清远市2022～2023学年第一学期高中期末教学质量检测

高三数学参考答案

1. D　$(1+i)^2+i(1-i)=2i+i+1=1+3i$.

2. B　因为 $A=\{x|0<x<5\}$，$B=\{x|x>2\}$，所以 $M=\{x|2<x<5\}$，所以 $\sqrt{10}\in M$.

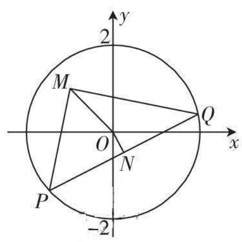
3. A　因为 $y=x^3$ 是奇函数，$f(x)$ 为偶函数，所以 $g(x)$ 为奇函数，四个选项中，只有A满足题意，故选A.

4. C　设镜子的外轮廓对应的椭圆的长半轴长与短半轴长分别为 a 米，b 米，则 $\begin{cases}2a=1.8,\\ \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{5}}{3},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=0.9,\\ b=0.6,\end{cases}$ 故小张要买的镜子的价格为 $200\pi ab\approx339$ 元.

5. C　由题意得 $\frac{\pi}{6}\omega-\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $\omega=6k+2(k\in\mathbf{Z})$，因为 $f(x)$ 在 $(0,\frac{5\pi}{48})$ 上单调，所以 $T=\frac{2\pi}{\omega}>2(\frac{5\pi}{48}-0)$，可得 $0<\omega<\frac{48}{5}$，故 $\omega=2$ 或8.

6. A　当三棱锥 $A-BCD$ 为正三棱锥时，取 BD 的中点 E（图略），连接 AE，CE，则 $AE\perp BD$，$CE\perp BD$，因为 $AE\cap CE=E$，所以 $BD\perp$ 平面 ACE，从而得 $BD\perp AC$，同理可得 $AB\perp CD$. 当 $AB=AD$，$BC=CD\neq BD$ 时，易得 $AC\perp BD$，过 B 作 $BH\perp CD$，垂足为 H，若 $AH\perp CD$，则可得 $CD\perp$ 平面 ABH，则 $CD\perp AB$，此时，三棱锥 $A-BCD$ 不是正三棱锥，故“三棱锥 $A-BCD$ 为正三棱锥”是“$AB\perp CD$ 且 $AC\perp BD$”的充分不必要条件.

7. C　设 PQ 的中点为 N，由 $PM\perp QM$，得 $|PN|=|QN|=|MN|$，设点 N 的坐标为 (x,y)，由 $|OP|^2=|ON|^2+|PN|^2=|ON|^2+|MN|^2$，得 $x^2+y^2+(x+1)^2+(y-1)^2=4$，即 $x^2+y^2+x-y-1=0$，即 $(x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{2}$，可知点 N 的轨迹是以点 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 为圆心，$\frac{\sqrt{6}}{2}$ 为半径的圆，则点 O 到直线 PQ 的距离的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}+\sqrt{(-\frac{1}{2}-0)^2+(\frac{1}{2}-0)^2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.



8. A　记 $\angle AOC=\alpha$，则 $OH=2\cos\alpha$ km，

所以矩形 $ODEH$ 的面积 $S_1=2\cos^2\alpha$，又 $S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}\times2^2\times\sin\alpha=2\sin\alpha$ km²，

所以风景区面积 $S=2\cos^2\alpha+2\sin\alpha=2-2\sin^2\alpha+2\sin\alpha=-2(\sin\alpha-\frac{1}{2})^2+\frac{5}{2}$（km²），

当 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ 时，S 有最大值 $\frac{5}{2}$ km².

9. AC　由图表可观察出A正确.

由 $11\times0.7=7.7$，可知这11个月乙企业的数据的第70百分位数是从小到大排列的第8个数，为第7天的数据，应该大于82%，B错误.

由图表可观察出C正确.

这11天，乙企业月利润增长指数小于82%的有6天，大于82%的有5天，所求概率为 $\frac{C_6^2}{C_{11}^2}=\frac{3}{11}$，D错误.

10. BCD　由题意设此人第一天走 a_1 里，第 n 天走 a_n 里，$\{a_n\}$是等差数列，$a_1=100$，由 $S_9=900+36d=1260$，可得 $d=10$，则 $a_3=100+20=120$，$S_n=100n+\frac{n(n-1)}{2}\times10=5n^2+95n$，所以 $S_7=910$，所以 A 错误，B，C 正确. 因为 $a_3+a_4+a_5=3a_4=390$，所以 D 正确.

