 三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=PB$，$CA=CB$，$\angle ACB=\frac{2\pi}{3}$，$PC\perp CA$，若 $CA+CP=2$，则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积的最小值为 ________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

如图所示，A，B，C 为山脚两侧共线的三点，现计划沿直线 AC 开通穿山隧道，在山顶 P 处测得 A，B，C 三点的俯角分别为 $\alpha=60^\circ$，$\beta=45^\circ$，$\gamma=30^\circ$，在地面测得 $AD=5$ 千米，$BE=1$ 千米，$BC=10(3-\sqrt{3})$ 千米. 求隧道 DE 的长度.



18.（本小题满分 12 分）

数列$\{a_n\}$是正项等比数列，已知 $a_1=2$ 且 a_3，$3a_2$，a_4 成等差数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若 $b_n=\log_2 a_n$，$c_n=\dfrac{b_{n+1}^2-b_n}{b_n^2+b_n}$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和 S_n.

19.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x+mx$.

(1)若函数 $f(x)$在 $\left[\dfrac{\pi}{6},\pi\right]$上单调递增，求实数 m 的取值范围；

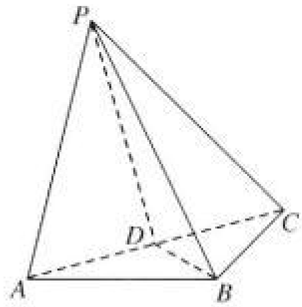
(2)若 $f(x)$在$(0,2\pi)$内有两个极值点 α，β，讨论 $\alpha+\beta$ 的值.

20.（本小题满分 12 分）

如图所示，在高为 2 的三棱锥 $P-ABC$ 中（$\triangle ABC$ 为底面），$AB\perp BC$，$AB=2$，$PA=PC=2\sqrt{2}$，D 为 AC 的中点．若三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $\frac{4}{3}$．

（1）证明：平面 $ABC\perp$ 平面 PBD；

（2）求二面角 $A-PC-B$ 的余弦值．



21.（本小题满分 12 分）

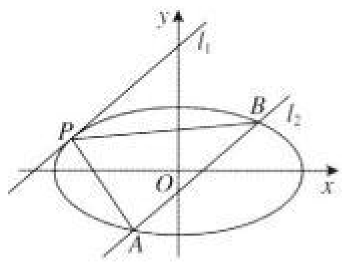
已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，且过点 $P(-\sqrt{3},\frac{1}{2})$．

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）若 l_1 为椭圆 C 在点 P 处的切线，$l_2 /\!/ l_1$ 且 l_2 与椭圆 C 交于 A，B 两点．

（i）求直线 l_1 的方程；

（ii）求$\triangle PAB$ 面积的最大值．



22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=axe^x-\ln x-x$，若 $f(x)\geq 1$ 恒成立．

（1）求实数 a 的取值范围；

（2）当 $x>0$ 时，证明：$xe^x>1-\frac{1}{x}+2\sin x$．

2022—2023 学年度第一学期高三质量检测

数学试题参考答案及评分标准

一、选择题：每小题 5 分，共 40 分

1. B　2. D　3. C　4. B　5. C　6. A　7. B　8. A

二、多项题：每小题 5 分，共 20 分. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分

9. BC　10. AC　11. ABD　12. BCD

三、填空题：每小题 5 分，共 20 分

13. $-\frac{2}{5}$　14. 105　15. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　16. $\frac{16}{5}\pi$

8. 解析：因为 $e^x \geqslant x+1$（当 $x=0$ 时取等号）

所以 $a=e^{0.1}>0.1+1=1.1=\sqrt{1.21}>\sqrt{1.2}=c$

又 $b-c=\ln\frac{6}{5}+\sqrt{\frac{5}{6}}-\sqrt{1.2}=\ln 1.2+\frac{1}{\sqrt{1.2}}-\sqrt{1.2}=2\ln\sqrt{1.2}+\frac{1}{\sqrt{1.2}}-\sqrt{1.2}$

设 $f(x)=2\ln x+\frac{1}{x}-x(x>1)$

$f'(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-1=\frac{-x^2+2x-1}{x^2}=\frac{-(x-1)^2}{x^2}<0$.

