2020年复旦大学强基计划试题解析

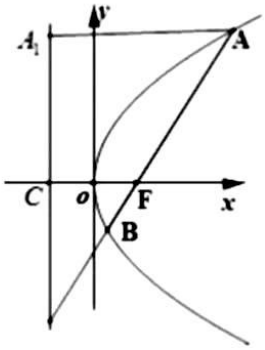
1. 在抛物线 $y^2=2px\left(p>0\right)$ 中，过其焦点 F 的弦与抛物线交于 A,B 两点，且 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，准线与 x 轴交于点 C，过点 A 作抛物线的准线，垂足为 A_1，则当四边形 $CFAA_1$ 的面积为 $12\sqrt{3}$ 时，p 的值为________.

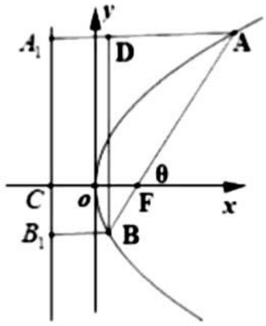
解析：如图所示，设 $BF=t$，则 $AF=3t$，由抛物线的定义知 $AA_1=AF=3t$，$BB_1=BF=t$，在 $\triangle BDA$ 中，$\cos\theta=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{3t-t}{3t+t}=\dfrac{1}{2}$，所以 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，

四边形 $CFAA_1$ 的面积 $\dfrac{\left(p+3t\right)\times CA_1}{2}=\dfrac{\left(p+3t\right)\times 3t\sin\theta}{2}=12\sqrt{3}$，

即 $\left(p+3t\right)\times 3t=48$；

且 $AA_1=p+AF\cos\theta$，得 $3t=p+\dfrac{3}{2}t$，即 $t=\dfrac{2}{3}p$，代入上式得 $p=2\sqrt{2}$；





另：本题也可以用抛物线的极坐标方程解得 $AF=\dfrac{p}{1-\cos\theta}$，$BF=\dfrac{p}{1+\cos\theta}$ 来解.

2.已知实数 x,y 满足 $x^2+2xy-1=0$，则 x^2+y^2 的最小值为________.

解析：由已知得 $x\neq 0, y=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-x\right)$，所以

$x^2+y^2=x^2+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}-x\right)^2=\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{2}\geq\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，当且仅当 $\frac{5}{4}x^2=\frac{1}{4x^2}$，即 $x=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{5}}$ 时取得等号.

3.已知函数 $f(x)=a\sin 2\pi x+b\cos 2\pi x+c\sin 4\pi x+d\cos 4\pi x$，

若 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)+f(x)=f(2x)$ 恒成立，则 a,b,c,d 中能确定的参数有________.

解析：由 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)+f(x)=f(2x)$，令 $x=0$，得 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，在解析式中令 $x=\frac{1}{2}$，得 $d-b=0$，即 $d=b$；在解析式中 $f\left(\frac{1}{4}\right)=a-d, f\left(\frac{3}{4}\right)=-a-d$，由 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)+f(x)=f(2x)$，令 $x=\frac{1}{4}$，待 $f\left(\frac{3}{4}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，即 $d=0$，所以 $d=b=0$。此时 $f(x)=a\sin 2\pi x+c\sin 4\pi x$，又由 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)+f(x)=f(2x)$ 得，

$a\sin(2\pi x+\pi)+c\sin(4\pi x+2\pi)+a\sin 2\pi x+c\sin 4\pi x=a\sin 4\pi x+c\sin 8\pi x$，

即 $(2c-a)\sin 4\pi x-c\sin 8\pi x=0$，即 $\sin 4\pi x\left[(2c-a)-2c\cos 4\pi x\right]=0$，变使得

恒成立，所以$\begin{cases}2c-a=0\\2c=0\end{cases}$,即$a=c=0$，综上$a=b=c=d=0$，即$a,b,c,d$中能确定的参数为$a,b,c,d$.

4.若三次方程$x^3+ax^2+4x+5=0$有一个根是纯虚数，则实数$a=$________.

