"皖南八校"2021届高三第二次联考

数　　学(理科)

2020.12

考生注意：

1. 本试卷满分150分，考试时间120分钟。
2. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
3. 做选考题时，考生须按照题目要求作答，并用2B铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $A=\{-2,-1,0,1\}$，$B=\{x|x^2+2x<0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-1\}$　　B. $\{-1,0\}$　　C. $\{-2,-1,0\}$　　D. $\{-1,0,1\}$

2. 数系的扩张过程以自然数为基础，德国数学家克罗内克(*Kronecker*，1823—1891)说"上帝创造了整数，其它一切都是人造的". 设i为虚数单位，复数 $z(2-i)=4+3i$，则 z 的共轭复数是

A. $2+i$　　B. $2-i$　　C. $1-2i$　　D. $1+2i$

3. 已知双曲线的渐近线方程是 $\sqrt{3}x\pm y=0$，且与椭圆 $x^2+2y^2=8$ 有共同焦点，则双曲线的方程为

A. $2x^2-\frac{2y^2}{3}=1$　　B. $x^2-\frac{y^2}{3}=1$

C. $x^2-\frac{y^2}{4}=1$　　D. $x^2-\frac{y^2}{9}=1$

4. 若 $\{a_n\}$ 是公比为 e 的正项等比数列，则 $\{\ln a_{3n-1}\}$ 是

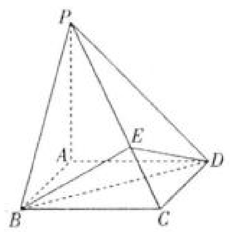
A. 公比为 e^3 等比数列　　B. 公比为3的等比数列

C. 公差为 $3e$ 的等差数列　　D. 公差为3的等差数列

5. $A(6,13)$ 和 $B(12,11)$ 是平面上圆 C 上两点，过 A，B 两点作圆 C 的切线交于 x 轴上同一点，则圆 C 的面积为

A. $\frac{83\pi}{8}$　　B. $\frac{21\pi}{2}$　　C. $\frac{85\pi}{8}$　　D. $\frac{43\pi}{4}$

6. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是边长为1的正方形，$PA=1$. 过 BD 作与侧棱 PC 垂直的平面 BDE，交 PC 于点 E. 则 CE 的长为



A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

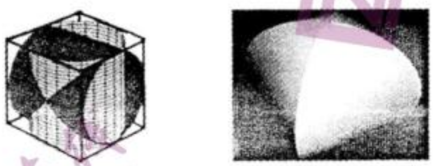
C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

7. 已知正实数 a,b，满足 $a>b$，则

A. $\ln(a-b+1)<0$　　B. $\pi^{a-b}<3^{a-b}$

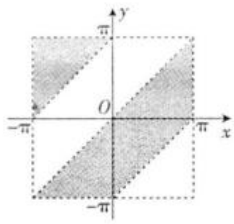
C. $a+\frac{1}{a}>b+\frac{1}{b}$　　D. $a-\frac{1}{a}>b-\frac{1}{b}$

8. 魏晋时期数学家刘徽在他的著作《九章算术注》中，称一个正方体内两个互相垂直的内切圆柱所围成的几何体为“牟合方盖”(如图)，刘徽通过计算得知正方体的内切球的体积与“牟合方盖”的体积之比应为 $\pi:4$. 在某一球内任意取一点，则此点取自球的一个内接正方体的“牟合方盖”的概率为



A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{4\sqrt{3}}{9\pi}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{9}$

9. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 $M(x,y)$ 为阴影区域内的动点(不包括边界)，这里 $|x|<\pi$，$|y|<\pi$，则下列不等式恒成立的是



