沈阳二中 2022-2023 学年度下学期第三次模拟考试

高三（23 届）数学试题答案

一、单项选择题

1-5　DBACD　　6-8　AC *B*

二、多项选择题

9. AC　　10.AC　　11. BCD　　12. *BC*

三、填空题

13. $-\dfrac{1}{2}$　　14. $-120.$　　15. 12　　16. $\dfrac{n}{4n+4}$

四、解答题

17. 解：(1) 由 $a_n+b_n=7n-1$，可得 $a_2+b_2=13$，联立 $a_2-b_2=1$，可得 $a_2=7,b_2=6$①，

令 $n=1$，可得 $a_1+b_1=6$，与 $a_2+b_2=13$ 联立，可得 $d_1+d_2=7$，与 $d_1-d_2=1$

联立得 $d_1=4,d_2=3$②.

由①②得：$a_n=7+(n-2)\times 4=4n-1,b_n=6+(n-2)\times 3=3n.$ .... 5 分

(2) 设 $a_n=b_m,m,n\in \mathrm{N}^*$，则 $4n-1=3m,m,n\in \mathrm{N}^*$，得 $m=\dfrac{4n-1}{3}$，

由 $m,n\in \mathrm{N}^*$，可得 $m=3k,k\in N^*$，

所以 $n=\{1,4,7,10,......\}$，即 $a_n=\{a_1,a_4,a_7,a_{10},......\}$，

设 $\{c_n\}$ 是由数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的公共项组成的数列，

则 $\{c_n\}$ 为首项为 3，公差为 12 的等差数列，且 $c_k=12k-9,k\in N^*$.

$\{c_n\}$ 在 $(1,100)$ 中有 $c_1=3$,$c_2=15$，$c_9=$　，所以 $\{c_n\}$ 的前 8 项和为

$S=\dfrac{9\times(3+99)}{2}=459.$ .... 10 分

18. 解：(1) 记“从 10 所学校中选出的 3 所学校参与“自由式滑雪”都超过 40 人”的事件为 *A*；参与“自由式滑雪”的人数超过 40 人的学校共 4 所，随机选择 3 所学校共 $C_4^3=4$ 种，

所以 $P(A)=\dfrac{C_4^3}{C_{10}^3}=\dfrac{4}{\dfrac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1}}=\dfrac{1}{30}.$ .... 4 分

(2) X 的所有可能取值为 0，1，2，3，参加“单板滑雪”人数在 45 人以上的学校共 4 所.

所以 $P(X=0)=\dfrac{C_4^0\cdot C_6^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{6}$， $P(X=1)=\dfrac{C_4^1\cdot C_6^2}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{2}$， $P(X=2)=\dfrac{C_4^2\cdot C_6^1}{C_{10}^3}=\dfrac{3}{10}$，

$P(X=3)=\dfrac{C_4^3\cdot C_6^0}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{30}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

所以 $E(X)=0\times\dfrac{1}{6}+1\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{3}{10}+3\times\dfrac{1}{30}=\dfrac{6}{5}$. ………………………………… 8 分

(3) 小明同学在一轮测试中为“优秀”的概率为：$p=C_3^2\cdot(\dfrac{1}{3})^2(1-\dfrac{1}{3})+C_3^3(\dfrac{1}{3})^3=\dfrac{7}{27}$，

小明在 n 轮测试中获“优秀”次数 ξ 满足 $\xi\sim B(n,p)$，由 $np\geqslant 5$，则 $n\geqslant\dfrac{135}{7}\approx 19.286$，