11. BCD　一个平面去截正方体，考虑从正方体的上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 开始截入，不妨设上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 与截面的交线为线段 PQ，截取有两种情况，第一种是 P，Q 两点分别在两对边上或两相邻边上. 第一种情况，如图 1，直线 PO 与 BC 相交于点 M，直线 OQ 与 AD 相交于点 N，易知所得截面为平行四边形 $PQMN$；

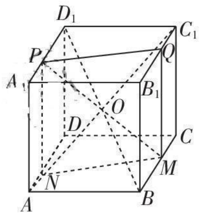


图 1

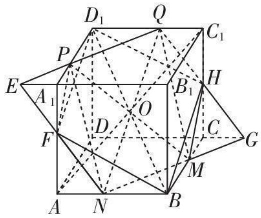


图 2

第二种情况，如图 2，直线 PO 与 BC 相交于点 M，直线 OQ 与 AB 相交于点 N，直线 PQ 与 A_1B_1 相交于点 E，NE 与 AA_1 相交于点 F，直线 MN 与 CD 相交于点 G，GQ 与 CC_1 相交于点 H，易知所得截面为六边形 $PQHMNF$. A 错误，B 正确.

当截面为正六边形时，正六边形的边长为$\sqrt{2}$，它的面积为 $6\times\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$，C 正确.

若 H，F 分别为CC_1，AA_1 的中点，则截面 BFD_1H 为非正方形的菱形，D 正确.

12. ACD　设 $f(x)=e^x-x-1$，则 $f'(x)=e^x-1$，易知 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，所以 $f(0.02)>f(0)=0$，即 $e^{0.02}-1>0.02$. 记 $g(x)=\ln x-x+1$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-1$，易知 $g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，所以 $g(1.02)<g(1)=0$，即 $\ln 1.02<0.02$. 综上，$e^{0.02}-1>0.02>\ln 1.02$，故 A 正确.

对于 B 选项，记 $h(x)=x\ln x-x$，则 $h'(x)=\ln x$，易知 $h(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，所以 $h(1.02)>h(1)$，即 $1.02\ln 1.02-1.02>-1$，整理得 $\ln 1.02>\frac{2}{102}=\frac{1}{51}$，故 B 错误.

记 $\varphi(x)=(2x+1)^2-(1+x)^3$，$x\in(0,1)$，则 $\varphi'(x)=4(2x+1)-3(1+x)^2=-3x^2+2x+1=-(3x+1)(x-1)$，当 $0<x<1$ 时，$-(3x+1)(x-1)>0$，可得 $\varphi'(x)>0$，则 $\varphi(x)$在$(0,1)$上单调递增.

所以有 $\varphi(0.02)>\varphi(0)=0$，得$(1+0.04)^2>(1+0.02)^3$，即$(\frac{1+0.04}{1+0.02})^2>1+0.02$，所以$\frac{1}{51}>\sqrt{1.02}-1$，故 D 正确.

由前面可知 $d<c$，$c<b$，所以 $d<b$，故 C 正确.

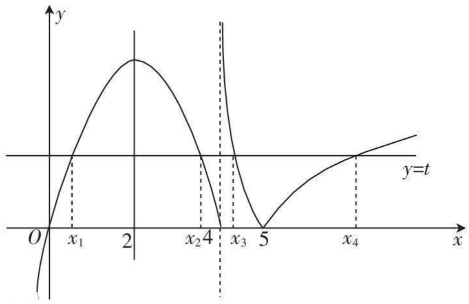
13. -3　因为 E 是线段 BD 的中点，所以$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$，所以$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{EC}$，故 $m-n=-1-2=-3$.

14. 60　$x^2(2x-\frac{1}{x})^6$ 的展开式中常数项为 $x^2\times C_6^4\times(2x)^2\times(-\frac{1}{x})^4=60$.

15. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1$(本题答案不唯一，只要 C 的标准方程满足$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(3<\frac{b^2}{a^2}<4$ 且 $0<a^2+b^2<16)$即可)　设 $P(x_0,y_0)$，则 $k_1k_2=\frac{y_0^2}{x_0^2-a^2}=\frac{b^2(\frac{x_0^2}{a^2}-1)}{x_0^2-a^2}=\frac{b^2}{a^2}$，则 $3<\frac{b^2}{a^2}<4$. 又 C 的焦距小于 8，所以 $2\sqrt{a^2+b^2}<8$，即 a^2

$+b^2<16$.