A. $\sin(x-y)>0$

B. $\sin(x-y)<0$

C. $\cos(x-y)>0$

D. $\cos(x-y)<0$

10. 设正实数 a,b,c，满足 $e^{2a}=b\ln b=ce^{c}=2$，则 a,b,c 的大小关系为

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$

C. $c<a<b$　　D. $b<a<c$

11. 已知正项数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，如果 $\forall n\in N^*$ 都有 $S_n=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})$，数列$\{b_n\}$满足 $b_n+S_n=\frac{9}{2}$，$n\in N^*$，数列$\{c_n\}$满足 $c_n=b_nb_{n+1}b_{n+2}$，$n\in N^*$，设 T_n 为$\{c_n\}$的前 n 项和，则当 T_n 取得最大值时，n 的值等于

A. 17　　B. 18　　C. 19　　D. 20

12. 已知直线 $y=a(x-1)(a>0)$ 与曲线 $f(x)=\cos x(x\in(-\pi,\pi))$ 相切于点 A、与曲线的另一交点为 B，若 A、B 两点对应的横坐标分别为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，则 $(1-x_1)\tan x_1=$

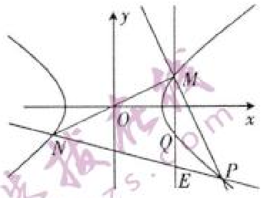
A. -1　　B. 2　　C. 1　　D. -2

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知角 $\alpha+\frac{\pi}{6}$ 的终边与单位圆交于点 $P(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})$，则 $\cos(2\alpha-\frac{\pi}{6})$ 的值为________.

14. 若$(x^2+\frac{1}{x})^n$ 展开式的各项系数之和为 32，则展开式中的含 x^4 项的系数为________.(用数字作答).

15. 如图所示，已知 M,N 为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$上关于原点对称的两点，点 M 与点 Q 关于 x 轴对称，$\overrightarrow{ME}=\frac{25}{16}\overrightarrow{MQ}$，直线 NE 交双曲线右支于点 P，若$\angle NMP=\frac{\pi}{2}$，则 $e=$________.



16. 已知 $\boldsymbol{a}=(x,0)(x>0)$，$\boldsymbol{b}=(1,0)$，若 $\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2}+\sqrt{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=|\boldsymbol{a}|\sqrt{|\boldsymbol{a}|}$，则 $\boldsymbol{a}=$________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17.（12 分）

已知三角形 ABC 三内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $b\sin A=2\sqrt{3}a\cos^2\frac{A+C}{2}$.

(1)求角 B；

(2)若 $A=\frac{\pi}{4}$，角 B 的平分线交 AC 于点 D，$CD=2$，求 $S_{\triangle BCD}$.

18.（12 分）

8 月 10 日，2020 年《财富》世界 500 强排行榜正式发布. 中国大陆（含香港）公司数量达到 124 家，历史上第一次超过美国（121 家）. 2008 年中国加入世贸组织时中国大陆进入世界 500 强的企业 12 家，以后逐年增加，以下是 2016——2020 年（年份代码依次为 1，2，3，4，5）中国大陆进入世界 500 强的企业数量.

年份代码 x	1	2	3	4	5
进入 500 强的企业数量 y	103	109	111	119	124

(1)已知可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系，求 y 关于 x 的回归方程. 并预测 2021 年中国大陆进入世界 500 强的企业数量，结果取整；

(2)2020 年《财富》榜单显示共有 7 家互联网公司上榜，中国大陆 4 家、美国 3 家. 现某财经杂志计划从这 7 家公司中随机选取 3 家进行深度报道，记选取的 3 家公司中，中国大陆公司个数为 ξ，求 ξ 的分布列与期望.

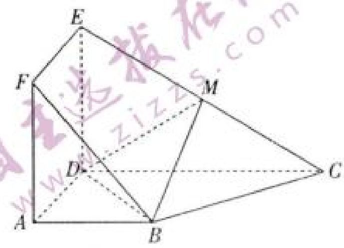
参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{5}y_i=566$，$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=1750$.

参考公式：回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为

$$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i-n\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2},\ \hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}.$$

19.（12 分）

如图，正方形 $ADEF$ 与梯形 $ABCD$ 所在平面互相垂直，已知 $AB/\!/CD$，$AD\perp CD$，$AB=AD=\frac{1}{2}CD$，M 为 EC 的中点.