所以理论上至少要进行 20 次测试. ………………………………… 12 分

19. 解：(1) 证明：$\because PA\perp$ 平面 ABCD， $CD\subset$ 平面$ABCD$，

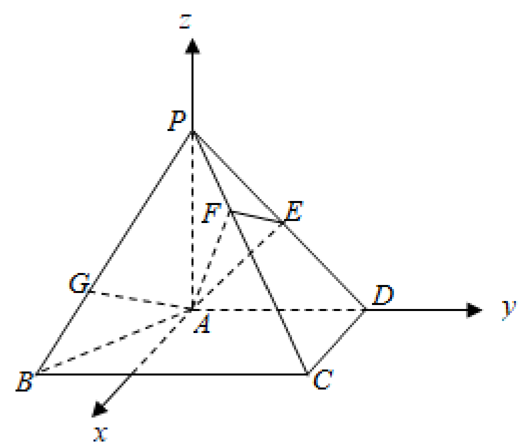
$\therefore PA\perp CD$，

$\because AD\perp CD$， $PA\cap AD=A$， $PA\subset$ 平面 PAD， $AD\subset$ 平面 PAD，

$\therefore CD\perp$ 平面 PAD. ………………………………… 3 分

(2) 以 A 为原点，在平面 ABCD 内过 A 作 CD 的平行线为 x 轴，

AD 为 y 轴，AP 为 z 轴，建立空间直角坐标系，



$A(0,0,0)$，$E(0,1,1)$，$F(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3})$，$P(0,0,2)$，$B(2,-1,0)$，

$\overrightarrow{AE}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{AF}=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3})$，

平面 AEP 的一个法向量为$\vec{n}=(1,0,0)$，

设平面 AEF 的一个法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AE}=y+z=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{4}{3}z=0\end{cases}$，取$y=1$，得$z=-1$，$x=1$. 故$\vec{m}=(1,1,-1)$，

设二面角$F-AE-P$的平面角为θ，由图可知θ为锐角，

则$\cos\theta=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore$二面角$F-AE-P$的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故二面角$F-AE-P$的正弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$. ....8 分

(3) 存在这样的λ，理由如下：

由$\overrightarrow{PG}=\lambda\overrightarrow{PB}$可得$PG=(2\lambda,-\lambda,-2\lambda)$，则$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PG}=(2\lambda,-\lambda,2-2\lambda)$，

若 A，E，F，G 四点共面，则$\overrightarrow{AG}$在平面 AEF 内，平面 AEF 的一个法向量为$\vec{m}=(1,1,-1)$，

所以$\vec{m}\cdot\overrightarrow{AG}=0$，$2\lambda-\lambda+2\lambda-2=0$，$\lambda=\frac{2}{3}$，

所以存在这样的$\lambda=\frac{2}{3}$使得四点共面. .... 12 分

20. 解：(1) 由余弦定理得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$又$b^2-a^2=ac$，

所以$a(1+2\cos B)=c$，

由正弦定理得$\sin A(1+2\cos B)=\sin C$，又$A+B+C=\pi$，

所以$\sin A(1+2\cos B)=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$得$\sin A=\sin(B-A)$，

在三角形中得$A=B-A$或$\pi-A=B-A$(舍去) 得$B=2A$；........................... 6 分

(2) 由 (1) 知 $B=2A$ 且 $A+B+C=\pi$，所以 $0<3A<\pi$ 所以 $0<A<\frac{\pi}{3}$，

$\cos C+\cos A=-\cos 3A+\cos A$

$=-\cos(2A+A)+\cos A$

$=\sin 2A\sin A-\cos 2A\cos A+\cos A$

$=2\sin^2 A\cos A-(2\cos^2 A-1)\cos A+\cos A$

$=4\cos A-4\cos^3 A$，

令 $x=\cos A$，$f(x)=4x-4x^3$ 且 $\frac{1}{2}<x<1$，.. 9 分

$f'(x)=4-12x^2=4(1-3x^2)$，

可知当 $\frac{1}{2}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时 $f'(x)>0$ 所以 $f(x)=4x-4x^3$ 在 $\frac{1}{2}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$ 单调递增，

可知当 $\frac{\sqrt{3}}{3}<x<1$ 时 $f'(x)<0$ 所以 $f(x)=4x-4x^3$ 在 $\frac{\sqrt{3}}{3}<x<1$ 单调递减，

$f(x)$ 在 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时取到极大值也是最大值，且最大值为 $\frac{8\sqrt{3}}{9}$，

又 $f(\frac{1}{2})=\frac{3}{2}$，$f(0)=0$，$f(\frac{1}{2})>f(0)$，所以 $0<f(x)\leqslant\frac{8\sqrt{3}}{9}$，

故 $\cos C+\cos A$ 的取值范围为 $(0,\frac{8\sqrt{3}}{9}]$. .... 12 分

21. 解：(1) 由题知 $b=1$，$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 $a=2$，$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ....2 分

(2) 由题意知直线 *TM* 的方程为 $y=\frac{x}{t}+1$，直线 *TN* 的方程为 $y=\frac{3x}{t}-1$.

