

哈三中 2022—2023 学年度下学期 高一学年期末考试 数学 试卷

考试说明：本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，满分 150 分。

考试时间为 120 分钟。

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂，非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整，字迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁，不得折叠、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、刮纸刀。

第 I 卷（选择题，共 60 分）

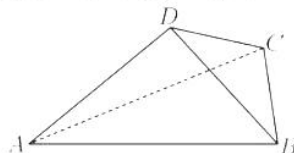
一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z = \frac{3-i}{1+i}$ ，则 z 的虚部为（ ）
A. $2i$ B. 2 C. -2 D. $-2i$
2. 已知 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是两个不共线的向量，向量 $\vec{a} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2, \vec{b} = k\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ ，若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，则 $k =$ （ ）
A. $-\frac{3}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $-\frac{2}{3}$
3. 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长均相等，点 M 为 A_1B_1 的中点，则异面直线 AM 与 B_1C 所成角的余弦值为（ ）
A. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{4}$
1. 下列说法不正确的是（ ）
A. 8 个数据的平均数为 5，另 3 个数据的平均数为 7，则这 11 个数据的平均数是 $\frac{61}{11}$
B. 用抽签法从含有 20 个个体的总体中抽取一个容量为 4 的样本，则个体甲和乙被抽到的概率均为 0.2
C. 一组数据 4,3,2,6,5,8 的 60% 分位数为 6
D. 若样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ 的平均数为 2，则数据 $2x_1-1, 2x_2-1, \dots, 2x_{10}-1$ 的平均数为

5. 如图, 在四面体 $ABCD$ 中, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle BAD = \angle CAD = 45^\circ$, $AD = \sqrt{2}$,

$AB = AC = 3$, 则 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{9}{2}$ D. $3\sqrt{2}$



6. 龙洗, 古代中国盥洗用具, 状貌像鼎, 用青铜铸造, 因盆内有龙纹而称之为龙洗, 中国传说中也称作聚宝盆. 其盆体可以近似看作一个圆台, 现有一龙洗盆高 12cm, 盆口直径 24cm, 盆底直径 12cm. 现往盆内注水, 当水深为 4cm 时, 则盆内水的体积为 ()

- A. $\frac{1184}{3}\pi\text{cm}^3$ B. $\frac{592}{3}\pi\text{cm}^3$
C. $\frac{896}{3}\pi\text{cm}^3$ D. $\frac{1248}{3}\pi\text{cm}^3$



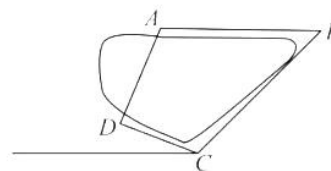
7. 已知 A, B, C, D 是同一个球面上的四个点, 其中 $\triangle ABC$ 是正三角形, $AD \perp$ 平面 ABC ,

$AD = 3AB = 18$, 则该球的表面积为 ()

- A. 372π B. 396π
C. 432π D. 1344π

8. 为运输方便, 某工程队将从 A 到 D 修建一条湖底隧道,

如图, 工程队从 A 出发向正东行 $10\sqrt{3}\text{ km}$ 到达 B , 然后从 B 向南偏西 45° 方向行了一段距离到达 C , 再从 C 向北偏西 75° 方向行了 $4\sqrt{2}\text{ km}$ 到达 D , 已知 C 在 A 南偏东 15° 方向上, 则 A 到 D 的距离为 ()



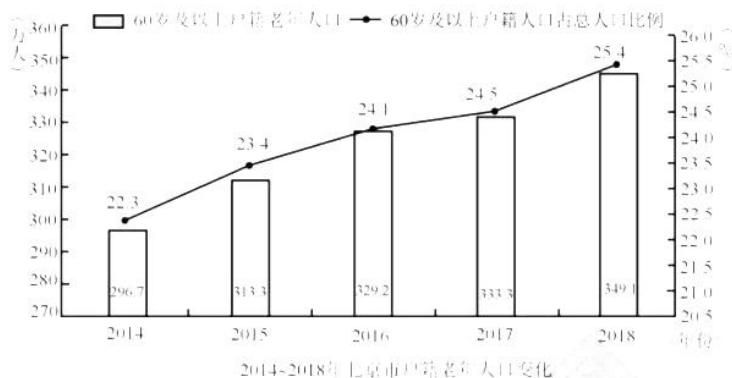
- A. $15\sqrt{6}\text{ km}$ B. $2\sqrt{38}\text{ km}$ C. $10\sqrt{2}\text{ km}$ D. $15\sqrt{3}\text{ km}$

