

巴中市高 2023 届一诊考试文科数学参考答案

一. 选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分。

DCBA BDAC DBAB

二. 填空题：本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分。

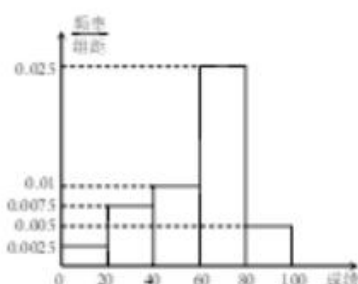
13. $x = -1$ 14. 8 15. 14π 16. $[5-3\sqrt{2}, 5+3\sqrt{2}]$

三. 解答题：本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。17—21 题为必考题，每个试题考生都要作答。22、23 为选考题，考生按要求作答。

(一) 必考题：共 60 分

17. (本小题满分 12 分)

某中学为了解高中数学学习中抽象思维与性别的关系，随机抽取了男生 120 人，女生 80 人进行测试。根据测试成绩按 $[0, 20)$ ， $[20, 40)$ ， $[40, 60)$ ， $[60, 80)$ ， $[80, 100]$ 分组得到右图所示的频率分布直方图，并且男生的测试成绩不小于 60 分的有 80 人。



(1) 求这 200 人测试成绩的中位数和平均数的估计值；(同一区间的数据用该区间中点值作代表)

(2) 填写下面的 2×2 列联表，判断是否有 95% 的把握认为高中数学学习中抽象思维与性别有关。

	成绩小于 60	成绩不小于 60	合计
男			
女			
合计			

附：

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.10	0.050	0.010
k	2.706	3.841	6.635

解：(1) 设中位数的估计值为 x_0 ，则

$$20(0.0025 + 0.0075 + 0.01) + 0.025(x_0 - 60) = 0.5 \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{化简得 } 0.025(x_0 - 60) = 0.1, \text{ 解得 } x_0 = 64$$

$$\therefore \text{中位数的估计值为 } 64 \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

设平均数的估计值为 $\bar{x}$ ，则

$$\bar{x} = 10 \times 20 \times 0.0025 + 30 \times 20 \times 0.0075 + 50 \times 20 \times 0.01 + 70 \times 20 \times 0.025 + 90 \times 20 \times 0.005 \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$= 0.5 + 4.5 + 10 + 35 + 9 = 59$$

$$\therefore \text{平均数的估计值为 } 59 \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

注：中位数估计值的另一算法

$$20 \times 0.005 + 0.025(80 - x_0) = 0.5, \text{ 化简得 } 0.025(80 - x_0) = 0.4, \text{ 解得 } x_0 = 64$$

(2) 成绩小于 60 分的人数为： $200 \times [(0.0025 + 0.0075 + 0.01) \times 20] = 200 \times 0.4 = 80 \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

由题意，得 2×2 列联表如下表： $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

	成绩小于 60	成绩不小于 60	合计
男	40	80	120
女	40	40	80
合计	80	120	200



$$\therefore K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{200 \times (40 \times 40 - 40 \times 80)^2}{80 \times 120 \times 80 \times 120} = \frac{50}{9} > 5 > 3.841 \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

故有 95% 的把握认为高中数学学习中抽象思维与性别有关 $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

18. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$.

(1) 证明: 数列 $\{a_n + 1\}$ 是等比数列;

(2) 设 $b_n = \frac{n}{a_n + 1}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

解: (1) 由 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ 得: $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1) \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

由 $a_1 = 1$ 知: $a_1 + 1 = 2$

$$\therefore \frac{a_{n+1} + 1}{a_n + 1} = 2 \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n + 1\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列 $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 方法一

由 (1) 得: $a_n + 1 = 2^n \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$$\therefore b_n = \frac{n}{a_n + 1} = \frac{n}{2^n} \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} \quad \text{①}$$

$$2S_n = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^{n-1}} \quad \text{②} \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{②} - \text{①} \text{ 得: } S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