解析：设这个根为bi，则$b^3i^3+ab^2i^2+4bi+5=0$，即$5-ab^2+\left(4b-b^3\right)i=0$，

所以$\begin{cases}5-ab^2=0\\4b-b^3=0\end{cases}$,解得$\begin{cases}b=2\\a=\dfrac{5}{4}\end{cases}$，或$\begin{cases}b=-2\\a=\dfrac{5}{4}\end{cases}$，综上$a=\dfrac{5}{4}$.

5.$\left(x^2+\dfrac{1}{x}+y^3+\dfrac{1}{y}\right)^{10}$展开式中的常数项为________.

解析：不妨设展开式的结构为$\lambda\left(x^2\right)^a x^{-b}y^{3c}y^{-d}$，要为常数项，显然

$$\begin{cases}2a=b\\3c=d\\a+b+c+d=10\end{cases},$$

所以$\begin{cases}2a=b\\3c=d\\3a+4c=10\end{cases}$，得$\begin{cases}a=2\\b=4\\c=1\\d=3\end{cases}$，所以常数项为$C_{10}^2C_8^4C_4^1=12600$.

6. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{2\times5}+\cdots+\frac{1}{n(n+3)}\right)=$________.

解析：因为$\frac{1}{n(n+3)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)$，

所以$\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{2\times5}+\cdots+\frac{1}{n(n+3)}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\cdots\right.$

$\left.+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\frac{1}{n+3}\right)$

所以$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{2\times5}+\cdots+\frac{1}{n(n+3)}\right)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{18}$.

7.在平面直角坐标系下，点$(4,5)$绕点$(1,1)$顺时针旋转60°所得到的点坐标为________.

解析：记$A(4,5),P(1,1)$，所求的点$B(x,y)$，则$\begin{cases}AP=BP\\ \angle APB=60^\circ\end{cases}$，即$AP=BP=AB$，

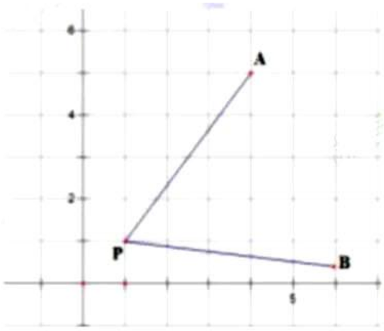
所以$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=25\\ (x-4)^2+(y-5)^2=25\end{cases}$，其中$x>0,y>0$，解得$x=\frac{5+4\sqrt{3}}{2},y=\frac{6-3\sqrt{3}}{2}$，

所以所求点坐标为$\left(\frac{5+4\sqrt{3}}{2},\frac{6-3\sqrt{3}}{2}\right)$.

转化为复数求解：由题意得$\overrightarrow{PA}=(3,4)$，设其对应的复数$z_A=5(\cos\theta+i\sin\theta)$，

其中 $\cos\theta=\frac{3}{5}$，$\sin\theta=\frac{4}{5}$，则 $\overrightarrow{PB}$ 对应的复数应该为 $z_B=5\left(\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{3+4\sqrt{3}}{2}+\frac{4-3\sqrt{3}}{2}i$，

所以 $\begin{cases}x-1=\frac{3+4\sqrt{3}}{2}\\ y-1=\frac{4-3\sqrt{3}}{2}\end{cases}$，即 $x=\frac{5+4\sqrt{3}}{2},y=\frac{6-3\sqrt{3}}{2}$，$\left(\frac{5+4\sqrt{3}}{2},\frac{6-3\sqrt{3}}{2}\right)$.



8.方程 $5\rho\cos\theta=4\rho+3\rho\cos2\theta$ 所表示的曲线的形状是________.

解析：$5\rho\cos\theta=4\rho+3\rho\cos2\theta$ 即 $5\cos\theta=4+3\left(2\cos^2\theta-1\right)$，即 $6\cos^2\theta-5\cos\theta+1=0$，

解得 $\cos\theta=\frac{1}{2}$，或者 $\cos\theta=\frac{1}{3}$，故所得为两条直线.