所以 $f(x)=2\ln x+\frac{1}{x}-x$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减

所以 $f(\sqrt{1.2})<f(1)=0$，即 $2\ln\sqrt{1.2}+\frac{1}{\sqrt{1.2}}-\sqrt{1.2}<0$

所以 $b<c$

综上：$b<c<a$，故选 A.

12. 解析：由 $a_1=a_2=a_3=1, a_{n+3}=a_{n+1}+a_n(n\in N^*)$ 得帕多瓦数列为：

1，1，1，2，2，3，4，5，7，9，12，16，21，28，37…

对于 A 选项：$a_8=5$，所以 A 选项错误；

对于 B 选项：$S_8=1+1+1+2+2+3+4+5=19$，所以 B 选项正确；

对于 C 选项：a_n 是奇数或偶数呈现周期为 7 的规律，所以 a_{2023} 是偶数.

所以 C 选项正确；

对于 D 选项：由 $a_{n+3}=a_{n+1}+a_n$ 得：

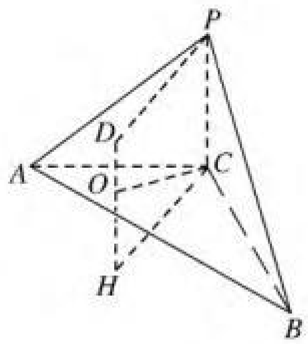
$a_4=a_2+a_1; a_5=a_3+a_2; a_6=a_4+a_3; a_7=a_5+a_4; \cdots a_n=a_{n-2}+a_{n-3}\cdots$

累加得：$S_n-(a_1+a_2+a_3)=a_1+2(a_2+a_3+\cdots+a_{n-3})+a_{n-2}$

即：$S_n-3=1+2(S_{n-3}-1)+a_{n-2}$

所以D选项正确．所以答案为：BCD.

16. 解析：如图所示，易证 $PC\perp$平面 ABC，



设 H 为$\triangle ABC$的外心，过 H 作平面 ABC 的垂线，过 P 作 CH 的平行线，两线交于点 D，取 DH 的中点 O，连接 OC，

则 O 为三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心，

设 $CA=x,PC=2-x,AB=\sqrt{3}x$，

设三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的半径为 R，$\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 r，则 $2r=\dfrac{AB}{\sin\frac{2}{3}\pi}=x$，

$$R^2=x^2+(\frac{2-x}{2})^2=\frac{5}{4}x^2-x+1=\frac{5}{4}(x-\frac{2}{5})^2+\frac{4}{5}\geqslant\frac{4}{5}$$

所以三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积的最小值为$\frac{16}{5}\pi$.

四、解答题：共70分

17. 解：由在山顶 P 处测得 A,B,C 三点的俯角分别为 $\alpha=60^\circ,\beta=45^\circ,\gamma=30^\circ$得：

$\angle C=30^\circ,\angle BPC=15^\circ,\angle PBC=135^\circ,\angle PAC=60^\circ,\angle APC=90^\circ$ ………………… 3分

在$\triangle PBC$中，由正弦定理得：$\dfrac{BC}{\sin\angle BPC}=\dfrac{PC}{\sin\angle PBC}$ ………………………………… 5分

即：$\dfrac{10(3-\sqrt{3})}{\sin15^\circ}=\dfrac{PC}{\sin135^\circ}$

解得：$PC=20\sqrt{3}$ ……………………………………………………………… 7分

在 $Rt\triangle PAC$ 中，由 $\sin\angle PAC=\dfrac{PC}{AC}$

得：$AC=\dfrac{PC}{\sin\angle PAC}$

即：$AC=\dfrac{20\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=40.$ ……………………………………………………… 9分