方法二

由 (1) 得: $a_n + 1 = 2^n \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$$\therefore b_n = \frac{n}{a_n + 1} = \frac{n}{2^n} \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} \quad \text{①}$$

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \dots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}} \quad \text{②} \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得: } \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^n})}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+2}{2^{n+1}} \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

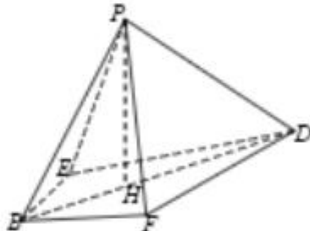
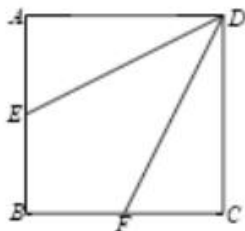
$$\therefore S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. (本小题满分 12 分)

如图, 正方形 $ABCD$ 中, E, F 分别是 AB, BC 的中点, 将 $\triangle AED, \triangle DCF$ 分别沿 DE, DF 折起, 使 A, C 两点重合于点 P , 过 P 作 $PH \perp BD$, 垂足为 H .

(1) 证明: $PH \perp$ 平面 $BFDE$;

(2) 若四棱锥 $P-BFDE$ 的体积为 12, 求正方形的边长.





解: (1) 证明:

方法一

在正方形 $ABCD$ 中, 有 $AC \perp BD$, 由已知得 $EF \parallel AC$

$\therefore EF \perp BD$ 1分

由折叠的性质知: $PD \perp PE$, $PD \perp PF$, $PE \cap PF = P$

$\therefore PD \perp$ 平面 PEF 2分

又 $EF \subset$ 平面 PEF , 故 $PD \perp EF$ 3分

$\therefore PD \cap BD = D$

$\therefore EF \perp$ 平面 PBD 4分

又 $PH \subset$ 平面 PBD , 故 $EF \perp PH$ 5分

$\therefore PH \perp BD$, $EF, BD \subset$ 平面 $BFDE$, 且 EF 与 BD 相交

$\therefore PH \perp$ 平面 $BFDE$ 6分

方法二

在正方形 $ABCD$ 中, 有 $AC \perp BD$, 由已知得 $EF \parallel AC$

$\therefore EF \perp BD$ 1分

由折叠的性质知: $PD \perp PE$, $PD \perp PF$, $PE \cap PF = P$

$\therefore PD \perp$ 平面 PEF 2分

又 $EF \subset$ 平面 PEF , 故 $PD \perp EF$ 3分

$\therefore PD \cap BD = D$

$\therefore EF \perp$ 平面 PBD 4分

又 $EF \subset$ 平面 $BFDE$, 故平面 $BFDE \perp$ 平面 PBD 5分

$\therefore PH \subset$ 平面 PBD , 平面 $BFDE \cap$ 平面 $PBD = BD$, $PH \perp BD$

$\therefore PH \perp$ 平面 $BFDE$ 6分

(2) 方法一

连结 EF , 设 $EF \cap BD = Q$, 正方形 $ABCD$ 的边长为 $2a$ ($a > 0$)

则 $S_{\text{四边形}BFDE} = 4a^2 - 2S_{\triangle ADE} = 2a^2$ 7分

由已知得: $PD = 2a$, $PE = PF = a$, $EF = \sqrt{2}a$, $DQ = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$

$\therefore PE \perp PF$, $PQ = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ 8分

由 (1) 知 $PD \perp PQ$, 在直角 $\triangle PDQ$ 中

由 $PH \perp DQ$ 得: $PH = \frac{PD \times PQ}{DQ} = \frac{2}{3}a$ 10分

又由 (1) 知: $PH \perp$ 平面 $BFDE$

$\therefore V_{P-BFDE} = \frac{1}{3} S_{\text{四边形}BFDE} \cdot PH = \frac{1}{3} \times 2a^2 \times \frac{2}{3}a = \frac{4}{9}a^3 = 12$, 解得 $a = 3$ 11分