9.设 $x,y\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，若 $\begin{cases}x^3+\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)+2a=0\\ 4y^3+\sin y\cos y-a=0\end{cases}$，则 $\cos(x+2y)=$________.

解析：设 $f(x)=x^3+\sin x$，则 $f(x)$ 是 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上的奇函数且为增函数，由题意得 $f(x)=-f(2y)=f(-2y)$，即 $x+2y=0$，所以 $\cos(x+2y)=1$.

10.实数 x,y 满足 $x^2+y^2=1$，若 $|x+2y-a|+|a+6-x-2y|$ 的值与 x 、 y 无关则实数 a 的最值范围为________.

解析：由题意知 $a\le x+2y\le a+6$ 恒成立，由于 $x^2+y^2=1$，

所以 $x+2y=\cos\theta+2\sin\theta\in\left[-\sqrt{5},\sqrt{5}\right]$，故 $\begin{cases}a\le-\sqrt{5}\\a+6\ge\sqrt{5}\end{cases}$，解得 $\sqrt{5}-6\le a\le-\sqrt{5}$.

11.已知 O 为 $\triangle ABC$ 的内心，$\cos\angle BAC=\frac{1}{3}$，且满足 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则 $x+y$ 的最大值为________.

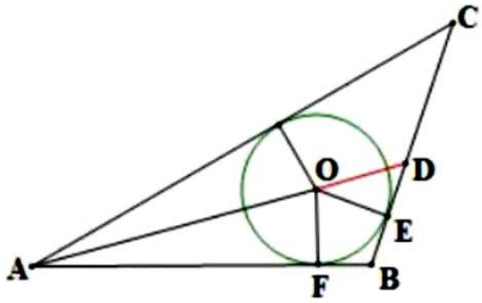
解析：延长 AO 交 BC 于 D，设 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AO}=\lambda x\overrightarrow{AB}+\lambda y\overrightarrow{AC}$，由于 B,D,C 三点共线，

所以 $\lambda x+\lambda y=1$，即 $x+y=\frac{1}{\lambda}=\frac{AO}{AD}=\frac{AO}{AO+OD}=\frac{1}{1+\frac{OD}{AO}}$，

又由 $\cos\angle BAC=\frac{1}{3}$，得 $\cos\angle OAF=\sqrt{\frac{2}{3}},\sin\angle OAF=\sqrt{\frac{1}{3}}$，所以 $\frac{OE}{OA}=\frac{OF}{OA}=\sqrt{\frac{1}{3}}$，

又因为$OD \ge OE$，所以$\dfrac{OD}{OA} \ge \dfrac{OE}{OA} = \dfrac{OF}{OA} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$，所以$x+y \le \dfrac{1}{1+\sqrt{\dfrac{1}{3}}} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$，

当且仅当$OD = OE$即$AB = AC$时，取得等号，所以$x+y$的最大值为$\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$.



12.直线$m: x\cos\alpha - y = 0$和$n: 3x + y - c = 0$，有（　　）

A.m和n可能重合

B.m和n不可能垂直

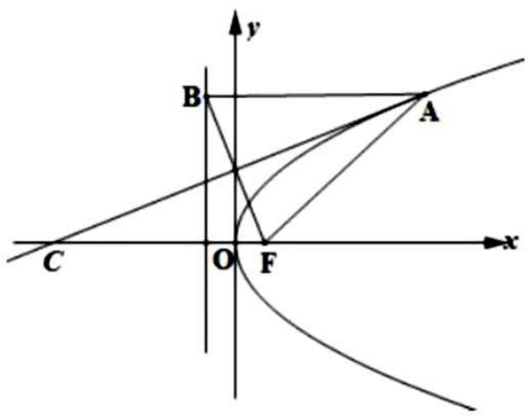
C.m和n可能平行

D.在m上存在一点P，使得n以P为中心旋转后与m重合

解析：由题意得$k_m = \cos\alpha > -3 = k_n$，所以直线$m$和$n$相交，故A、C错；又当$\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$时，$m$和$n$垂直，故B错；当$P$点是$m$和$n$的交点时，$n$以$P$为中心旋转后与$m$重合.故D对，所以选D.

