2024 届新高三第一次大联考
数学参考答案及评分细则

1.【答案】B

【解析】$N=\{x\mid(x-4)(x+1)\leqslant 0\}=[-1,4]$,所以 $M\cap N=\{-1,4\}$,故选 B.

2.【答案】C

【解析】由已知得 $\bar{z}=\dfrac{2i^2-3i}{1-i}=\dfrac{(-2-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}i$,所以 $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}i$,所以 z 的虚部为 $\dfrac{5}{2}$,故选 C.

3.【答案】A

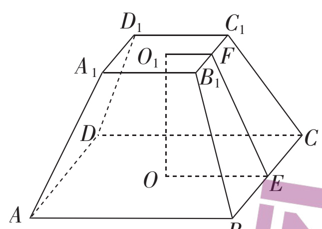
【解析】$f'(x)=2+\sin x$,$\therefore f'(0)=2$,又 $f(0)=1$,所以 l 的方程为 $y=2x+1$,令 $y=0$,得 $x=-\dfrac{1}{2}$,即直线 l 在 x 轴上的截距为 $-\dfrac{1}{2}$,故选 A.

4.【答案】B

【解析】由题图知 $\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=\dfrac{15}{3}=5$,则 $\tan\theta=\dfrac{2}{3}$,所以 $\dfrac{\sin 2\theta}{2\cos^2\theta-3\sin^2\theta}=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta-3\sin^2\theta}=\dfrac{2\tan\theta}{2-3\tan^2\theta}=2$,故选 B.

5.【答案】A

【解析】如图,设该正四棱台为 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$,其上、下面底中心分别为 O_1,O,分别取 BC,B_1C_1 的中点 E,F,连接 OO_1,O_1F,EF,OE,则 $OO_1=9$,$OE=\dfrac{1}{2}AB=17.25$,$O_1F=16$,所以 $EF=\sqrt{OO_1^2+(OE-O_1F)^2}=\dfrac{\sqrt{1\ 321}}{4}\approx 9.1$ m,故选 A.



6.【答案】C

【解析】当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 时,$a_na_{n+1}=1$,所以 $T_{100}=(a_1a_2)\cdot(a_3a_4)\cdot\cdots\cdot(a_{99}a_{100})=1^{50}=1$,A 正确;$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ 时,$a_na_{n+1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$,$a_{n+1}a_{n+2}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$,两式相除得 $\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=\dfrac{1}{2}$,所以 $a_9=a_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{a_1}{16}$,B 正确;由 $\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=\sin\alpha\leqslant 1$ 及 $\{a_n\}$ 各项均为正数,可得 $a_{2k+1}\leqslant a_{2k-1}$,C 错误;若 $\{a_n\}$ 为等比数列,设其公比为 q,则 $a_na_{n+1}=\dfrac{a_1^2}{q}(q^2)^n$,所以 $\dfrac{a_1^2}{q}=1$,$q^2=\sin\alpha$,$a_1=\sqrt{q}=\sqrt[4]{\sin\alpha}$,D 正确,故选 C.

7.【答案】D

【解析】因为对任意的 $0<m<n$,都有 $\dfrac{f(m)-f(n)}{m-n}<0$,所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,且 $f(4)=0$,又 $f(x)$ 为奇函数,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上也单调递减,且 $f(-4)=0$,所以当 $x\in(-\infty,-4)\cup(0,4)$ 时,$f(x)>0$,当 $x\in(-4,0)\cup(4,+\infty)$ 时,$f(x)<0$,所以由 $\dfrac{f(-x-2)-f(x+2)}{x}>0$,得 $\dfrac{-2f(x+2)}{x}>0$,即 $xf(x+2)<0$,所以

自主选拔在线 www.zizzs.com

$\begin{cases}x<0,\\x+2<-4,\end{cases}$或$\begin{cases}x<0,\\0<x+2<4,\end{cases}$或$\begin{cases}x>0,\\x+2>4,\end{cases}$解得 $x<-6$ 或 $-2<x<0$ 或 $x>2$，所以原不等式的解集为 $(-\infty,-6)\cup(-2,0)\cup(2,+\infty)$，故选 D.