$\therefore$ 正方形的边长 6.12分

方法二

连结 EF , 设 $EF \cap BD = Q$, 正方形 $ABCD$ 的边长为 $2a$ ($a > 0$)

由已知得: $PD = 2a$, $PE = PF = a$, $EF = \sqrt{2}a$, $DQ = 3BQ$, $EF \perp BD$ 7分

$\therefore PE \perp PF$, $S_{\triangle DEF} = 3S_{\triangle BEF}$

$\therefore V_{P-DEF} = 3V_{P-BEF}$ 8分

$\therefore V_{P-BFDE} = \frac{4}{3}V_{P-DEF} = \frac{4}{3}V_{P-DEP}$ 9分

由 $PE \perp PF$, $PD \perp PF$, $PD \perp PE$ 得: $V_{P-DEP} = \frac{1}{3} PD \times PE \times PF = \frac{1}{3}a^3$ 10分

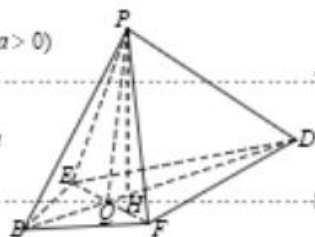
又 $V_{P-BFDE} = 12$

$\therefore \frac{4}{9}a^3 = 12$, 解得 $a = 3$ 11分

$\therefore$ 正方形的边长 6.12分

21. (本小题满分 12 分)

已中市高 2023 届一诊考试文科数学参考答案共 9 页 第 3 页





设函数 $f(x) = e^x - bx - 2b$, $g(x) = ax^2 - x - 1$ ($a < 0$).

(1) 当 $b = 0$ 时, 设 $h(x) = g(x)f(x)$, 求函数 $h(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 求 b 的取值范围.

解: (1) 当 $b = 0$ 时, $h(x) = g(x)f(x) = (ax^2 - x - 1)e^x$, $h'(x) = (ax - 1)(x + 2)e^x$ 1 分

又 $a < 0$, 故 $h'(x) = 0$ 得 $x = -2$, 或 $x = \frac{1}{a}$ 2 分

① 当 $\frac{1}{a} = -2$, 即 $a = -\frac{1}{2}$ 时, $h'(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 e^x \leq 0$ 恒成立

$\therefore h(x)$ 的减区间为 $(-\infty, +\infty)$, 无增区间3 分

② 当 $\frac{1}{a} < -2$, 即 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时, 由 $h'(x) < 0$ 得 $x < \frac{1}{a}$, 或 $x > -2$; 由 $h'(x) > 0$ 得 $\frac{1}{a} < x < -2$

$\therefore h(x)$ 的减区间为 $(-\infty, \frac{1}{a})$, $(-2, +\infty)$, 增区间为 $(\frac{1}{a}, -2)$ 4 分

③ 当 $\frac{1}{a} > -2$, 即 $a < -\frac{1}{2}$ 时, 由 $h'(x) < 0$ 得 $x < -2$, 或 $x > \frac{1}{a}$; 由 $h'(x) > 0$ 得 $-2 < x < \frac{1}{a}$

$\therefore h(x)$ 的减区间为 $(-\infty, -2)$, $(\frac{1}{a}, +\infty)$, 增区间为 $(-2, \frac{1}{a})$ 5 分

综上可得: 当 $a = -\frac{1}{2}$ 时, $h(x)$ 的减区间为 $(-\infty, +\infty)$, 无增区间;

当 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时, $h(x)$ 的减区间为 $(-\infty, \frac{1}{a})$, $(-2, +\infty)$, 增区间为 $(\frac{1}{a}, -2)$;

当 $a < -\frac{1}{2}$ 时, $h(x)$ 的减区间为 $(-\infty, -2)$, $(\frac{1}{a}, +\infty)$, 增区间为 $(-2, \frac{1}{a})$ 6 分