13.抛物线$x = 3y^2$的焦点为F，过抛物线上点A的切线与AF夹角为$30°$，则点A的坐标为________.

解析：作 AB 垂直其准线，垂足为 B，则 $AB=AF$，由 $\angle CAF=30^\circ$，得 $\angle BAC=30^\circ$，所以 $\angle ACF=30^\circ$，即切线斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，设点 $A\left(3t^2,t\right)$，则切线方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-3t^2\right)+t$，联立 $x=3y^2$，得 $\sqrt{3}y^2-y+t-\sqrt{3}t^2=0$，由 $\Delta=1-4\sqrt{3}\left(t-\sqrt{3}t^2\right)=0$，解得 $t=\frac{1}{2\sqrt{3}}$，所以点 $A\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$.



14.已知点 P 为直线 $\begin{vmatrix} x & y-6 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=0$ 上一点，点 P 到点 $A(2,5)$ 和点 $B(4,3)$ 的距离相同，则点 P 的坐标为________.

解析：直线方程即为 $4x+y-6=0$，设点 $P(x,6-4x)$，

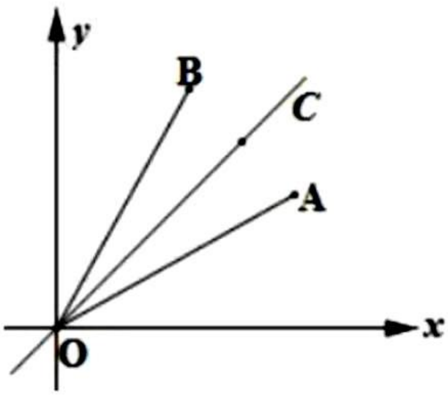
由 $|AP|=|BP|$，得 $(x-2)^2+(1-4x)^2=(x-4)^2+(3-4x)^2$，解得 $x=1$，所以 $P(1,2)$.

另解：求出 AB 的中垂线方程为 $y=x+1$，联立 $\begin{cases} y=x+1 \\ 4x+y-6=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$，所以

$P(1,2)$.

15.已知随机变量 $x,y\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，且 $x\neq y$，连接点 $A(x,y)$、$B(y,x)$ 与原点 O，则满足 $\angle AOB=2\arctan\frac{1}{3}$ 的概率为________.

解析：由 $\angle AOB=2\arctan\frac{1}{3}$，知 $\tan\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{3}$，由题意知点 $A(x,y)$、$B(y,x)$ 关于 $y=x$ 对称，即 $\tan\angle COA=\frac{1}{3}$，所以 $\tan\angle AOx=\dfrac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$，即 $y=2x$，故降示中的点 $A(x,y)$ 只能取自 $(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)$，由于对称性知点 $A(x,y)$ 只能取自 $(2,1),(4,2),(6,3),(8,4)$，所以所求概率为 $\frac{8}{9\times8}=\frac{1}{9}$.



16.16.$\arcsin\dfrac{\sqrt{14}+3\sqrt{2}}{8}+\arcsin\dfrac{3}{4}=$________.

解析：记 $\alpha=\arcsin\frac{\sqrt{14}+3\sqrt{2}}{8},\beta=\arcsin\frac{3}{4}$，则 $\alpha,\beta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，所以

$\sin\alpha=\frac{\sqrt{14}+3\sqrt{2}}{8}$

$\sin\beta=\frac{3}{4}$，知 $\alpha,\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $\cos\alpha=\frac{-\sqrt{14}+3\sqrt{2}}{8},\cos\beta=\frac{\sqrt{7}}{4}$

所以 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{7}}{4}\times\frac{-\sqrt{14}+3\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{14}+3\sqrt{2}}{8}\times\frac{3}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\alpha+\beta\in[0,\pi]$

所以 $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$，即 $\arcsin\frac{\sqrt{14}+3\sqrt{2}}{8}+\arcsin\frac{3}{4}=\frac{3\pi}{4}$

17.已知三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $\frac{21}{2}$，且 $AB=6,AC=BC=4,AP=BP=10$，则 $CP=$________.