(1)求证：$BM/\!/$平面 $ADEF$；

(2)求平面 BMD 与平面 ABF 所成锐二面角的余弦值.

20.（12 分）

已知函数 $f(x)=(\frac{1}{x}-x+m)\cdot e^{-x}(m\in\mathbf{R})$.

(1)求证：当 $m=0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调递减；

(2)若函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内有且只有一个极值点，求 m 的取值范围.

21.（12 分）

已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$，点 P 为 y 轴左侧一点，A，B 为抛物线 C 上两点，当直线 AB 过抛物线 C 焦点 F 且垂直于 x 轴时，$\triangle AOB$ 面积为 2.

(1)求抛物线 C 标准方程；

(2)若直线 PA，PB 为抛物线 C 的两条切线，设 ΔPAB 的外心为 M(点 M 不与焦点 F 重合)，求 $\sin\angle PFM$ 的所有可能取值.

(二)选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22.［选修 4—4：坐标系与参数方程］(10 分)

已知在平面直角坐标系 xOy 中，圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+2\cos\alpha\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数). 以原点 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴，取相同的单位长度建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho(\sin\theta+\cos\theta)=1$.

(1)求圆 C 普通方程和直线 l 直角坐标方程；

(2)点 P 极坐标为 $(1,\frac{\pi}{2})$，设直线 l 与圆 C 的交点为 A，B 两点，A，B 中点为 Q，求线段 PQ 的长.

23.［选修 4—5：不等式选讲］(10 分)

已知 $x>0$，$y>0$，$\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$，证明：

(1)$x^2+y^2\geq 2$；

(2)$\frac{x}{\sqrt{x}+1}+\frac{y}{\sqrt{y}+1}\geq 1$.

"皖南八校"2021届高三第二次联考·数学(理科)

参考答案、解析及评分细则

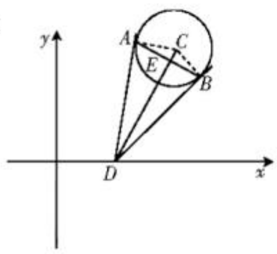
1. A　因为 $B=\{x|x^2+2x<0\}$，所以 $B=\{x|-2<x<0\}$，因为 $A=\{-2,-1,0,1\}$，所以 $A\cap B=\{-1\}$.

2. C　$\because z(2-i)=4+3i$，$z=\frac{4+3i}{2-i}=\frac{(4+3i)(2+i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{5+10i}{5}=1+2i$，$\therefore \bar{z}=1-2i$.

3. B　椭圆 $x^2+2y^2=8$，即 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点为 $(\pm2,0)$. 可设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，可得 $a^2+b^2=4$. 由渐近线方程是 $\sqrt{3}x\pm y=0$，可得 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，解得 $a=1,b=\sqrt{3}$，则双曲线的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

4. D　令 $b_n=\ln a_{3n-1}$，则 $b_{n+1}=\ln a_{3n+2}$，所以 $b_{n+1}-b_n=\ln\frac{a_{3n+2}}{a_{3n-1}}=\ln e^3=3$.

5. C　由题意可知 AB 中垂线为 CD，AB 中点 $E(9,12)$，则直线 CD 方程为：$y=3x-15$，故 $D(5,0)$. 在 $\triangle ACD$ 中，



$AD=\sqrt{(6-5)^2+(13-0)^2}=\sqrt{170}$，

$AE=\frac{AB}{2}=\sqrt{10}$，

$DE=\sqrt{(9-5)^2+(12-0)^2}=4\sqrt{10}$，

$\because \triangle CAD\backsim\triangle AED$，故 $\frac{CA}{AD}=\frac{AE}{ED}$，

$r=CA=\frac{AD\cdot AE}{ED}=\frac{\sqrt{170}}{4}$，故圆 C 面积为 $\frac{85\pi}{8}$.