16. -15；15　作出 $f(x)$ 的大致图象，如图所示.



$x_1+x_2=4$，其中 $x_2>2>x_1>0$. 因为 $-\log_2(x_3-4)=\log_2(x_4-4)$，即 $(x_3-4)(x_4-4)=1$，则 $x_3x_4-4(x_3+x_4)=-15$，其中 $x_4>5>x_3>4$，所以 $(\sqrt{2}+x_1)(\sqrt{2}-x_2)=-(\sqrt{2}+x_1)(-\sqrt{2}+x_2)\geqslant-(\frac{x_1+x_2}{2})^2=-4$，当且仅当 $x_1=2-\sqrt{2}$，$x_2=2+\sqrt{2}$ 时，等号成立，此时 $t=2$. 又因为 $4x_3+\frac{1}{4}x_4=4(x_3-4)+\frac{1}{4}(x_4-4)+17\geqslant19$，当且仅当 $x_3=\frac{17}{4}$，$x_4=8$ 时，等号成立，此时 $t=2$，所以 $(\sqrt{2}+x_1)(\sqrt{2}-x_2)+4x_3+\frac{1}{4}x_4$ 的最小值是 15.

17. 解：(1) 因为 $7a\cos A=b\cos C+c\cos B$，所以 $7\sin A\cos A=\sin B\cos C+\sin C\cos B$，…… 2 分

即 $7\sin A\cos A=\sin(B+C)=\sin A$，…… 3 分

又 $\sin A>0$，所以 $\cos A=\frac{1}{7}$. …… 4 分

故 $\cos 2A=2\cos^2A-1=-\frac{47}{49}$. …… 5 分

(2) 因为 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=12b^2+1$，…… 6 分

$b+c=9$，所以 $b^2+(9-b)^2-\frac{2}{7}b(9-b)=12b^2+1$，…… 7 分

整理得 $(17b+70)(b-2)=0$，解得 $b=2$（负根舍去），…… 8 分

所以 $a^2=12b^2+1=49$，$a=7$. …… 9 分

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 16. …… 10 分

18. 解：(1) 零假设为 H_0：喜爱观看世界杯与性别无关联. …… 1 分

根据列表中的数据，经计算得到 $\chi^2=\frac{200\times(60\times80-20\times40)^2}{80\times120\times100\times100}=\frac{100}{3}\approx33.333>10.828=x_{0.001}$，…… 4 分

根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，推断 H_0 不成立，即认为喜爱观看世界杯与性别有关联. …… 6 分

(2) 按照分层抽样的方式抽取 8 人，其中男观众 6 人，女观众 2 人，…… 7 分

则 X 的可能取值为 $-2,0,2$，…… 8 分

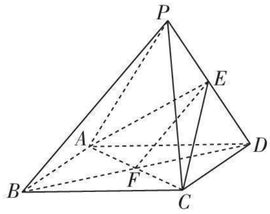
$P(X=-2)=\frac{C_6^2}{C_8^2}=\frac{15}{28}$，$P(X=0)=\frac{C_6^1C_2^1}{C_8^2}=\frac{3}{7}$，$P(X=2)=\frac{C_2^2}{C_8^2}=\frac{1}{28}$，…… 11 分

所以 X 的分布列为

X	-2	0	2
P	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{28}$

…… 12 分

19.(1)证明:连接 BD 交 AC 于点 F,连接 FE. ………………………… 1分



因为底面 $ABCD$ 是菱形,所以 F 是 BD 的中点, ………………………… 2分

又 E 是 PD 的中点,所以 $EF/\!/PB$, ………………………… 3分

因为 $EF\subset$平面 EAC,$PB\not\subset$平面 EAC,

所以 $PB/\!/$平面 EAC. ………………………… 4分

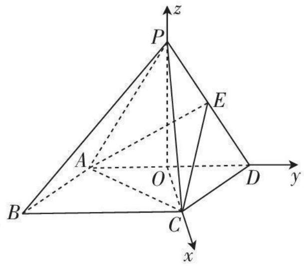
(2)解:取 AD 的中点 O,连接 PO,则 $PO\perp AD$,因为平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$,且平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$,所以 $PO\perp$平面 $ABCD$. ………………………… 5分

设 $PD=a$,则 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2\times2\times\sqrt{a^2-1}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$,得 $a=3$. ………………………… 6分

因为底面 $ABCD$ 是菱形,$\angle ABC=60^\circ$,所以 $OC\perp AD$,且 $OC=\sqrt{3}$.