解析：取 AB 中点 D，连接 CD、PD，由 $AC=BC=4,AP=BP=10,AB=6$，得 $CD\perp AB$，

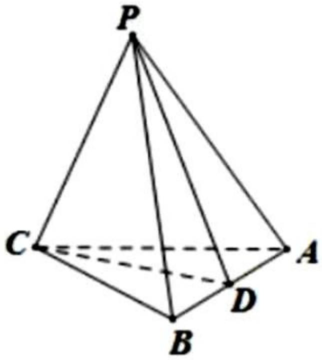
$PD\perp AB$，所以 $AB\perp$ 平面 PCD，所以 $V_{P-ABC}=V_{A-CDP}+V_{B-CDP}=\frac{1}{3}S_{\triangle CDP}\times AB=\frac{21}{2}$，

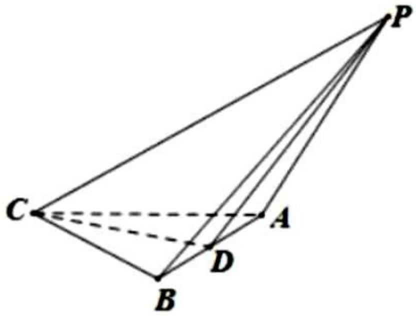
即 $S_{\triangle CDP}=\frac{21}{4}$，由题意知 $CD=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7},PD=\sqrt{10^2-3^2}=\sqrt{91}$，

所以 $\frac{1}{2}\times\sqrt{7}\times\sqrt{91}\times\sin\angle CDP=\frac{21}{4}$，得 $\sin\angle CDP=\frac{3}{2\sqrt{13}}$，所以

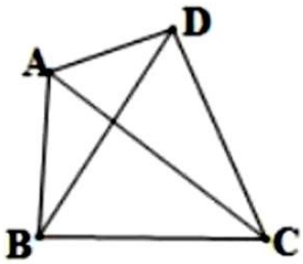
$\cos\angle CDP=\pm\frac{\sqrt{43}}{2\sqrt{13}}$，

由余弦定理得 $CP=\sqrt{7+91-2\sqrt{7}\times\sqrt{91}\times\frac{\sqrt{43}}{2\sqrt{13}}}=\sqrt{98\pm7\sqrt{43}}$





18. 三角形 $\triangle ABC$ 如图所示凸四边形 $ABCD$，则“ $\angle BAC=\angle BDC$ ”是“ $\angle DAC=\angle DBC$ ”的________条件。



A.充分不必要　　B.必要不充分　　C.充要　　D.既不充分也不必要

解析：由 $\angle BAC=\angle BDC$ 知，A,B,C,D 四点共圆，所以 $\angle DAC=\angle DBC$，反之亦成立，选 C.

19.三角形 $\triangle ABC$ 中，$AB=9,BC=6,AC=7$，则 BC 边上的中线长度为________.

解析：由题意知 BC 边上的中线 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

平方得 $\left|\overrightarrow{AD}\right|^2=\frac{1}{4}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2\right)$

又余弦定理得 $\cos A=\frac{9^2+7^2-6^2}{2\times7\times9}=\frac{47}{7\times9}$，

所以 $\left|\overrightarrow{AD}\right|^2=\frac{1}{4}\left(9^2+2\times9\times7\times\frac{47}{7\times9}+7^2\right)=56$，

即 BC 边上的中线长度为 $AD=\sqrt{56}=2\sqrt{14}$．

20. 定义 $f_M(x)=\begin{cases}1,x\in M\\-1,x\notin M\end{cases}$，$M\otimes N=\left\{x\middle|f_M(x)\cdot f_N(x)=-1\right\}$，已知集合 $A=\left\{x\middle|x<\sqrt{2-x}\right\}$，$B=\left\{x\middle|x(x+3)(x-3)>0\right\}$，则 $A\otimes B=$________.