所以 $DE=AC-AD-BE-BC$

即：$DE=40-5-1-10(3-\sqrt{3})=4+10\sqrt{3}$

所以隧道 DE 的长度约为 $4+10\sqrt{3}$千米 ………………………………………… 10分

18. 解：(1)设数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q>0)$

由 $a_3,3a_2,a_4$ 成等差数列得 $a_3+a_4=6a_2$ ……………………………………… 2分

即：$q+q^2=6$ ……………………………………………………………………… 4分

解得：$q=2$ 或 $q=-3$(舍去) ……………………………………………………… 5分

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^n$ ………………………………………… 6分

(2)由(1)可知 $b_n=\log_2 a_n=\log_2 2^n=n.$ ……………………………………… 7分

所以 $c_n=\frac{b_{n+1}{}^2-b_n}{b_n{}^2+b_n}=\frac{(n+1)^2-n}{n^2+n}=\frac{n^2+n+1}{n^2+n}=1+\frac{1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ …… 10 分

所以 $S_n=n+1-\frac{1}{n+1}=\frac{n^2+2n}{n+1}$. …………………………………………………… 12 分

19. 解：(1) $f'(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x+m=2\sin(x+\frac{\pi}{6})+m$ ………………………………… 2 分

因为函数 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6},\pi]$ 上单调递增. 所以 $f'(x)\geqslant 0$ 在 $x\in[\frac{\pi}{6},\pi]$ 上恒成立.

即：$2\sin(x+\frac{\pi}{6})+m\geqslant 0$ 在 $x\in[\frac{\pi}{6},\pi]$ 上恒成立. ……………………………………… 3 分

因为 $x\in[\frac{\pi}{6},\pi]$ 所以 $x+\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{6}]$

所以 $\sin(x+\frac{\pi}{6})\in[-\frac{1}{2},1]$ …………………………………………………………… 5 分

所以 $2\times(-\frac{1}{2})+m\geqslant 0$，解得：$m\geqslant 1$

所以实数 m 的取值范围为 $[1,+\infty)$ …………………………………………………… 6 分

(2) 由 (1) 知 $f'(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})+m$

因为 $0<x<2\pi$，所以 $\frac{\pi}{6}<x+\frac{\pi}{6}<\frac{13\pi}{6}$

所以 当 $\frac{\pi}{6}<x+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$，即：$0<x<\frac{\pi}{3}$ 时，$f'(x)$ 单调递增；.

当 $\frac{\pi}{2}<x+\frac{\pi}{6}<\frac{3\pi}{2}$，即：$\frac{\pi}{3}<x<\frac{4\pi}{3}$ 时，$f'(x)$ 单调递减

当 $\frac{3\pi}{2}<x+\frac{\pi}{6}<\frac{13\pi}{6}$，即：$\frac{4\pi}{3}<x<2\pi$ 时，$f'(x)$ 单调递增； ……………………………… 8 分

且 $f'(0)=1+m$；$f'(\frac{\pi}{3})=2+m$；$f'(\frac{4\pi}{3})=-2+m$；$f'(2\pi)=1+m$. ………………… 9 分

所以当 $1+m<0<2+m$，即：$-2<m<-1$ 时

$f'(x)=0$ 有两个解 α,β. 即 $f(x)$ 有两个极值点 α,β，且 $\alpha+\beta=2\times\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$. ……… 10 分

当 $-2+m<0<1+m$，即：$-1<m<2$ 时

$f'(x)=0$ 有两个解 α,β，即 $f(x)$ 有两个极值点 α,β，且 $\alpha+\beta=2\times\frac{4\pi}{3}=\frac{8\pi}{3}$ ……… 11 分

综上所述：当 $-2<m<-1$ 时，$\alpha+\beta=\frac{2\pi}{3}$；

当 $-1<m<2$ 时，$\alpha+\beta=\frac{8\pi}{3}$ ………………………………………………………… 12 分

20. (1) 证明：由 $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times AB\times BC\times 2=\frac{2}{3}\times BC=\frac{4}{3}$

得：$BC=2$. 所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形 …………………………………………… 1 分

因为 D 为 AC 的中点，且 $PA=PC$.

所以 $AC\perp BD, AC\perp PD$. …………………………………………………… 2 分

又 $BD\subset$ 平面 PBD, $PD\subset$ 平面 PBD, $BD\cap PD=D$.