8.【答案】C

【解析】设 $f(x)=\ln(x+1)-x(x>-1)$，则 $f'(x)=\frac{1}{x+1}-1=-\frac{x}{x+1}$，故当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减. 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值，也是最大值，即 $f(x)=\ln(x+1)-x\leqslant f(0)=0$，即 $\ln(x+1)\leqslant x$，所以 $x+1\leqslant e^x$，所以 $\ln(x+1)\leqslant x\leqslant e^x-1$（当且仅当 $x=0$ 时取等号），所以 $\ln 1.2=\ln(1+0.2)<0.2<e^{0.2}-1<e^{0.25}-1$，即 $a<b$. 设 $g(x)=\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{x}{(x+1)^2}>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)>\ln 1-0=0$，故 $g(0.2)=\ln(0.2+1)-\frac{0.2}{0.2+1}>0$，所以 $\ln 1.2>\frac{1}{6}$，即 $c<a$，所以 $c<a<b$，故选 C.

9.【答案】ABD

【解析】因为 $a+b<0,c+d>0$，故 $a+b<c+d$，A 正确；因为 $a<b,c>0$，所以 $ac<bc$，B 正确；令 $a=-4,b=-3,c=1,d=2$，则 $ab>cd$，故 C 错误；由 $0<c<d$，得 $\frac{1}{c}>\frac{1}{d}$，又 $a<0$，所以 $\frac{a}{c}<\frac{a}{d}$，D 正确，故选 ABD.

10.【答案】ACD

【解析】将这 6 个数据按从小到大排列为 84，91，95，95，98，100，其中 95 出现 2 次，故 A 正确；中位数为第 3，4 个数据的平均数 95，B 错误；平均数为 $\frac{84+91+95+95+98+100}{6}=93\frac{5}{6}>93$，故 C 正确；$6\times0.25=1.5$，故 25% 分位数为第 2 个数 91，D 正确，故选 ACD.

11.【答案】ABC

【解析】对于 A，因为 $A_1B_1/\!/AB$，$AB\subset$ 平面 ABC_1，$A_1B_1\not\subset$ 平面 ABC_1，所以 $A_1B_1/\!/$ 平面 ABC_1，A 正确；对于 B，易证得 $AC_1\perp A_1C$，$AC_1\perp BC$，又 $BC\cap A_1C=C$，所以 $AC_1\perp$ 平面 A_1BC，所以平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABC_1，B 正确；对于 C，由 $AC/\!/A_1C_1$，可知 $\angle C_1A_1B$ 即为异面直线 AC 与 A_1B 所成的角，在 $\triangle C_1A_1B$ 中，$A_1C_1=1$，$C_1B=\sqrt{2}$，$A_1B=\sqrt{3}$，所以 $A_1C_1\perp BC_1$，所以 $\cos\angle C_1A_1B=\frac{A_1C_1}{A_1B}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，C 正确；对于 D，三棱锥 A_1-ABC 的外接球即为直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球，而该直三棱柱可补形为棱长为 1 的正方体，故其外接球的半径 $R=\frac{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，D 错误，故选 ABC.