以 O 为坐标原点,以 OC,OD,OP 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴建立空间直角坐标系,则 $A(0,-1,0)$,$B(\sqrt{3},-2,0)$,$C(\sqrt{3},0,0)$,$P(0,0,2\sqrt{2})$,$D(0,1,0)$,$E(0,\frac{1}{2},\sqrt{2})$,$\overrightarrow{CE}=(-\sqrt{3},\frac{1}{2},\sqrt{2})$,$\overrightarrow{AP}=(0,1,2\sqrt{2})$,$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},-1,0)$.

………………………… 8分



设平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}=y+2\sqrt{2}z=0,\\\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}=\sqrt{3}x-y=0,\end{cases}$ ………………………… 9分

令 $x=4$,得 $\boldsymbol{n}=(4,4\sqrt{3},-\sqrt{6})$, ………………………… 10分

则 $|\cos\langle\overrightarrow{CE},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{CE}||\boldsymbol{n}|}=\frac{4\sqrt{10}}{35}$, ………………………… 11分

故直线 EC 与平面 PAB 所成角的正弦值为$\frac{4\sqrt{10}}{35}$. ………………………… 12分

20.解:(1)由 $2-\frac{S_1}{a_1}=1$ 及$\{2-\frac{S_n}{a_n}\}$是公比为 2 的等比数列,得 $2-\frac{S_n}{a_n}=\frac{1}{2^{n-1}}$,

则 $S_n=\frac{(2^n-1)a_n}{2^{n-1}}$, ………………………… 2分

则 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\frac{(2^{n+1}-1)a_{n+1}}{2^n}-\frac{(2^n-1)a_n}{2^{n-1}}$, ………………………… 3分

可得$(2^n-1)a_{n+1}-2(2^n-1)a_n=0$,即$(2^n-1)(a_{n+1}-2a_n)=0$,可得 $a_{n+1}=2a_n$,

故$\{a_n\}$是首项为 2,公比为 2 的等比数列, ………………………… 5分

故$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^n$. ………………………… 6分

(2)由(1)可知 $\log_2a_n=\log_22^n=n$, ………………………… 7分

则 $b_n=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+2^n=\frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2}+2^n=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}+2^n$, ………………………… 9分

故 $T_n=(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2})+(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2})+\cdots+(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2})+(2+2^2+\cdots+2^n)$

$=1-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}-1$. ………………………… 12分

21.(1)解:(方法一)设 $A(\frac{y_1^2}{4},y_1)$,$B(\frac{y_2^2}{4},y_2)$,

由题知抛物线 C 的焦点为 $F(1,0)$，直线 l 与 x 轴交于点 $Q(2,0)$， …………………………………… 1 分

联立 $\begin{cases}y^2=4x,\\x+y-2=0,\end{cases}$ 消去 x，得 $y^2+4y-8=0$，所以 $\begin{cases}y_1+y_2=-4,\\y_1y_2=-8,\end{cases}$ …………………………………… 3 分

所以△ABF 的面积 $S=\frac{1}{2}|FQ||y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=2\sqrt{3}$. …………………… 5 分

(方法二)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由题知抛物线 C 的焦点为 $F(1,0)$，直线 l 与 x 轴交于点 $Q(2,0)$， …………………………………… 1 分

联立 $\begin{cases}y^2=4x,\\x+y-2=0,\end{cases}$ 得 $x^2-8x+4=0$，所以 $\begin{cases}x_1+x_2=8,\\x_1x_2=4,\end{cases}$ …………………………………… 2 分

所以 $|AB|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{(1+1)\times(64-16)}=4\sqrt{6}$， …………………… 3 分

点 F 到直线 l 的距离 $d=\frac{|1+0-2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$， …………………………………… 4 分

所以△ABF 的面积 $S=\frac{1}{2}|AB|d=\frac{1}{2}\times4\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{3}$. …………………………………… 5 分

(2)证明：设 $P(x_0,y_0)$，$M(x_3,y_3)$，$N(x_4,y_4)$，设 $A(\frac{y_1^2}{4},y_1)$，$B(\frac{y_2^2}{4},y_2)$.