- 二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 对于两个平面 α , β 和两条直线 m , n , 下列命题中假命题是 ()

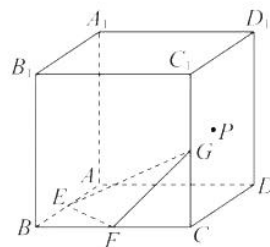
- A. 若 $m \perp \alpha$, $m \perp n$, 则 $n \parallel \alpha$
B. 若 $m \parallel \alpha$, $\alpha \perp \beta$, 则 $m \perp \beta$
C. 若 $m \perp \alpha$, $n \perp \beta$, $\alpha \perp \beta$, 则 $m \perp n$
D. 若平面 α 内有不共线的三点到平面 β 的距离相等, 则 $\alpha \parallel \beta$

10. 目前,我国老年人口比例不断上升,造成日趋严峻的人口老龄化问题.2019年10月12日,北京市老龄办、市老龄协会联合北京师范大学中国公益研究院发布《北京市老龄事业发展报告(2018)》,相关数据有如下图.下列说法中正确的是()



- A. 2014年以来,60岁及以上户籍人口比例的增长速度逐年上升
B. 2014年至2018年,60岁及以上户籍人口比例逐年增加
C. 2014年至2018年,60岁及以上户籍老年人口的30%分位数为313.3万人
D. 估算北京市2018年户籍总人口数约为1374万人
11. 小佳和小明两人进行篮球比赛,小佳投中的概率为0.8,小明投不中的概率为0.2,且两人投篮互不影响,现两人各投篮一次,记“小明投中”为事件 A ,“至少1人投中”为事件 B ,则下列说法正确的是()
- A. $P(\bar{A}) = 0.2$ B. $P(B) = 0.16$
C. $P(AB) = 0.8$ D. $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B})$
12. 如图,在棱长为6的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F, G 分别为 AB, BC, CC_1 的中点,点 P 是正方形 DCC_1D_1 面内(包含边界)的动点,则()

- A. 设直线 B_1P 与平面 CC_1D_1D 所成角为 θ ,则 $\sin \theta$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$
B. 平面 EFG 截正方体所得截面的面积为 $27\sqrt{3}$



C. 若 $BP \perp AC$, 则 P 点运动轨迹的长度为 $3\sqrt{2}$

D. 若点 P 为 DD_1 中点, 经过 B_1P 的平面 α 交棱 C_1D_1 于点 R , 交棱 AD 于点 Q , 则

$$\triangle B_1RP \text{ 面积的最小值为 } \frac{27\sqrt{5}}{5}, \text{ 最大值为 } \frac{27}{2}$$

第II卷 (非选择题, 共 90 分)

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若一个样本 $m, 4, 6, 7$ 的平均数是 5, 则这个样本的方差为_____.

14. 若 $z \in \mathbb{C}$, 且满足 $|z+1-i|=1$, 则 $|z-1-i|$ 的最大值为_____.

15. 四个人围坐在一张圆桌旁, 每个人面前放着完全相同的硬币, 所有人同时抛掷自己的硬币. 若硬币正面朝上, 则这个人站起来; 若硬币正面朝下, 则这个人继续坐着. 那么没有相邻的两个人站起来的概率为_____.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$, $AB = 2$, $AC = 1$, 点 D 为边 BC 边上一动点, 将 $\triangle ABD$ 沿着 AD 翻折, 使得点 B 到达 B' , 且平面 $AB'D \perp$ 平面 ACD , 则当 $B'C$ 最小时, CD 的长度为_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $(a+b+c)(b+c-a) = 3bc$.

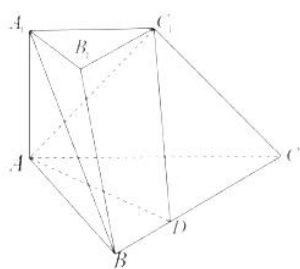
(I) 求角 A ;

(II) 若 $a = 2$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求 b, c 的值.

18. (本小题满分 12 分)

如图, 在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 底面 $\triangle ABC$ 为等边三角形, $AA_1 \perp$ 平面 ABC ,

$AC = 2AA_1 = 2A_1C_1 = 2$, 其中 D 为 BC 上的点, 且 $DC = 2BD$.