6. D　依题意，$PB\perp BC$，$PC\perp BE$，所以 $BC^2=CE\times CP$，易知 $PB=\sqrt{2}$，$CP=\sqrt{3}$，则 CE 的长为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

7. D　对 A，取 $a=3,b=2$，则 $\ln(a-b+1)=\ln 2>0$，故错误；对 B，取 $a=3,b=2$，则 $\pi^3>3^\pi$，故错误；对 C，取 $a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{4}$，则 $2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}<4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$，故错误；对 D，由 $a>b>0$ 可知 $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$，由同向不等式相加的性质可得 $a+\frac{1}{b}>b+\frac{1}{a}$，可得 $a-\frac{1}{a}>b-\frac{1}{b}$.

8. C　设球的直径为 $\sqrt{3}a$，则球的内接正方体的棱长为 a，正方体的内切球的半径 $r=\frac{a}{2}$，

$\therefore$ 正方体的内切球的体积 $V_{内接球}=\frac{4}{3}\pi\times(\frac{a}{2})^3=\frac{\pi}{6}a^3$，又由已知 $\frac{V_{内接球}}{V_{牟合方盖}}=\frac{\pi}{4}$，$\therefore V_{牟合方盖}=\frac{4}{\pi}\times\frac{\pi}{6}a^3=\frac{2}{3}a^3$，$\therefore$ 此点取自球的内接正方体的"牟合方盖"的概率为 $\frac{\frac{2}{3}a^3}{\frac{4}{3}\pi(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^3}=\frac{4\sqrt{3}}{9\pi}$.

9. A　由于 $|x|<\pi$，$|y|<\pi$，则 $|x-y|<2\pi$. 设与 $y=x$ 相平行的直线的方程为 $x-y=m$，当直线 $x-y=m$ 过点 $(-\pi,\pi)$ 时，$m=-2\pi$；当直线 $x-y=m$ 过点 $(-\pi,0)$ 和 $(0,\pi)$ 时，$m=-\pi$；直线 $x-y=m$ 过点 $(0,-\pi)$ 和 $(\pi,0)$ 时，$m=\pi$. 则由图中阴影部分可得 $-2\pi<x-y<-\pi$ 或 $0<x-y<\pi$，这里 $-\pi<x<\pi$，$-\pi<y<\pi$. 则一定有 $\sin(x-y)>0$.

10. B　设 $f(x)=xe^{x}(x>0)$，易得 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，$x\in(\frac{1}{2},1)$ 时，$f(x)\in(\frac{\sqrt{e}}{2},e)$，而 $\frac{\sqrt{e}}{2}<2$，所以

$c\in(\frac{1}{2},1)$，$b\ln b=\ln b\cdot e^{\ln b}=ce^{c}$，故 $\ln b=c$，即 $b=e^{c}\in(\sqrt{e},e)$，而 $a=\frac{\ln 2}{2}<\frac{1}{2}$，所以 $a<c<b$.

11. D　当 $n=1$ 时，$S_1=a_1=\frac{1}{2}(a_1+\frac{1}{a_1})$，整理得 $a_1^2=1$，因为 $a_n>0$，所以 $a_1=1$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n=\frac{1}{2}(S_n-S_{n-1}+\frac{1}{S_n-S_{n-1}})$，可得 $S_n+S_{n-1}=\frac{1}{S_n-S_{n-1}}$，所以 $S_n^2-S_{n-1}^2=1$，即数列 $\{S_n^2\}$ 是一个以 1 为首项，1 为公差的等差数列，所以 $S_n^2=1+(n-1)=n$，由 $a_n>0$，可得 $S_n>0$，故 $S_n=\sqrt{n}$，则

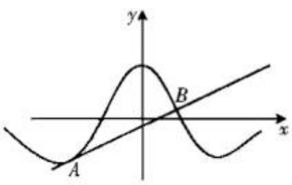
$c_n=(\frac{9}{2}-\sqrt{n})(\frac{9}{2}-\sqrt{n+1})(\frac{9}{2}-\sqrt{n+2})$，

当 $1\leqslant n\leqslant 20$ 时，$b_n>0$；当 $n\geqslant 21$ 时，$b_n<0$.