因为 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{MA}$，所以 $(x_3-x_0,y_3-y_0)=\lambda(\frac{y_1^2}{4}-x_3,y_1-y_3)$，解得 $M(\frac{4x_0+\lambda y_1^2}{4(1+\lambda)},\frac{y_0+\lambda y_1}{1+\lambda})$，

同理可得 $N(\frac{4x_0+\lambda y_2^2}{4(1+\lambda)},\frac{y_0+\lambda y_2}{1+\lambda})$. …………………………………… 8 分

因为 M,N 均在抛物线 C 上，

所以 $\begin{cases}(\frac{y_0+\lambda y_1}{1+\lambda})^2=4\times\frac{4x_0+\lambda y_1^2}{4(1+\lambda)},\\(\frac{y_0+\lambda y_2}{1+\lambda})^2=4\times\frac{4x_0+\lambda y_2^2}{4(1+\lambda)},\end{cases}$

可得 y_1,y_2 为方程 $(\frac{y_0+\lambda y}{1+\lambda})^2=4\times\frac{4x_0+\lambda y^2}{4(1+\lambda)}$ 的两个不同实根，

即 y_1,y_2 为方程 $\lambda y^2-2\lambda y_0y+4(1+\lambda)x_0-y_0^2=0$ 的两个不同实根，所以 $y_1+y_2=2y_0$，

则得线段 AB 的中点 T 的纵坐标为 $y_T=\frac{y_1+y_2}{2}=y_0$. …………………………………… 11 分

又因为点 P 的纵坐标也为 y_0，

所以直线 PT 垂直于 y 轴. …………………………………… 12 分

22. 解：(1) $f'(x)=x+\sin 2x-\sin x-2x\cos x+m=x+2\sin x\cos x-\sin x-2x\cos x+m=(x-\sin x)(1-2\cos x)+m$. …………………………………… 1 分

依题意可得 $f'(0)=m=0$，则 $f'(x)=(x-\sin x)(1-2\cos x)$. …………………………………… 2 分

设 $F(x)=x-\sin x$，$x\in(0,\pi)$，则 $F'(x)=1-\cos x\geqslant0$ 对 $x\in(0,\pi)$ 恒成立，

所以 $F(x)=x-\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增， …………………………………… 3 分

又 $F(0)=0$，所以当 $x\in(0,\pi)$ 时，$F(x)>0$，

当 $x\in(0,\frac{\pi}{3})$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(\frac{\pi}{3},\pi)$ 时，$f'(x)>0$， …………………………………… 4 分

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,\frac{\pi}{3})$，单调递增区间为 $(\frac{\pi}{3},\pi)$. …………………………………… 5 分

(2)由(1)知 $g(x)=(2a-1)x+(a+2)x\cos x-\sin 2x+f'(x)=2ax+ax\cos x-\sin x=(2+\cos x)(ax-\frac{\sin x}{2+\cos x})$,

因为 $\cos x\in[-1,1]$,所以 $2+\cos x>0$ 恒成立.

若 $g(x)>0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立,则 $ax-\frac{\sin x}{2+\cos x}>0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立. …………………… 6 分

设 $h(x)=ax-\frac{\sin x}{2+\cos x}$,$x\in(0,+\infty)$,

则 $h'(x)=a-\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}=a-\frac{2}{2+\cos x}+\frac{3}{(2+\cos x)^2}=3(\frac{1}{2+\cos x}-\frac{1}{3})^2+a-\frac{1}{3}$. ……………… 7 分

当 $a\geqslant\frac{1}{3}$ 时,$h'(x)\geqslant0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立,所以 $h(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递增,

所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$h(x)>h(0)=0$,满足题意. …………………………………………………… 8 分

当 $a\leqslant0$,且 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时,$ax\leqslant0$,$\frac{\sin x}{2+\cos x}>0$,则 $h(x)<0$,不满足题意. ……………………………… 9 分

当 $0<a<\frac{1}{3}$ 时,令 $\varphi(x)=\sin x-3ax$,则 $\varphi'(x)=\cos x-3a$,

因为 $0<3a<1$,所以 $\varphi'(x)=\cos x-3a$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有无穷多个零点.

设最小的零点为 x_1,则当 $x\in(0,x_1)$ 时,$\varphi'(x)>0$,所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递增,

所以 $\varphi(x)>\varphi(0)=0$,即 $\sin x>3ax$ 在 $(0,x_1)$ 上恒成立. …………………………………………… 10 分

所以当 $x\in(0,x_1)$ 时,$\frac{\sin x}{2+\cos x}>\frac{\sin x}{3}>ax$,可得 $ax-\frac{\sin x}{2+\cos x}<0$,不满足题意. …………………… 11 分

综上可知,a 的取值范围为 $[\frac{1}{3},+\infty)$. ……………………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。