(2) 方法一

$f'(x) = e^x - b$, $x \in \mathbb{R}$

当 $b \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是增函数, 至多一个零点, 不合题意7 分

当 $b > 0$ 时, 由 $f'(x) = 0$ 得 $x = \ln b$, 此时:

若 $x < \ln b$, 则 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 是减函数; 若 $x > \ln b$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 是增函数

$\therefore f(x)_{\min} = f(\ln b) = -b(1 + \ln b)$ 8 分

由函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 得: $-b(1 + \ln b) < 0$, 解得 $b > \frac{1}{e}$ 9 分

当 $b > \frac{1}{e}$ 时, 有 $-2 < \ln b < 2b$

$\therefore f(-2) = e^{-2} > 0 > f(\ln b)$

$\therefore f(x)$ 在 $(-2, \ln b)$ 内有一个零点10 分

令 $F(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1$, 则 $F'(x) = e^x - x - 1$

令 $\varphi(x) = F'(x) = e^x - x - 1$, 则 $\varphi'(x) = e^x - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 恒正

$\therefore F'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $F'(x) > F'(0) = 0$

$\therefore F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

$\therefore F(2b) = e^{2b} - 2b^2 - 2b - 1 = f(2b) - 1 > 0$

$\therefore f(2b) > 1 > 0 > f(\ln b)$

$\therefore f(x)$ 在 $(\ln b, 2b)$ 内也有一个零点11 分

即 当 $b > \frac{1}{e}$ 时, 函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2

$\therefore$ 实数 b 的取值范围为 $[\frac{1}{e}, +\infty)$12 分

方法二

由 $f(x) = 0$ 得: $e^x = b(x + 2)$

故 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 等价于曲线 $y = e^x$ 与直线 $y = b(x + 2)$ 有两个不同的交点

$\therefore$ 当 $x > -2$ 时, 直线 $y = b(x + 2)$ 应在过点 $(-2, 0)$ 的曲线 $y = e^x$ 的切线的上方7 分



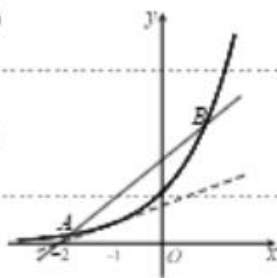
设过点 $(-2, 0)$ 的曲线 $y = e^x$ 的切线与曲线切于点 (x_0, y_0)

则有 $e^{x_0} = \frac{e^{x_0}}{x_0 + 2}$, 解得 $x_0 = -1$ 8分

∴ 过点 $(-2, 0)$ 的曲线 $y = e^x$ 的切线方程为 $y = \frac{1}{e}(x+2)$

∴ $b > \frac{1}{e}$ 9分

当 $b > \frac{1}{e}$ 时



由 $f(-2) = e^{-2} > 0$, $f(-1) = \frac{1}{e} - b < 0$ 知 $f(x)$ 在 $(-2, -1)$ 内有一个零点10分

由直线上升与指数爆炸两种增长形知, 总存在正数 m , 当 $x > m$ 时有 $e^x > b(x+2)$

∴ $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 内也有一个零点11分

∴ 实数 b 的取值范围为 $[\frac{1}{e}, +\infty)$12分

方法三

由 $f(x) = 0$ 得 $e^x = b(x+2)$, 当 $x = -2$ 时等式不成立, 故 $x \neq -2$

∴ $b = \frac{e^x}{x+2}$ ($x \neq -2$)7分

设 $H(x) = \frac{e^x}{x+2}$, 则 $H'(x) = \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$

当 $x < -1$ 且 $x \neq -2$ 时, $H'(x) < 0$, 当 $x > -1$ 时, $H'(x) > 0$

∴ $H(x)$ 在 $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$ 内是减函数, 在 $(-1, +\infty)$ 内是增函数,