所以 $AC\perp$ 平面 PBD. …………………………………………………… 3 分

因为 $AC\subset$ 平面 ABC. 所以平面 $ABC\perp$ 平面 PBD. …………………… 4 分

(2)解：过点 P 作 $PO\perp BD$ 于点 O

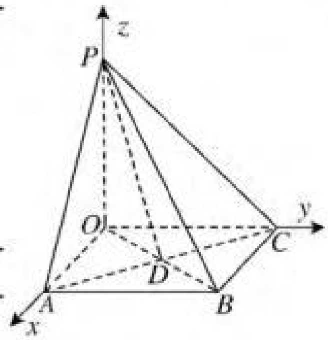
因为 $PO\subset$ 平面 PBD, 平面 $ABC\perp$ 平面 PBD, 平面 $ABC\cap$ 平面 $PBD=OB$

所以 $PO\perp$ 平面 ABC

所以 $PO=OA=OC=2$, 四边形 $OABC$ 为正方形. ………………………… 6 分

以 O 为坐标原点, OA, OB, OP 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系如图所示

则 $A(2,0,0)$, $P(0,0,2)$, $C(0,2,0)$, $B(2,2,0)$. ………… 7 分



所以 $\overrightarrow{AP}=(-2,0,2)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$

设平面 APC 的法向量为 $\overrightarrow{m}=(x,y,z)$.

则 $\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{AP}=0\\ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$, 即: $\begin{cases}-2x+2z=0\\ -2x+2y=0\end{cases}$

令 $x=1$, 得 $\overrightarrow{m}=(1,1,1)$ ………………………………………… 9 分

同理可得平面 PBC 的一个法向量 $\overrightarrow{n}=(0,1,1)$. ……… 11 分

所以 $\cos\langle\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}\rangle=\dfrac{1+1}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

所以二面角 $A-PC-B$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ………………………………………… 12 分

21. 解：(1)由已知可得：$\begin{cases}\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{1}{4b^2}=1\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$ ………………………………………… 2 分

解得：$a=2, b=1$

故椭圆 C 的方程为：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ ………………………………………… 3 分

(2)(i)由题意知：直线 l_1 的斜率存在，可设 l_1 方程为：$y-\dfrac{1}{2}=k(x+\sqrt{3})$

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ y-\dfrac{1}{2}=k(x+\sqrt{3})\end{cases}$ 消去 y 得：

$(4k^2+1)x^2+4k(2\sqrt{3}k+1)x+12k^2+4\sqrt{3}k-3=0$. ………………………… 4 分

又因为 l_1 为椭圆 C 在点 P 处的切线

所以 $\triangle=16k^2(2\sqrt{3}k+1)^2-4(4k^2+1)(12k^2+4\sqrt{3}k-3)$

$=4(4k^2-4\sqrt{3}k+3)=0$ ………………………………………… 5 分

解得：$k=\frac{\sqrt{3}}{2}$

故直线 l_1 的方程为$\sqrt{3}x-2y+4=0$. ………………………………………… 6 分

(ii)因为 $l_2 /\!/ l_1$，所以可设 l_2 方程为：$y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+m$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+m\end{cases}$，消去 y 得：$x^2+\sqrt{3}mx+m^2-1=0$ $\triangle=4-m^2>0$，解得$-2<m<2$

$x_1+x_2=-\sqrt{3}m$，$x_1x_2=m^2-1$. ………………………………………… 7 分

所以$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$

$=\frac{\sqrt{7}}{2}\sqrt{4-m^2}$ ………………………………………… 8 分

设 $P(-\sqrt{3},\frac{1}{2})$到直线 l_2：$\sqrt{3}x-2y+2m=0$ 的距离为 $d=\frac{|4-2m|}{\sqrt{7}}$ ………………… 9 分

所以 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|AB|d=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{2}\sqrt{4-m^2}\times\frac{|4-2m|}{\sqrt{7}}=\frac{1}{2}\sqrt{(2+m)(2-m)^3}$

令 $t=2-m$，则 $0<t<4$

所以 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\sqrt{(4-t)t^3}=\frac{1}{2}\sqrt{-t^4+4t^3}$ ………………………………… 10 分