解析：由题意得 $A=\left\{x\middle|x<1\right\}$，$B=\left\{x\middle|-3<x<0或x>3\right\}$，要使得 $f_A(x)\cdot f_B(x)=-1$，

必须有 $x>3$，或 $0\le x<1$，或 $x\le-3$，

所以 $A\otimes B=\left\{x\middle|x>3,或0\le x<1,x\le-3\right\}$.

21.方程 $3x+4y+12z=2020$ 的非负整数解的组数为________.

A. C_{168}^2　　B. C_{169}^2　　C. C_{170}^2　　D. C_{171}^2

解析：因为 $2020=2^2\times5\times101$，所以 $4|x$，不妨设 $x=4k$，则 $3k+y+3z=505$，

即 $3|(505-y)$，又 $505=3\times168+1$，所以 $y\equiv1\pmod 3$，不妨设 $y=3t+1$，所以

$k+t+z=168$，方程的非负整数解个数等价于 $k+t+z=168$ 的非负数数解的个数，由隔板法可得组数为 C_{170}^{2}（等价于 168 个相同的小球和 2 块相同的隔板排成一排的排法数），选 C .

22.已知 $m,n\in\mathbf{Z},0\le n\le 11$，且 $2^{2020}+3^{2021}=12m+n$，则 n 的值为________.

解析：$2^{2020}+3^{2021}=16^{505}+3^{2021}=12m+n$，显然 $2^{2020}\equiv 1(\bmod 3)$，$3^{2021}\equiv 0(\bmod 3)$，$2^{2020}\equiv 0(\bmod 4)$，$3^{2021}\equiv -1(\bmod 4)$，所以 $n\equiv 1(\bmod 3)$，$n\equiv -1(\bmod 4)$，又 $0\le n\le 11$，所以 $n=7$.

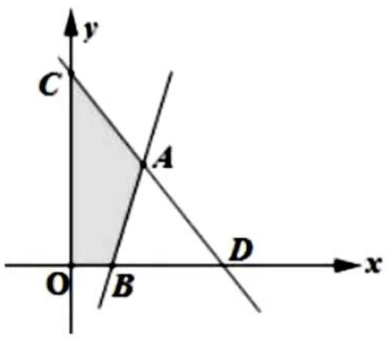
23.记 $f(x)=3^{x}-3^{-x}$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$，则 $g(x)=f^{-1}(x-1)+1$ 在 $[-3,5]$ 上的最大值与最小值的和为________.

解析：记 $f(x)=3^{x}-3^{-x}$ 的定义域为 $[a,b]$，值域为 $[m,n]$，则 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域为 $[m,n]$，值域为 $[a,b]$，所以求 $y=f^{-1}(x-1)$ 在定义域为 $[-3,5]$ 上的值域，等价于求 $y=f^{-1}(x)$ 在定义域为 $[-4,4]$ 上的值域，所以等价于求 $f(x)=3^{x}-3^{-x}$ 的值域为 $[-4,4]$ 时的定义域即可，注意到 $f(x)$ 是奇函数且为单调递增函数，由 $-4\le 3^{x}-3^{-x}\le 4$，解得的 $a\le x\le b$ 必然满足 $a+b=0$，进而有 $g(x)=f^{-1}(x-1)+1$ 的最大值与最小值和为 $a+1+b+1=2$.

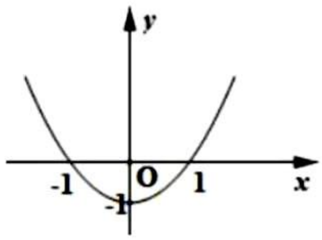
24.若 $k>4$，直线 $kx-2y-2k+8=0$ 与 $2x+k^2y-4k^2-4=0$ 和坐标轴围成的四边形面积的取值范围为________.