$H(x)_{\min} = H(-1) = \frac{1}{e}$ 8分

又 当 $x < -2$ 时, $H(x) < 0$; 当 $x > -2$ 时, $H(x) \geq \frac{1}{e}$

∴ 关于 x 方程 $b = \frac{e^x}{x+2}$ 有两个不同的解的必要条件为 $b > \frac{1}{e}$ 10分

又 当 $x > -2$ 时, 若 $x \rightarrow -2$, 或 $x \rightarrow +\infty$ 时均有 $\frac{e^x}{x+2} \rightarrow +\infty$

∴ 当 $b > \frac{1}{e}$ 时, 方程 $b = \frac{e^x}{x+2}$ 有两个不同的解11分

∴ 实数 b 的取值范围为 $[\frac{1}{e}, +\infty)$12分

方法四

由 $f(x) = 0$ 得: $e^x = b(x+2)$, 当 $b = 0$ 时等式不成立, 故 $b \neq 0$ 7分

于是对 $e^x = b(x+2)$ 变形得 $\frac{1}{b} = \frac{x+2}{e^x}$

设 $G(x) = \frac{x+2}{e^x}$, 则 $G'(x) = -\frac{x+1}{e^x}$

当 $x < -1$ 时 $G'(x) > 0$, $G(x)$ 单调递增; 当 $x > -1$ 时 $G'(x) < 0$, $G(x)$ 单调递减8分

∴ $G(x)_{\max} = G(-1) = e$ 9分

又 当 $x \leq -2$ 时, $G(x) \leq 0$; 当 $x > -2$ 时 $G(x) > 0$

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $G(x) \rightarrow 0$ 10分

∴ 当且仅当 $0 < \frac{1}{b} < e$ 时, 直线 $y = \frac{1}{b}$ 与函数 $G(x)$ 的图象有两个不同的交点11分

∴ $b > \frac{1}{e}$ 时, 函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2

∴ 实数 b 的取值范围为 $[\frac{1}{e}, +\infty)$12分

注:

上述解法中, 若仅说明了在 $x = \ln b$ 的某一侧有一个零点但未说明在两侧各有一零点的扣1分:

巴中市高2023届一诊考试文科数学参考答案共9页 第5页



若未由零点存在定理说明 $b > \frac{1}{e}$ 时 $f(x)$ 一定有两个零点的扣 2 分.

20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 左顶点为 D , 离心率为 $\frac{1}{2}$, 经过 F_1 的直线交椭圆于 A, B 两点, $\triangle F_2AB$ 的周长为 8.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过直线 $x = 4$ 上一点 P 作椭圆 C 的两条切线, 切点分别为 M, N .

①证明: 直线 MN 过定点; ②求 $S_{\triangle DMN}$ 的最大值.

说明: 若点 (x_0, y_0) 在椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上, 则椭圆 C 在点 (x_0, y_0) 处的切线方程为 $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$.

解: (1) 由椭圆的定义及 $\triangle F_2AB$ 的周长为 8 得: $4a = 8$, 解得 $a = 2$ 2 分

由离心率为 $\frac{1}{2}$ 得: $1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{4} = (\frac{1}{2})^2$, 化简得 $b^2 = 3$ 3 分

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 4 分

(2) ①证明

由 (1) 知 $D(-2, 0), F_2(1, 0)$, 设 $P(4, t), M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则

以 M 为切点的椭圆 C 的切线方程为 $\frac{x_1x}{4} + \frac{y_1y}{3} = 1$

以 N 为切点的椭圆 C 的切线方程为 $\frac{x_2x}{4} + \frac{y_2y}{3} = 1$ 5 分

又 两切线均过点 P , 故 $\frac{4x_1}{4} + \frac{y_1t}{3} = 1$, 且 $\frac{4x_2}{4} + \frac{y_2t}{3} = 1$

整理化简得 $3x_1 + y_1t - 3 = 0$, 且 $3x_2 + y_2t - 3 = 0$ 6 分

$\therefore$ 点 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ 均在直线 $3x + ty - 3 = 0$ 上.