12.【答案】BC

【解析】分别过 C 的顶点 $(2,0)$，$(0,\sqrt{3})$ 作 C 的切线，则两切线的交点 $Q(2,\sqrt{3})$ 在 C 的蒙日圆上，故蒙日圆的半径 $r=|OQ|=\sqrt{7}$，即 C 的蒙日圆的方程为 $x^2+y^2=7$，A 错误；对于 B，由椭圆的定义得 $|AN|+|AF_2|=|AN|+4-|AF_1|=4+|AN|-|AF_1|\leqslant4+|NF_1|=4+\sqrt{(-1-1)^2+1^2}=4+\sqrt{5}$，当且仅当点 A 在 NF_1 的延长线上时取等号，$|AN|+|AF_2|=4-(|AF_1|-|AN|)\geqslant4-|NF_1|=4-\sqrt{5}$，当且仅当点 A 在 F_1N 的延长线上时取等号，所以 $|AN|+|AF_2|$ 的取值范围为 $[4-\sqrt{5},4+\sqrt{5}]$，B 正确；对于 C，在方程 $x^2+y^2=7$ 中，令 $x=y>0$，得 $x=y=\frac{\sqrt{14}}{2}$，故 $P\left(\frac{\sqrt{14}}{2},\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$，设切点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则根据椭圆上一点的切线方程的结论可得两切线方程分别为 $\frac{x_1x}{4}+\frac{y_1y}{3}=1$，$\frac{x_2x}{4}+\frac{y_2y}{3}=1$，又 PA，PB 均过点 $P\left(\frac{\sqrt{14}}{2},\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$，所以 $\frac{\sqrt{14}x_1}{8}+\frac{\sqrt{14}y_1}{6}=1$，$\frac{\sqrt{14}x_2}{8}+$

$\dfrac{\sqrt{14}y_2}{6}=1$，根据方程同解原理可得，直线 AB 的方程为 $3\sqrt{14}x+4\sqrt{14}y-24=0$，C 正确；对于 D，$|GF_1|+|GF_2|=2a=4$，则 $|GF_1|^2+|GF_2|^2+2|GF_1|\cdot|GF_2|=16$，所以 $|GF_1|^2+|GF_2|^2=10$，由 $\begin{cases}\overrightarrow{GF_1}+\overrightarrow{GF_2}=2\overrightarrow{GO},\\ \overrightarrow{GF_1}-\overrightarrow{GF_2}=\overrightarrow{F_2F_1},\end{cases}$ 得 $|\overrightarrow{GF_1}|^2+|\overrightarrow{GF_2}|^2+2\overrightarrow{GF_1}\cdot\overrightarrow{GF_2}=4|\overrightarrow{GO}|^2$①，$|\overrightarrow{GF_1}|^2+|\overrightarrow{GF_2}|^2-2\overrightarrow{GF_1}\cdot\overrightarrow{GF_2}=|\overrightarrow{F_2F_1}|^2$②，则①+②得 $20=4|\overrightarrow{GO}|^2+4$，解得 $|\overrightarrow{GO}|^2=4$，所以 $|GP|\cdot|GQ|=(r-|GO|)(r+|GO|)=r^2-|GO|^2=7-4=3$，故 D 错误，故选 BC.

13.【答案】-2

【解析】由已知得 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，$\therefore\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=m+2=0$，$\therefore\ m=-2$.

14.【答案】$\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{4}=1$

【解析】设 C 的实半轴长、虚半轴长、半焦距分别为 a,b,c，由已知得 $\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{a}{b}=2$，即 $\dfrac{c}{b}=2$，又焦距为 8，所以 $c=4$，$b=2$，$a^2=c^2-b^2=12$，所以 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{4}=1$.

15.【答案】2 280

【解析】共分两大类：(1)来自江西的散文家选出 2 人，此时排课方法数为 $N_1=\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_5^3\mathrm{A}_3^3\mathrm{A}_4^2=2\ 160$；(2)来自江西的散文家选出 3 人，此时排课方法数为 $N_2=\mathrm{C}_3^3\mathrm{C}_5^2\mathrm{A}_2^2\mathrm{A}_3^3=120$，故不同的排课方法数共有 $N=N_1+N_2=2\ 280$.

16.【答案】$\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{2}\right)\cup\{2\}$