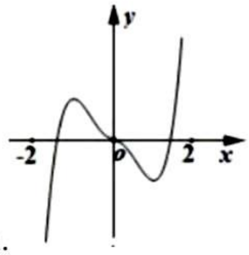
解析：由题意知直线 $kx-2y-2k+8=0$ 与直线 $2x+k^2y-4k^2-4=0$ 都过定点过定点 $A(2,4)$，根据两直线的斜率及 $k>4$，可以分别求得 $B\left(2-\frac{8}{k},0\right),C\left(0,4+\frac{4}{k^2}\right)$，所以四边形面积为 $S=S_{\triangle ACO}+S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}\left(4+\frac{4}{k^2}\right)\cdot 2+\frac{1}{2}\left(2-\frac{8}{k}\right)\cdot 4=\frac{4}{k^2}-\frac{16}{k}+8=4\left(\frac{1}{k}2\right)^2-8$，

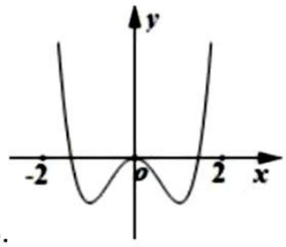
因为 $k>4$，所以 $\frac{1}{k}\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$，所以 $S\in\left(\frac{17}{4},8\right)$，即所求面积的范围为 $\left(\frac{17}{4},8\right)$.

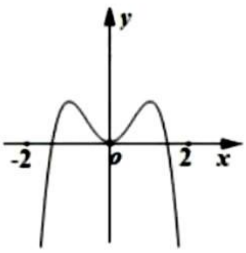


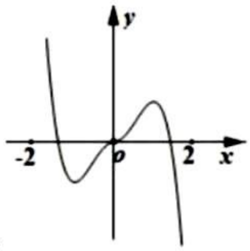
25.已知 $f(x)$ 的图像如图所示，则 $f(f(x))$ 的大致图像为（　　）



A. 

B. 

C. 

D. 

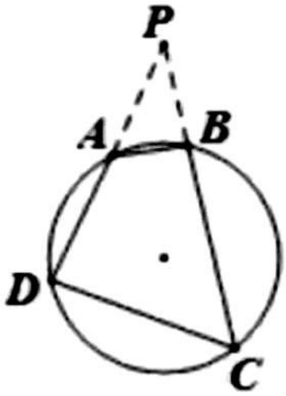
解析：注意到 $f(1)=f(-1)=0, f(0)=-1$， $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(f(x))$ 为偶函数，故 A、D 错；又 $x_0 \in (0,1)$ 时， $f(x_0) \in (-1,0)$，此时 $f(f(x_0))<0$，故 C 错，故选 B .

26.已知 A,B,C,D 四点共圆，延长 DA 与 CB 的延长线交于点 P ，若 $AB=1$，$CD=2$， $AD=4$， $BC=5$，则 AP 的长度为________.

解析：由割线定理得 $PA \times PD = PB \times PC$，即 $\dfrac{PA}{PC}=\dfrac{PB}{PD}$，

所以$\triangle PAB\backsim\triangle PCD$，所以$\dfrac{PA}{PC}=\dfrac{PB}{PD}=\dfrac{AB}{CD}$，

即$\dfrac{PA}{5+PB}=\dfrac{PB}{4+PA}=\dfrac{1}{2}$，解得$PA=\dfrac{14}{3},PB=\dfrac{13}{3}$，故$AP$的长度为$\dfrac{14}{3}$.



27.给定5个函数，其中2个偶函数，3个奇函数，从中任取3个，则既有奇函数又有偶函数的概率为________.

解析：既有奇函数又有偶函数的概率为$P=\dfrac{C_2^1C_3^2+C_2^2C_3^1}{C_5^3}=\dfrac{9}{10}$.

28.下列不等式恒成立的有（　　）

A.$x^2+\dfrac{1}{x^2}\geq x+\dfrac{1}{x}$

B.$|x-y|+\dfrac{1}{x-y}\geq 2$

C.忘记了

D.$|x-y|\geq|x-z|+|y-z|$

解析：对于 A：$x^2+\frac{1}{x^2}-x-\frac{1}{x}=x(x-1)+\frac{1}{x^2}(1-x)=\frac{(x-1)^2\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{x^2}\geq 0$，

故 A 对；

对于 B，取 $x=0,y=1$ 可得 B 错；

对于 D，有绝对值性质得 $|x-y|\leq|x-z|+|y-z|$，故 D 错，

综上选 A.