$\therefore$ 直线 MN 的方程为 $3x + ty - 3 = 0$, 且直线 MN 过定点 $F_2(1, 0)$ 7 分

②由 $\begin{cases} 3x + ty - 3 = 0, \\ 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0. \end{cases}$ 消去 x 得: $(t^2 + 12)y^2 - 6ty - 27 = 0$

于是, $\Delta = (-6t)^2 - 4(t^2 + 12)(-27) = 144(t^2 + 9) > 0, y_1y_2 < 0$

由求根公式得: $|y_1 - y_2| = \frac{12\sqrt{t^2 + 9}}{t^2 + 12}$ 8 分

方法一

设点 D 到直线 MN 的距离为 d , 则 $d = \frac{9}{\sqrt{9 + t^2}}$ 9 分

$\therefore S_{\triangle DMN} = \frac{1}{2} |MN| d = \frac{1}{2} \times \frac{9}{\sqrt{t^2 + 9}} \times \sqrt{1 + \frac{t^2}{9}} |y_2 - y_1| = \frac{3}{2} |y_2 - y_1| = \frac{18\sqrt{t^2 + 9}}{t^2 + 12}$ 10 分

令 $\sqrt{t^2 + 9} = m$, 则 $S_{\triangle DMN} = \frac{18\sqrt{t^2 + 9}}{t^2 + 12} = \frac{18m}{m^2 + 3}$, 且 $m \geq 3$

设 $f(m) = \frac{18m}{m^2 + 3}, m \geq 3$, 则 $f'(m) = \frac{18(3 - m^2)}{(3 + m^2)^2} < 0$ 11 分

$\therefore$ 函数 $f(m)$ 在 $[3, +\infty)$ 是减函数, 从而 $f(m)_{\max} = f(3) = \frac{9}{2}$

$\therefore S_{\triangle DMN}$ 的最大值为 $\frac{9}{2}$12 分

方法二

$S_{\triangle DMN} = S_{\triangle DMF_2} + S_{\triangle DN F_2} = \frac{1}{2} |DF_2| (|y_1| + |y_2|) = \frac{3}{2} |y_1 - y_2| = \frac{18\sqrt{t^2 + 9}}{t^2 + 12}$ 10 分

下同方法一



方法三

由方法一①知, 直线 MN 的方程为 $3x + y - 3 = 0$, 且直线 MN 过定点 $F_2(1, 0)$ 7 分

令 $t = -\frac{t}{3}$, 则 MN 的方程化为: $x = ty + 1$

$$\begin{cases} x = ty + 1, \\ 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0. \end{cases} \text{ 消去 } x \text{ 得: } (3t^2 + 4)y^2 + 6ty - 9 = 0$$

于是, $\Delta = (6t)^2 - 4(3t^2 + 4)(-9) = 144(t^2 + 1) > 0$, $y_1 y_2 < 0$ 8 分

$$\text{由求根公式得: } |y_1 - y_2| = \frac{12\sqrt{t^2 + 1}}{3t^2 + 4} \text{9 分}$$

$$\therefore S_{\triangle DMN} = S_{\triangle DMF_2} + S_{\triangle DN F_2} = \frac{1}{2} |DF_2| (|y_1| + |y_2|) = \frac{3}{2} |y_1 - y_2| = \frac{18\sqrt{t^2 + 1}}{3t^2 + 4} \text{10 分}$$

下仿方法一求解, 略

(二) 选考题, 共 10 分, 请考生在 22, 23 题中任选一题作答, 如果多做, 按第一题记分.

22. [选修 4—4, 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 1 + t \end{cases}$ (t 为参数), 以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 4\cos\theta + 2\sin\theta$.