故当 $1\leqslant n\leqslant 18$ 时，$c_n>0$；当 $n=19$ 时，$c_{19}<0$；当 $n=20$ 时，$c_{20}>0$，当 $n\geqslant 21$ 时，$c_n<0$，

又 $c_{19}+c_{20}=(\frac{9}{2}-\sqrt{20})(\frac{9}{2}-\sqrt{21})(9-\sqrt{19}-\sqrt{22})>0$，故当 $n=20$ 时，T_n 取得最大值.

12. C　如图直线 l 与 $f(x)=\cos x$ 相切于点 A，则 $A(x_1,\cos x_1)$，$f'(x)=-\sin x$，直线过定点 $(1,0)$，则 $\frac{\cos x_1}{x_1-1}=-\sin x_1$，$\therefore (1-x_1)\tan x_1=1$.



13. $-\frac{24}{25}$　由题意 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})=\frac{3}{5}$，$\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})=-\frac{4}{5}$，

则 $\cos(2\alpha-\frac{\pi}{6})=\cos[2(\alpha+\frac{\pi}{6})-\frac{\pi}{2}]=2\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})=-\frac{24}{25}$.

14. 10　由展开式的各项系数之和为 32，则 $2^n=32$，$n=5$，$T_{r+1}=C_5^r(x^2)^{5-r}x^{-r}=C_5^rx^{10-3r}$. 令 $10-3r=4$，解得 $r=2$，所以展开式中的含 x^4 项的系数为 10.

15. $\frac{5}{4}$　设 $M(x_1,y_1)$，$P(x_2,y_2)$，则 $N(-x_1,-y_1)$，$Q(x_1,-y_1)$. 由 $\overrightarrow{ME}=\frac{25}{16}\overrightarrow{MQ}$，得 $E(x_1,-\frac{17}{8}y_1)$ 从而有

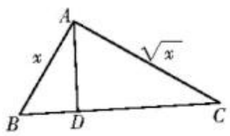
$k_{MN}=\frac{y_1}{x_1}$，$k_{PN}=k_{EN}=-\frac{9y_1}{16x_1}$，又 $\angle NMP=90^\circ$，$k_{MN}=\frac{y_1}{x_1}$，所以 $k_{MP}=-\frac{x_1}{y_1}$，

又由 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1\\ \frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{a^2}(x_1+x_2)(x_1-x_2)=\frac{1}{b^2}(y_1+y_2)(y_1-y_2)$，

从而得到 $k_{PM}\cdot k_{PN}=\frac{b^2}{a^2}$ 所以 $k_{PM}\cdot k_{PN}=-\frac{x_1}{y_1}\cdot(-\frac{9y_1}{16x_1})=\frac{9}{16}=\frac{b^2}{a^2}$，所以 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{5}{4}$.

16. $(\frac{\sqrt{5}+1}{2},0)$　$\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2}+\sqrt{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=|\boldsymbol{a}|\sqrt{|\boldsymbol{a}|}$ 等价于 $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}=x\sqrt{x}$，

如图，构造三角形 $\triangle ABC$，AD 为 BC 边上的高且 $AD=1$，



其中 $AB=x$，$AC=\sqrt{x}$，则 $BD=\sqrt{x^2-1}$，$DC=\sqrt{x-1}$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC=\frac{1}{2}AD\cdot BC$，

即 $\frac{1}{2}x\sqrt{x}\sin\angle BAC=\frac{1}{2}(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1})=\frac{1}{2}x\sqrt{x}$，

则 $\sin\angle BAC=1$，故 $AB^2+AC^2=BC^2$，

则 $x^2+x=(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1})^2=(x\sqrt{x})^2$，化简得 $x^2-x-1=0$，又 $x>0$，解得

$x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，故 $\boldsymbol{a}=(\frac{\sqrt{5}+1}{2},0)$.