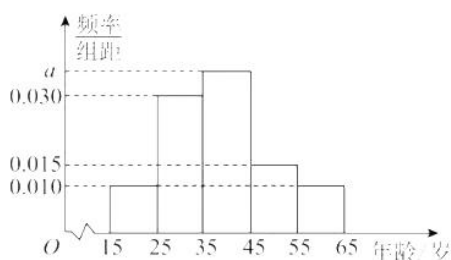


(I) 求证: $A_1B \parallel$ 平面 AC_1D ;

(II) 求平面 ABC_1 与平面 AA_1C_1C 夹角的余弦值.

19. (本小题满分 12 分)

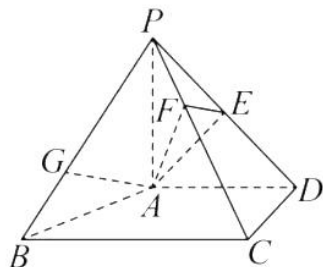
数字人民币在数字经济时代中体现的价值、交易媒介和支付手段职能，为各地数字经济建设提供了安全、便捷的支付方式，同时也为金融监管、金融产品设计提供更多选择性和可能性。苏州作为全国首批数字人民币试点城市之一，提出了 2023 年交易金额达 2 万亿元的目标。现从使用数字人民币的市民中随机选出 200 人，并将他们按年龄(单位：岁)进行分组：第 1 组 $[15,25)$ ，第 2 组 $[25,35)$ ，第 3 组 $[35,45)$ ，第 4 组 $[45,55)$ ，第 5 组 $[55,65]$ ，得到如图所示的频率分布直方图。



- (I) 求直方图中 a 的值并估算样本平均年龄(同组中的数据用该组区间的中点值作代表)及第 78 百分位数；
- (II) 在这 200 位市民中用分层随机抽样的方法从年龄在 $[25,35)$ 和 $[45,55)$ 内抽取 6 位市民做问卷调查，现从这 6 位中随机抽取两名幸运市民，求两名幸运市民年龄都在 $[25,35)$ 内的概率。

20. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \perp CD$, $AD \parallel BC$,

$PA = AD = CD = 1$, $BC = 2$, $PB = \sqrt{3}$. E 为 PD 的中点, 点 F 在 PC 上, 且 $\frac{PF}{FC} = \frac{1}{2}$.



(I) 求证: $PA \perp$ 平面 $ABCD$;

(II) 在棱 BP 上是否存在点 G , 使得点 G 到平面 AEF 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{9}$, 若存在求出点

G 的位置, 不存在请说明理由.

21. 已知 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, 且 $\frac{a-c}{b-\sqrt{2}c} = \frac{\sin(A+C)}{\sin A + \sin C}$.

(I) 求角 A 的大小;

(II) 若 $a = \sqrt{2}$, O 为 $\triangle ABC$ 外接圆圆心, 求 $|3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}|$ 的最小值;

(III) 在 (II) 条件下, P 为 $\triangle ABC$ 外接圆上一动点, 求 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}$ 的最大值.

22. 等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = \sqrt{2} + 1$, $CD = 1$. 若点 E 、 F 均在 AB 上, 且 $AE = BF$. 如图 (一) 所示, 沿 DE 将 $\triangle ADE$ 折起, 沿 CF 将 $\triangle BCF$ 折起, 使 A 、 B 两点重合为 S .

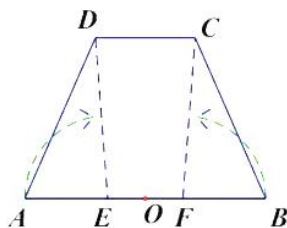


图 (一)

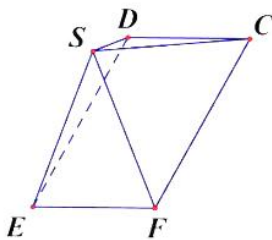


图 (二)

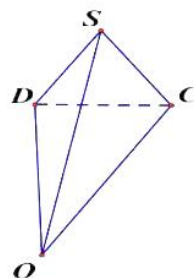


图 (三)

- (I) 若 $AE = BF = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 求证: 平面 $SDE \perp$ 平面 SCF ;
- (II) 若 $AD = 1$, O 为 AB 中点, 当 E 与 F 重合于 O 时, 求 SO 与平面 SCD 所成角的余弦值;
- (III) 请设计一个翻折方案使四棱锥 $S-CDEF$ 的外接球半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 证明你的结论, 并求此方案下的 AD 的长度及 $\angle DEF$ 的大小.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线