(1) 求 l 的普通方程和 C 的直角坐标方程;

(2) 设 $P(1, 1)$, 直线 l 与曲线 C 相交于 A, B 两点, 求 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|}$ 的值.

解: (1) 由 $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 1 + t \end{cases}$ 消去 t 得: $x - 1 = 2(y - 1)$, 整理得 $x - 2y + 1 = 0$

$\therefore l$ 的普通方程为 $x - 2y + 1 = 0$ 2 分

由 $\rho = 4\cos\theta + 2\sin\theta$ 得 $\rho^2 = 4\rho\cos\theta + 2\rho\sin\theta$ 3 分

代入 $\rho^2 = x^2 + y^2$, $\rho\cos\theta = x$, $\rho\sin\theta = y$ 整理得 $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$

$\therefore C$ 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ 5 分

(2) 方法一

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$

$$\text{由 } \begin{cases} x - 2y + 1 = 0, \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x_1 = \frac{9 - 4\sqrt{6}}{5}, \\ y_1 = \frac{7 - 2\sqrt{6}}{5}, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = \frac{9 + 4\sqrt{6}}{5}, \\ y_2 = \frac{7 + 2\sqrt{6}}{5}. \end{cases} \text{7 分}$$

$$\therefore |PA| = \sqrt{(x_1 - 1)^2 + (y_1 - 1)^2} = \frac{2\sqrt{6} - 2}{\sqrt{5}}$$

$$|PB| = \sqrt{(x_2 - 1)^2 + (y_2 - 1)^2} = \frac{2\sqrt{6} + 2}{\sqrt{5}} \text{9 分}$$

$$\therefore \frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{6} - 2} + \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{6} + 2} = \frac{\sqrt{30}}{5} \text{10 分}$$

方法二

点 $P(1, 1)$ 在直线 l 上, 设直线 l 与曲线 C 的交点 A, B 分别对应参数 t_1, t_2 ($t_1 < t_2$)

则 $|PA| = \sqrt{5} |t_1|$, $|PB| = \sqrt{5} |t_2|$ 6 分

$$\therefore \frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{|t_1|} + \frac{1}{|t_2|} \right) \text{7 分}$$

代 $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 1 + t \end{cases}$ 入 $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ 整理得: $5t^2 - 4t - 4 = 0$

$$\text{解得: } t_1 = \frac{2 - 2\sqrt{6}}{5}, t_2 = \frac{2 + 2\sqrt{6}}{5} \text{9 分}$$

$$\therefore \frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{5}{2\sqrt{6} - 2} + \frac{5}{2\sqrt{6} + 2} \right) = \frac{\sqrt{30}}{5} \text{10 分}$$

巴中市高 2023 届一诊考试文科数学参考答案共 9 页 第 7 页



方法三

点 $P(1, 1)$ 在直线 l 上, 设直线 l 与曲线 C 的交点 A, B 分别对应参数 t_1, t_2

则 $|PA| = \sqrt{5}|t_1|, |PB| = \sqrt{5}|t_2|$ 6分

$\therefore \frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{|t_1|} + \frac{1}{|t_2|} \right) = \frac{|t_1| + |t_2|}{\sqrt{5}|t_1 t_2|}$ 7分

代 $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \end{cases}$ 入 $x^2+y^2-4x-2y=0$ 整理得: $5t^2-4t-4=0$

$\therefore t_1+t_2=\frac{4}{5}, t_1 t_2=-\frac{4}{5}$ 8分

$\therefore |t_1|+|t_2|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1 t_2}=\sqrt{\frac{16}{25}+\frac{16}{5}}=\frac{4\sqrt{6}}{5}$ 9分

$\therefore \frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|} = \frac{|t_1|+|t_2|}{\sqrt{5}|t_1 t_2|} = \frac{\sqrt{30}}{5}$ 10分

23. [选修4—5, 不等式选讲] (10分)

设函数 $f(x) = |x+1| + |x+3|$.