17.解：(1)因为 $b\sin A=2\sqrt{3}a\cos^2\frac{A+C}{2}$，由正弦定理可得

$\sin B\sin A=2\sqrt{3}\sin A\cos^2(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2})=2\sqrt{3}\sin A\sin^2\frac{B}{2}$，…………2分

因为 $0<A<\pi$，$0<B<\pi$，所以 $\sin C>0$，$\frac{B}{2}\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\sin\frac{B}{2}>0$，

则 $2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=2\sqrt{3}\sin^2\frac{B}{2}$，…………4分

故 $\tan\frac{B}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$. …………6分

(2)由(1)可知 $\angle ABD=\angle CBD=\frac{\pi}{6}$，又 $A=\frac{\pi}{4}$，所以 $\angle ADB=\frac{7\pi}{12}$，$\angle CDB=\frac{5\pi}{12}$，可得 $\angle BCD=\frac{5\pi}{12}$，所以 $BC=BD$，…………8分

在△BCD 中，由正弦定理可得 $\frac{CD}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{BD}{\sin\frac{5\pi}{12}}$，

故 $BD=CD\cdot\frac{\sin\frac{5\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，…………10分

$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\cdot CB\cdot BD\cdot\sin\angle CBD=\frac{1}{2}BD^2\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}+2$. …………12分

18.解：(1)由题意可知 $\bar{x}=3$，$\bar{y}=113.2$，$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=10$，

$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-\bar{x}\sum_{i=1}^{5}y_i=1750-3\times566=52$，…………2分

$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{52}{10}=5.2$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\,\bar{x}=113.2-5.2\times3=97.6$，

所以 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y}=97.6+5.2x$. …………5分

将 $x=6$ 代入，得 $\hat{y}=128.8\doteq129$，故预计2021年中国大陆进入世界500强的企业数量大约129家. …………6分

(2)由题意知 ξ 的所有可能取值为 $0,1,2,3$，…………8分

$P(\xi=0)=\frac{C_4^0}{C_7^3}=\frac{1}{35}$，$P(\xi=1)=\frac{C_4^1C_3^2}{C_7^3}=\frac{12}{35}$，

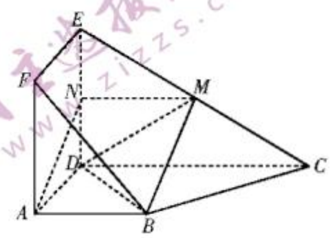
$P(\xi=2)=\frac{C_4^2C_3^1}{C_7^3}=\frac{18}{35}$，$P(\xi=3)=\frac{C_4^3C_3^0}{C_7^3}=\frac{4}{35}$.

所以 ξ 的分布列为：…………10分

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

$E\xi=0\times\frac{1}{35}+1\times\frac{12}{35}+2\times\frac{18}{35}+3\times\frac{4}{35}=\frac{12}{7}$. …………………………………………………12 分

19.(1)证明：设 N 为 DE 中点，



连接 MN,AN(如图)，

因为 M 为 EC 的中点，

所以 MN 为 $\triangle CDE$ 中位线，

所以 $MN\parallel CD$,且 $MN=\frac{1}{2}CD$.

又因为 $AB\parallel CD$,且 $AB=\frac{1}{2}CD$,

所以 $AB\parallel MN$,且 $AB=MN$.

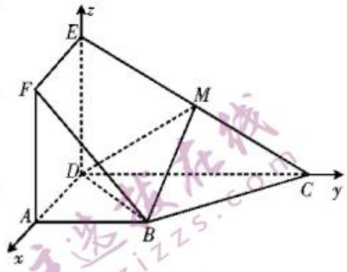
所以四边形 $ABMN$ 为平行四边形，

所以 $BM\parallel AN$. …………………………………………………………………………………… 2 分

因为 $AN\subset$平面 $ADEF$,$BM\not\subset$平面 $ADEF$,

所以 $BM\parallel$平面 $ADEF$. ……………………………………………………………………………… 4 分

(2)解：由已知，平面 $ADEF\perp$平面 $ABCD$,且四边形 $ADEF$ 为正方形，所以 $DE\perp AD$.