令 $h(t)=-t^4+4t^3$，$0<t<4$

$h'(t)=-4t^3+12t^2=-4t^2(t-3)$

当 $t\in(0,3)$，$h'(t)>0$，$h(t)$在$(0,3)$上单调递增

当 $t\in(3,4)$，$h'(t)<0$，$h(t)$在$(3,4)$上单调递减

所以 $h(t)_{\max}=27$，即$(S_{\triangle PAB})_{\max}=\frac{1}{2}\sqrt{27}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ………………………………… 12 分

22. 解：(1)法一：当 $a\leqslant0$ 时，$f(1)=ae-1<0$，不符合题意 ………………………………… 1 分

当 $a>0$ 时，$f'(x)=a(x+1)e^x-\frac{1}{x}-1=\frac{(x+1)(axe^x-1)}{x}$ ………………………………… 2 分

令 $h(x)=axe^x-1$

显然函数 $h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增 ………………………………………… 3 分

当 $x\to0$ 时，$h(x)<0$；$h(\frac{1}{a})=e^{\frac{1}{a}}-1>0$

所以存在唯一 $x_0\in(0,\frac{1}{a})$使 $h(x_0)=0$，即 $x_0e^{x_0}=\frac{1}{a}$…① ………………………… 4 分

所以 $f(x)$在$(0,x_0)$上单调递减；在$(x_0,+\infty)$上单调递增.

所以 $f(x)_{\min}=f(x_0)=ax_0e^{x_0}-\ln x_0-x_0$…② ………………………………… 5 分

将①式代入②式得：$f(x)_{\min}=ax_0e^{x_0}-\ln(x_0e^{x_0})=a\times\frac{1}{a}-\ln\frac{1}{a}=1+\ln a$

由 $1+\ln a\geqslant1$ 得 $a\geqslant1$

所以实数 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$ ………………………………………… 6 分

法二：$f(x)=axe^x-\ln x-x=axe^x-\ln(xe^x)\geqslant 1$ 恒成立 ………………………… 1 分

令 $t=xe^x$，$t>0$，则 $at-\ln t\geqslant 1$ 恒成立.

当 $a\geqslant 1$ 时，$at-\ln t\geqslant t-\ln t$ ………………………………………… 2 分

令 $g(t)=t-\ln t$，$t>0$

$g'(t)=1-\frac{1}{t}=\frac{t-1}{t}$

所以函数 $g(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减；在 $(1,+\infty)$ 上单调递增 ……………………… 3 分

所以. $g(t)\geqslant g(1)=1$.

所以当 $a\geqslant 1$ 时，$f(x)\geqslant 1$ 成立 ………………………………………… 4 分

当 $a<1$ 时，存在 x_0 使得 $x_0e^{x_0}=1$

$f(x_0)=ax_0e^{x_0}-\ln(x_0e^{x_0}=a<1$，不符合题意 ……………………………… 5 分

所以实数 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$ ………………………………………… 6 分

(2)证明：令 $a=1$，由(1)可知：$xe^x\geqslant \ln x+x+1$

要证：$xe^x>1-\frac{1}{x}+2\sin x$

只需证：$\ln x+x+1>1-\frac{1}{x}+2\sin x$

即证：$\ln x+x+\frac{1}{x}-2\sin x>0$ ………………………………………… 7 分

令 $\varphi(x)=\ln x+x+\frac{1}{x}-2\sin x$

当 $x=1$ 时，$\varphi(1)=2-2\sin 1>0$； ………………………………………… 8 分

当 $x>1$ 时，$\varphi(x)=\ln x+x+\frac{1}{x}-2\sin x>2-2\sin x\geqslant 0$， ………………………… 9 分

当 $0<x<1$ 时，$\varphi'(x)=\frac{1}{x}+1-\frac{1}{x^2}-2\cos x=1+\frac{x-1}{x^2}-2\cos x$

由于 $\frac{x-1}{x^2}<0$，$2\cos x>2\cos\frac{\pi}{3}=1$.

所以 $\varphi'(x)<0$ 在 $(0,1)$ 上恒成立.

所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减.

所以 $\varphi(x)>\varphi(1)=2-2\sin 1>0$. ………………………………………… 11 分

综上所述：$\varphi(x)=\ln x+x+\frac{1}{x}-2\sin x>0$.

所以原不等式成立 ………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。