

怀仁一中高三年级第三次模拟考试

数学试题

全卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上,并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并收回。
4. 本卷主要考查内容:高考范围。

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足: $2z - \bar{z} = 3 + i$, 则 $|z| =$
 A. $\sqrt{10}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\frac{\sqrt{82}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{41}}{3}$
2. 集合 $M = \{x | x = 4n + 1, n \in \mathbf{Z}\}$, $S = \{x | \sqrt{11} < x < \sqrt{101}\}$, 则 $M \cap S$ 中的元素个数为
 A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
3. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦距为 $2\sqrt{5}$, 且实轴长为 2, 则双曲线 C 的渐近线方程为
 A. $y = \pm \frac{1}{2}x$ B. $y = \pm 2x$ C. $y = \pm \sqrt{5}x$ D. $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$
4. 已知 α 为锐角, 且 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$, 则 $\tan \alpha =$
 A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{6}$ C. $2 + \sqrt{3}$ D. $\sqrt{6} + \sqrt{3}$
5. 共有 5 名同学参加演讲比赛, 在安排出场顺序时, 甲、乙排在一起, 且丙与甲、乙都不相邻的概率为
 A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{2}{5}$
6. 已知某圆台的高为 $\sqrt{7}$, 上底面半径为 $\sqrt{2}$, 下底面半径为 $2\sqrt{2}$, 则其侧面展开图的面积为
 A. 9π B. $6\sqrt{2}\pi$ C. $8\sqrt{2}\pi$ D. $9\sqrt{2}\pi$
7. 已知 $a = e^{\sin 1} + \frac{1}{e^{\sin 1}}$, $b = e^{\tan 2} + \frac{1}{e^{\tan 2}}$, $c = e^{\cos 3} + \frac{1}{e^{\cos 3}}$, 则
 A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > c > a$ D. $c > a > b$
8. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 A 在 x 轴上, 点 B 在 y 轴上, $|AB| = 2$, 点 C 满足 $AC \perp BC$, 则点 C 到点 $P(\sqrt{3}, 1)$ 的距离的最大值为
 A. 3 B. $\frac{7}{2}$ C. 4 D. 5

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{1}{3}, a_{n+1} = \frac{a_n}{2-a_n}$.

(1) 记 $b_n = \frac{1}{a_n} - 1$, 证明: 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

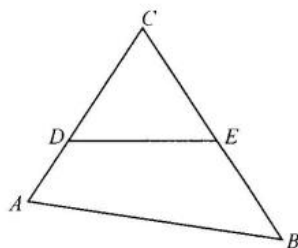
(3) 记 $c_n = 2^n a_n a_{n+1}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且满足 $a^2 + b^2 - c^2 = a^2 \cos C + a c \cos A$.

(1) 求角 C 的大小;

(2) 如图, 若 $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{DA}$, E 为 BC 的中点, $\triangle CDE$ 的面积为 $\sqrt{3}$, $\triangle CDE$ 的周长为 6, 求 AB 边的长度.



19. (本小题满分 12 分)

通过核酸检测可以初步判定被检测者是否感染新冠病毒, 检测方式分为单检和混检. 单检是将一个人的采集拭子放入一个采样管中单独检测; 混检是将多个人的采集拭子放入一个采样管中合为一个样本进行检测, 若检测结果呈阳性, 再对这多个人重新采集单管拭子, 逐一进行检测, 以确定当中的阳性样本. 混检按一个采样管中放入的采集拭子个数可具体分为“3 合 1”混检, “5 合 1”混检, “10 合 1”混检等. 调查研究显示, 在群体总阳性率较低 (低于 0.1%) 时, 混检能较大幅度地提高检测效力、降低检测成本. 根据流行病学调查结果显示, 某城市每位居民感染新冠病毒的概率为 p ($0 < p < 1$). 若对该城市全体居民进行一轮核酸检测, 记每一组 n 位居民采用“ n 合 1” ($n \in \mathbf{N}^*$) 混检方式共需检测 X 次.

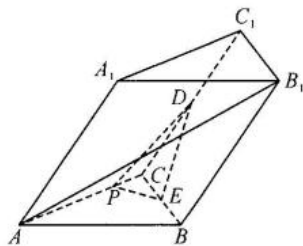
(1) 求随机变量 X 的分布列和数学期望;

(2) 已知当 $0 < p < 0.0005$ 时, $(1-p)^n \approx 1 - np$ ($n \in \mathbf{N}^*$). 若 $p = 0.0001$, 采用“ n 合 1”混检时, 请估计当 n 为何值时, 这一轮核酸检测中每位居民检测的次数最少?

20. (本小题满分 12 分)

如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 ABC , 四边形 ABB_1A_1 是边长为 2 的菱形, $\triangle ABC$ 为等边三角形, $\angle A_1AB = 60^\circ$, E 为 BC 的中点, D 为 CC_1 的中点, P 为线段 AC 上的动点, $AB_1 \parallel$ 平面 PDE .

- (1) 请确定点 P 在线段 AC 上的位置;
- (2) 求平面 PDE 和平面 AB_1C_1 所成二面角的正弦值.



21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短轴长为 $2\sqrt{3}$, 且点 $(1, -\frac{3}{2})$ 在椭圆上.

- (1) 求椭圆 C 的标准方程;
- (2) 椭圆 C 的左、右顶点分别为 A, B , 点 P, Q 是椭圆 C 上异于 A, B 的不同两点, 直线 BP 的斜率为 $k (k \neq 0)$, 直线 AQ 的斜率为 $2k$, 求证: 直线 PQ 过定点.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = (2x^2 - 4x + 4)e^x - ax^2 - e (a \in \mathbf{R})$.

- (1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线 l 过点 $(0, 1 - e)$, 求实数 a 的值;
- (2) 当 $a > 0$ 时, 若函数 $f(x)$ 有且仅有 3 个零点, 求实数 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



自主选拔在线