【解析】易求得 $f(x)=\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$，依题意得 $\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{T}{2}$，$\therefore\ T\geqslant\pi$，$\because\ T=\dfrac{2\pi}{\omega}$，$\therefore\ 0<\omega\leqslant2$. $\because\ x\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right)$，$\therefore\ \dfrac{\pi}{3}\omega-\dfrac{\pi}{6}<\omega x-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}\omega-\dfrac{\pi}{6}$，因为函数 $f(x)=\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right)$ 内有零点，无最值，$\therefore\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\leqslant\dfrac{\pi}{3}\omega-\dfrac{\pi}{6}<k\pi,\\ k\pi<\dfrac{5\pi}{6}\omega-\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\begin{cases}-1+3k\leqslant\omega<\dfrac{1}{2}+3k,\\ \dfrac{6}{5}k+\dfrac{1}{5}<\omega\leqslant\dfrac{4}{5}+\dfrac{6}{5}k\end{cases}(k\in\mathbf{Z})$，当 $k=0$ 时，$\dfrac{1}{5}<\omega<\dfrac{1}{2}$ 满足条件，当 $k=1$ 时，$\omega=2$ 满足条件，当 $k\geqslant2$ 时，显然不满足条件. 综上可得 $\omega\in\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{2}\right)\cup\{2\}$.

【评分细则】

1. 第 14 题答案不写成标准形式不给分.
2. 第 16 题答案也可写成集合或不等式的形式.

17. 解：(1)设等差数列的公差为 d，

由题意可得 $\begin{cases}2a_1+3d=8,\\ 5a_1+10d=25,\end{cases}$ (2 分)

解得 $\begin{cases}a_1=1,\\ d=2,\end{cases}$ (4 分)

所以 $a_n=1+2(n-1)=2n-1$. (5 分)

(2) $S_n=\dfrac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$，(6 分)

所以 $b_n=(-1)^nS_n=(-1)^nn^2$. (7 分)

所以 $T_n=-1^2+2^2-3^2+4^2-\cdots-29^2+30^2$

$=(2-1)\times(1+2)+(4-3)\times(3+4)-\cdots+(30-29)\times(29+30)$

$=1+2+3+4+\cdots+29+30$

$=\dfrac{30\times(1+30)}{2}$

$=465$.(10 分)

【评分细则】

1. 第(1)小题未设出公差为 d,而直接列出关于 a_1 与 d 的方程组,不扣分.

2. 第(2)小题若利用其他方法求解(如逐一计算),只要答案无误便给满分.

18. 解:(1)由已知及正弦定理得 $\sqrt{3}\sin C\sin A\sin B=\sin A\sin C+\sin A\sin C\cos B$,

又 $A,C\in(0,\pi)$,所以 $\sin A\neq0$,$\sin C\neq0$,

所以 $\sqrt{3}\sin B=1+\cos B$,

即 $\sqrt{3}\sin B-\cos B=1$,

所以 $\sin\left(B-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$,(3 分)

因为 $0<B<\pi$,所以 $-\dfrac{\pi}{6}<B-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$,(4 分)

所以 $B-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$,即 $B=\dfrac{\pi}{3}$.(6 分)

(2)由 $S_{\triangle CBD}+S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ABC}$,

得 $\dfrac{1}{2}a\cdot BD\sin\angle CBD+\dfrac{1}{2}c\cdot BD\sin\angle ABD=\dfrac{1}{2}ac\sin\angle ABC$.

所以 $\dfrac{1}{2}a\cdot BD\sin\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}c\cdot BD\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}ac\sin\dfrac{\pi}{3}$.(8 分)

即 $\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}c\cdot\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\times3c\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,(10 分)

解得 $c=\dfrac{3}{2}$.(12 分)

【评分细则】

1. 第(1)小题未确定 $B-\dfrac{\pi}{6}$ 的范围,而直接得到 $B=\dfrac{\pi}{3}$,扣 1 分.

2. 第(2)小题若利用其他方法求解,只要答案无误便给满分.

19. (1)证明:取 AB 的中点 F,连接 CF,所以 $AF=CD$,

又因为 $AF\parallel CD$,所以四边形 $AFCD$ 是平行四边形.

因为 $AD\perp CD$,$AD=CD$,所以四边形 $AFCD$ 是正方形,(1 分)

则 $AB\perp CF$,$CF=AD=1$,所以 $AC=BC=\sqrt{2}$,

得到 $AC^2+BC^2=AB^2$,所以 $BC\perp AC$.

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$,所以 $PA\perp BC$,(3 分)

又因为 $PA\cap AC=A$,

所以 $BC\perp$ 平面 PAC.