(1) 求不等式 $f(x) \leq 4$ 的解集;

(2) 若 $a > 0, b > 0$, 且 $f(a) + f(b) = 12$, 求 $\frac{1}{a}(b + \frac{4}{b})$ 的最小值.

解: (1) 方法一

由 $f(x) \leq 4$ 得 $\begin{cases} -4-2x \leq 4, \\ x \leq -3. \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 2 \leq 4, \\ -3 < x \leq -1. \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 4+2x \leq 4, \\ x > -1. \end{cases}$ 1分

解 $\begin{cases} -4-2x \leq 4, \\ x \leq -3. \end{cases}$ 得 $-4 \leq x \leq -3$ 2分

解 $\begin{cases} 2 \leq 4, \\ -3 < x \leq -1. \end{cases}$ 得 $-3 < x \leq -1$ 3分

解 $\begin{cases} 4+2x \leq 4, \\ x > -1. \end{cases}$ 得 $-1 < x \leq 0$ 4分

$\therefore f(x) \leq 4$ 的解集为 $[-4, 0]$ 5分

方法二

$f(x) \leq 4$ 即 $|x+1| + |x+3| \leq 4$, 其几何意义为:

数轴上实数 x 对应的点到 -4 与 -1 所对点的距离之和小于 4 的点的集合2分

又 $f(0) = f(-4) = 4$ 3分

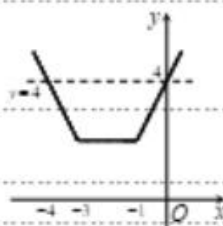
$\therefore f(x) \leq 4$ 的解集为 $[-4, 0]$ 5分

方法三

$f(x) = \begin{cases} -4-2x, & x \leq -3, \\ 2, & -3 < x \leq -1, \\ 2x+4, & x > -1. \end{cases}$ 其图象如右图3分

又 $f(0) = f(-4) = 4$ 4分

$\therefore f(x) \leq 4$ 的解集为 $[-4, 0]$ 5分



(2) 方法一

由 $a > 0, b > 0$ 且 $f(a) + f(b) = 12$ 得: $a+b=2, 0 < a < 2, 0 < b < 2$ 6分

$\therefore \frac{1}{a}(b + \frac{4}{b}) = \frac{b}{a} + \frac{4}{ab} = \frac{2-a}{a} + \frac{2(a+b)}{ab} = \frac{4}{a} + \frac{2}{b} - 1$ 7分

$\therefore \frac{4}{a} + \frac{2}{b} = (a+b)(\frac{4}{a} + \frac{2}{b}) = 3 + \frac{2a}{b} + \frac{b}{a} \geq 3 + 2\sqrt{\frac{2a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 3 + 2\sqrt{2}$ 8分

当且仅当 $\frac{2a}{b} = \frac{b}{a}$, 即 $a = 2\sqrt{2} - 2, b = 4 - 2\sqrt{2}$ 时取等号9分

$\therefore \frac{1}{a}(b + \frac{4}{b})$ 的最小值为 $2 + 2\sqrt{2}$10分

方法二



由 $a > 0, b > 0$ 且 $f(a) + f(b) = 12$ 得: $a + b = 2, 0 < a < 2, 0 < b < 2$ -----6 分

$\therefore \frac{1}{a}(b + \frac{4}{b}) = \frac{b}{a} + \frac{4}{ab} = \frac{b}{a} + \frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{2b}{a} + \frac{a}{b} + 2$ -----7 分

$\therefore \frac{2b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{2b}{a} \times \frac{a}{b}} = 2\sqrt{2}$ -----8 分

当且仅当 $\frac{2a}{b} = \frac{b}{a}$, 即 $a = 2\sqrt{2} - 2, b = 4 - 2\sqrt{2}$ 时取等号 -----9 分

$\therefore \frac{1}{a}(b + \frac{4}{b})$ 的最小值为 $2 + 2\sqrt{2}$. -----10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线