又平面 $ADEF\cap$平面 $ABCD=AD$,所以 $DE\perp$平面 $ABCD$,又 $DC\subset$平面 $ABCD$

所以 $DE\perp DC$. 又因为 $AD\perp CD$,$DE\perp DA$,所以 DA,DC,DE 两两互相垂直.

如图，以 D 为坐标原点，以 DA,DC,DE 所在的直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系. … 6 分

不妨设 $AB=1$,则 $D(0,0,0)$,$A(1,0,0)$,$B(1,1,0)$,$C(0,2,0)$,$E(0,0,1)$,

因为 M 为 EC 的中点，所以 $M(0,1,\frac{1}{2})$. 于是 $\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$,$\overrightarrow{DM}=(0,1,\frac{1}{2})$,

设平面 BDM 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DM}=0.\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x+y=0,\\ y+\frac{1}{2}z=0.\end{cases}$

令 $x=1$,则 $\boldsymbol{n}=(1,-1,2)$.

易知平面 ABF 的法向量为 $\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$, …………………………………………………… 8 分

设平面 BMD 与平面 ABF 所成锐二面角为 θ,

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{DA}\rangle|=|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{DA}|}|=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

所以平面 BMD 与平面 ABF 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$. ……………………………………… 12 分

20.(1)证明:函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. …………………………………… 1 分

当 $m=0$ 时, $f'(x)=e^{-x}\cdot\dfrac{x^3-x^2-x-1}{x^2}$. …………………………………… 2 分

设 $g(x)=x^3-x^2-x-1$,则 $g'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$.

则当 $x\in(-\infty,-\dfrac{1}{3})$ 时, $g'(x)>0$,函数 $g(x)$ 单调递增;

当 $x\in(-\dfrac{1}{3},0)$ 时 $g'(x)<0$,函数 $g(x)$ 单调递减. …………………………………… 4 分

所以在 $(-\infty,0)$ 内,函数 $g(x)$ 的最大值为 $g(-\dfrac{1}{3})=-\dfrac{22}{27}$.

即在 $(-\infty,0)$ 内,函数 $g(x)<0$.

由于 $e^{-x}>0,x^2>0$,所以在 $(-\infty,0)$ 上, $f'(x)<0$. …………………………………… 5 分

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减. …………………………………… 6 分

(2)解: $f'(x)=e^{-x}\cdot\dfrac{x^3-(m+1)x^2-x-1}{x^2}$. …………………………………… 7 分

设 $g(x)=x^3-(m+1)x^2-x-1$, $g'(x)=3x^2-2(m+1)x-1$.

若函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内有且只有一个极值点,则函数 $g(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上有且只有一个零点,且 $g(x)$ 在这个零点两侧异号.

设 $x_1,x_2(x_1<x_2)$ 是函数 $g'(x)$ 的两个零点

$(\Delta=4(m+1)^2+12>0$,方程 $g'(x)=0$ 有两个不相等的实数根).

则函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 内单调递增,在 (x_1,x_2) 内单调递减,在 $(x_2,+\infty)$ 内单调递增. 由于 $x_1,x_2(x_1<x_2)$ 是方程 $3x^2-2(m+1)x-1=0$ 的两根,且 $x_1\cdot x_2=-\dfrac{1}{3}$,

则 $x_1<0,x_2>0$,又 $g(0)=-1$,则 $g(x_2)<0$. …………………………………… 9 分

若函数 $g(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上有且只有一个零点 x_0,则 $\begin{cases}g(1)<0\\g(2)>0\end{cases}$.

解得 $-2<m<\dfrac{1}{4}$. …………………………………… 10 分

当 $x\in(1,x_0)$ 时, $g(x)<0$, $x\in(x_0,2)$ 时, $g(x)>0$,所以 $g(x)$ 在这个零点两侧异号,即 $f'(x)$ 在这个零点两侧异号. …………………………………… 11 分

当 $m\leq-2$ 时, $g(1)=-m-2\geq0$.

又 $g'(1)>0$, $g'(x)>0$ 在 $(1,2)$ 内成立,

所以 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 内单调递增,故 $f(x)$ 无极值点.