因为 $PC\subset$ 平面 PAC,

所以 $BC\perp PC$.(4 分)

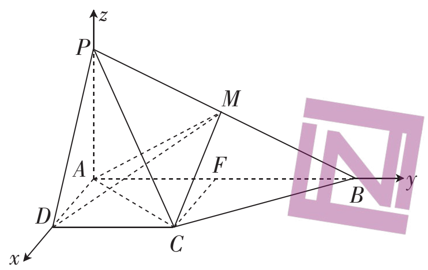
又点 M 是 BP 的中点,

所以 $PB=2CM$.（5 分）

（2）解：因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AD,AB\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PA\perp AD$，$PA\perp AB$，则 PA,AD,AB 两两垂直，

如图以 A 为坐标原点，AD,AB,AP 所在的直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系 $A-xyz$.



则 $A(0,0,0)$，$C(1,1,0)$，$D(1,0,0)$，$M\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$，

所以 $\overrightarrow{DM}=\left(-1,1,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{AM}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$.（7 分）

设平面 ACM 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y=0,\\ y+\frac{1}{2}z=0,\end{cases}$

令 $z=2$，则 $x=1$，$y=-1$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,-1,2)$，（9 分）

设直线 DM 与平面 ACM 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{DM}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DM}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{DM}|}=\dfrac{\left|-1\times1+1\times(-1)+\frac{1}{2}\times2\right|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\times\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$.（11 分）

所以直线 DM 与平面 ACM 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{9}$.（12 分）

【评分细则】

1. 第（1）小题若用其他方法证明，酌情给分.
2. 第（2）小题也可不用空间向量法求解，只要解答过程无误，给满分.

20. 解：（1）由题意可知，当点 O 到直线 l 的距离最大时，$AB\perp x$ 轴，（1 分）

将 $x=\frac{p}{2}$ 代入 $y^2=2px$，得 $y=\pm p$，

所以 $AB=2p=4$，所以 $p=2$，

所以 C 的标准方程为 $y^2=4x$.（4 分）

（2）由（1）得 $F(1,0)$.

设 $l:x=my+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

联立得 $\begin{cases}x=my+1,\\ y^2=4x,\end{cases}$

消去 x，得 $y^2-4my-4=0$，则 $y_1y_2=-4$，（7 分）

由 P 为 BD 的中点，得 P 点的纵坐标为 $\frac{1}{2}y_2$，

所以 $S=\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_1|+\frac{1}{2}|OF|\cdot\left|\frac{y_2}{2}\right|=\frac{1}{2}\left(|y_1|+\left|\frac{y_2}{2}\right|\right)\geqslant\frac{1}{2}\times2\sqrt{|y_1|\cdot\left|\frac{y_2}{2}\right|}=\sqrt{2}$，（11 分）

当且仅当$|y_1| = \left|\frac{y_2}{2}\right|$,即$|y_1| = \sqrt{2}$, $|y_2| = 2\sqrt{2}$时取等号.

所以S的最小值为$\sqrt{2}$.(12 分)

【评分细则】

1. 第(2)小题中,也可设直线$l: y = k(x-1)$,但需讨论斜率不存在这一种情形,若未讨论则扣1分.

2. 第(2)小题若用其他方法(如导数法)求面积的最值,酌情给分.

21. 解:(1)$\chi^2 = \frac{100\times(40\times30-20\times10)^2}{60\times40\times50\times50} = \frac{50}{3}\approx16.667>10.828$,(3 分)

所以有99.9%的把握认为M社区的市民是否喜欢网上买菜与年龄有关.(4 分)

(2)记事件A:张无忌周一选择A平台买菜,事件B:张无忌周二选择B平台买菜,

则$P(A) = P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$, $P(B|A) = 1-\frac{4}{5} = \frac{1}{5}$, $P(B|\bar{A}) = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$,

由全概率公式可得$P(B) = P(A)\cdot P(B|A) + P(\bar{A})\cdot P(B|\bar{A}) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{13}{30}$.