29. 已知向量数列 $\{\overrightarrow{a_n}\}$ 满足 $\overrightarrow{a_{n+1}}=\overrightarrow{a_n}+\vec{d}$，且 $|\overrightarrow{a_1}|=3$，$\overrightarrow{a_1}\cdot\vec{d}=-\frac{3}{2}$，令 $S_n=\overrightarrow{a_1}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{a_i}\right)$，则当 S_n 取最大值时，n 的值为________.

解析：由题意得 $\overrightarrow{a_n}=\overrightarrow{a_1}+(n-1)\vec{d}$，所以 $\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{a_i}=n\overrightarrow{a_1}+\frac{n(n-1)}{2}\vec{d}$，

所以 $S_n=\overrightarrow{a_1}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{a_i}\right)=9n-\frac{3n(n-1)}{4}=-\frac{3}{4}\left(n^2-13n\right)$，

故当 $n=6$ 或 7 时，S_n 取最大值.

30.某公司安排甲乙丙等 7 人完成 7 天的值班任务，每人负责一天，已知甲不排第一天，乙不排第二天，甲和丙安排在相邻的两天，则不同的安排方式有________种.

解析：由题意得不同的安排方式有以下几种情形：

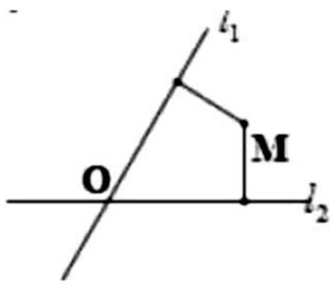
情形一：甲丙安排在前两天时，共有 $A_5^5=120$ 种；

情形二：甲丙安排在第二、第三天时，共有 $A_2^2A_5^5=240$ 种；

情形三：甲丙安排在第三、四或四、五或五、六或六、七天时，共有 $4A_2^2C_4^1A_4^4=768$ 种；

所以不同的安排方式有 120+240+768=1128 种.

31.如图所示，直线 l_1、l_2 交于 O 点，M 为平面上任意一点，若 p,q 分别为点 M 到 l_1、l_2 的距离，则称 $M(p,q)$ 为点 M 的“距离坐标”.已知给定非负常数 p,q，给出下列三个命题，正确的序号为________.



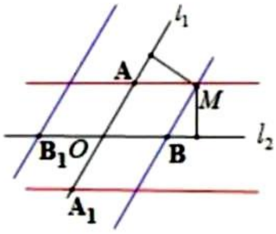
（1）若 $p=q=0$，则距离坐标为 $(0,0)$ 的点有且仅有 1 个；

（2）若 $pq=0$，且 $p+q\neq0$，则距离坐标为 (p,q) 的点有且仅有 2 个；

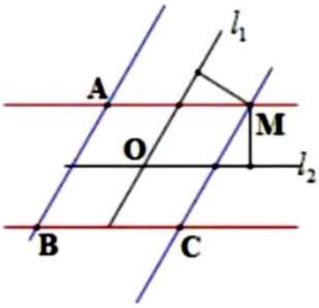
（3）若 $pq\neq0$，则距离坐标为 (p,q) 的点有且仅有 4 个；

解析：（1）显然，距离坐标为$(0,0)$的点只能是O点，有 1 个；

（2）若$pq=0$，且$p+q\neq 0$，则距离坐标为(p,q)的点即为$(0,q)$或者$(p,0)$，各有 2 个，即A,A_1 B,B_1，共 4 个，见下图



（3）若$pq\neq 0$，则距离坐标为(p,q)的点有且仅有 4 个即A,B,C,M，恰好以O为中心；



综上，正确的序号为：（1）（3）．

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》