当 $m\geq\dfrac{1}{4}$ 时, $g(2)\leq0$, $g(0)<0$,易得 $x\in(1,2)$ 时, $g(x)<0$,故 $f(x)$ 无极值点.

所以当函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内有且只有一个极值点时, m 的取值范围是 $(-2,\dfrac{1}{4})$. ……………… 12 分

21.解:(1)当直线 AB 过抛物线焦点 F 且垂直于 x 轴时, A,B 两点横坐标为 $\dfrac{p}{2}$,

代入抛物线方程,可得 $y^2=p^2$,故 $|AB|=2p$, …………………………………… 2 分

$S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{2}\cdot 2p=\frac{p^2}{2}=2$，得 $p=2$，……………………………… 3 分

故抛物线 C 标准方程为 $y^2=4x$. ……………………………… 4 分

(2)设 $A(4t_1^2,4t_1)$，$B(4t_2^2,4t_2)$. ……………………………… 5 分

易知直线 $PA:2t_1y=x+4t_1^2$，直线 $PB:2t_2y=x+4t_2^2$，……………………………… 6 分

联立得 $P(4t_1t_2,2(t_1+t_2))$ 则 PA,PB 的中垂线方程分别为：

$l_1:y+2t_1x=4t_1^2(t_1+t_2)+(3t_1+t_2)$，

$l_2:y+2t_2x=4t_2^2(t_1+t_2)+(3t_2+t_1)$. ……………………………… 8 分

联立 l_1,l_2 解得：$M(2(t_1+t_2)^2+1,-4t_1t_2(t_1+t_2)+(t_1+t_2))$，……………………………… 9 分

由于 $F(1,0)$，故 $\overrightarrow{FP}=(2(2t_1t_2-\frac{1}{2}),2(t_1+t_2))$，

$\overrightarrow{FM}=(2(t_1+t_2)^2,-4t_1t_2(t_1+t_2)+(t_1+t_2))$

$\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FM}=(2(2t_1t_2-\frac{1}{2}),2(t_1+t_2))\cdot(2(t_1+t_2)^2,-4t_1t_2(t_1+t_2)+(t_1+t_2))=8t_1t_2(t_1+t_2)^2-$

$2(t_1+t_2)^2-8t_1t_2(t_1+t_2)^2+2(t_1+t_2)^2=0$，……………………………… 11 分

故 $\overrightarrow{FP}\perp\overrightarrow{FM}$，所以 $\angle PFM=\frac{\pi}{2}$，则 $\sin\angle PFM$ 的所有可能取值为 1. ……………………………… 12 分

22. 解：(1)由题意可知圆 C 普通方程为 $(x-2)^2+y^2=4$，直线 l 直角坐标方程为 $x+y-1=0$. ………… 4 分

(2)点 P 直角坐标为 $(0,1)$，设直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ 代入圆普通方程得 $t^2+3\sqrt{2}t+1=0$，……

……………………………… 6 分

设 A,B 对应参数为 t_1,t_2，则 Q 对应的参数为 $\frac{t_1+t_2}{2}$，……………………………… 8 分

故 $|PQ|=|\frac{t_1+t_2}{2}|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. ……………………………… 10 分

23. 解：(1) $x^2+y^2\geqslant\frac{(x+y)^2}{2}$，……………………………… 2 分

而 $x+y\geqslant\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{2}=2$，……………………………… 4 分

故 $x^2+y^2\geqslant 2$，当且仅当 $x=y=1$ 不等式取等号；……………………………… 5 分

(2)由柯西不等式可得 $(\sqrt{x}+1+\sqrt{y}+1)(\frac{x}{\sqrt{x}+1}+\frac{y}{\sqrt{y}+1})\geqslant(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=4$，……………………………… 8 分

而 $\sqrt{x}+1+\sqrt{y}+1=4$，故 $\frac{x}{\sqrt{x}+1}+\frac{y}{\sqrt{y}+1}\geqslant 1$，当且仅当 $x=y=1$ 不等式取等号. …………

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》