因此,张无忌周二选择B平台买菜的概率为$\frac{13}{30}$.(7 分)

(3)利用样本分布的频率估算总体分布的概率,可得M社区的市民喜欢网上买菜的概率为$p = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$,(8 分)

则$X\sim B\left(20,\frac{3}{5}\right)$,

所以$P(X=k) = C_{20}^{k}\times\left(\frac{3}{5}\right)^{k}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{20-k}$ $(k=0,1,2,\cdots,20)$.(9 分)

设$t = \frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} = \frac{C_{20}^{k}\times\left(\frac{3}{5}\right)^{k}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{20-k}}{C_{20}^{k-1}\times\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{21-k}} = \frac{3(21-k)}{2k}$.

若$t>1$,则$k<12.6$, $P(X=k)>P(X=k-1)$;

若$t<1$,则$k>12.6$, $P(X=k)<P(X=k-1)$.

所以$k=12$时,$P(X=k)$最大,

故使$P(X=k)$取得最大值的k值为12.(12 分)

【评分细则】

1. 第(1)小题中χ^2的值写成$\frac{50}{3}$或保留其他小数位,都不扣分.

2. 第(2)小题若未将事件用字母表示,直接求得正确的概率也给满分.

22. 解:(1) $f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$,

$f'(x) = \frac{a}{x+1}-a = \frac{a(1-x-1)}{x+1} = -\frac{ax}{x+1}$,(1 分)

当$a>0$时,令$f'(x)>0$,得$-1<x<0$,此时$f(x)$单调递增;

令$f'(x)<0$,得$x>0$,此时$f(x)$单调递减.(3 分)

当$a<0$时,令$f'(x)<0$,得$-1<x<0$,此时$f(x)$单调递减;

令$f'(x)>0$,得$x>0$,此时$f(x)$单调递增.

综上所述,当$a>0$时,$f(x)$在$(-1,0)$上单调递增,在$(0,+\infty)$上单调递减;当$a<0$时,$f(x)$在$(-1,0)$上单调递减,在$(0,+\infty)$上单调递增.(5 分)

(2)记$t=(x+1)-\ln(x+1)$,

由(1)得当$a=1$时,$f(x)\leqslant f(0)=0$,即$\ln(x+1)-x\leqslant0$,

所以 $t \geqslant 1$，即 $t \in [1,+\infty)$，（7 分）

当 $x>-1$ 时，$f(x)>\dfrac{ax-\mathrm{e}^{x+1}+a}{x+1}$等价于不等式$f(x)>a-\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{x+1}$对 $x>-1$ 恒成立，

即$\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{x+1}+a\ln(x+1)-a(x+1)>0$ 对 $x>-1$ 恒成立，

即 $\mathrm{e}^{(x+1)-\ln(x+1)}-a[(x+1)-\ln(x+1)]>0$ 对任意的 $x>-1$ 恒成立，

则等价于 $\mathrm{e}^{t}-at>0$ 对任意 $t \geqslant 1$ 恒成立，

即 $a<\dfrac{\mathrm{e}^{t}}{t}$对任意 $t \geqslant 1$ 恒成立，（9 分）

令 $h(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{t}}{t}(t \geqslant 1)$，则 $h'(t)=\dfrac{t\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{t}}{t^{2}}=\dfrac{(t-1)\mathrm{e}^{t}}{t^{2}} \geqslant 0$，

即 $h(t)$在$[1,+\infty)$上单调递增，所以 $h(t) \geqslant h(1)=\mathrm{e}$，

所以 $a<\mathrm{e}$，即实数 a 的取值范围为$(-\infty,\mathrm{e})$.（12 分）

【评分细则】

1. 第(1)小题中的结果也可这样书写：

当 $a>0$ 时，$f(x)$的单调递增区间为$(-1,0)$，单调递减区间为$(0,+\infty)$；

当 $a<0$ 时，$f(x)$的单调递减区间为$(-1,0)$，单调递增区间为$(0,+\infty)$.

2. 第(2)小题若用其他方法求解，酌情给分.