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=\frac{x}{t}+1\end{cases}$，得 $E(-\frac{8t}{t^2+4},\frac{t^2-4}{t^2+4})$. 同理，$F(\frac{24t}{t^2+36},-\frac{t^2-36}{t^2+36})$.

所以直线 *EF* 的方程为：$y-\frac{t^2-4}{t^2+4}=-\frac{t^2-12}{16t}(x+\frac{8t}{t^2+4})$，即 $\frac{t^2-12}{16t}x+y-\frac{1}{2}=0$.

所以，直线 EF 过定点 $P(0,\frac{1}{2})$. .... 7 分

(3) $S_{\triangle TEF}=S_{\triangle TMN}-S_{\triangle FPN}+S_{\triangle PEM}=|t|-\frac{18|t|}{t^2+36}+\frac{2|t|}{t^2+4}$.

因为 $S_{\triangle TMN}=|t|$，

所以 $k=\frac{S_{\triangle TMN}}{S_{\triangle TEF}}=\frac{t^4+40t^2+144}{t^4+24t^2+144}$

$=1+\frac{16}{t^2+\frac{144}{t^2}+24}\leqslant 1+\frac{16}{2\sqrt{144}+24}=\frac{4}{3}$.

当且仅当 $t^2=\frac{144}{t^2}$，即 $t=\pm 2\sqrt{3}$ 时，等号成立.

所以当 $t=\pm 2\sqrt{3}$ 时，k 取得最大值 $\frac{4}{3}$. .... 12 分

22.解：(1) 令 $F(x)=f(x)-g(x)=k\ln(x+1)-x$， $x\in[0,+\infty)$

则 $F'(x)=\frac{k}{1+x}-1=\frac{(k-1)-x}{1+x}$

当 $k\leqslant 1$ 时， $k-1-x\leqslant 0$ 对于 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立，又 $1+x>0$ 所以 $F'(x)\leqslant 0$ 恒成立

所以 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减

所以当 $x=0$ 时， $F(x)$ 有最大值，且最大值为 0

当 $k>1$ 时知 $0<x<k-1$ 时 $F'(x)>0$，函数 $F(x)$ 单调递增

$x>k-1$ 时 $F'(x)<0$，函数 $F(x)$ 单调递减

所以 $x=k-1$ 时 $F(x)$ 有最大值，且最大值为 $k\ln k-k+1$. ....5 分

(2) 由知 (1) 知，当 $k<1$ 时， $x\in(0,+\infty)$ 时 $y=f(x)-g(x)<0$

当 $k>1$ 时，对任意的 $x\in(0,k-1)$， $y=f(x)-g(x)>0$

又欲 $|f(x)-g(x)|<kx^2$ 成立，显然 $k>0$

当 $0<k<1$ 时， $|f(x)-g(x)|=g(x)-f(x)=x-k\ln(1+x)$

令 $M(x)=x-k\ln(1+x)-kx^2$， $x\in[0,+\infty)$，则有

$$M'(x)=1-\frac{k}{1+x}-2kx=\frac{-2kx^2+(1-2k)x+1-k}{1+x}，\quad x\in(0,+\infty)$$

$-2kx^2+(1-2k)x+1-k=0$ 有两个不同实数根 $x_1=\dfrac{1-2k-\sqrt{1+4k-4k^2}}{4k}$，

$x_2=\dfrac{1-2k+\sqrt{1+4k-4k^2}}{4k}$，且 $x_1<0<x_2$

故当 $0<x<x_2$ 时，$M'(x)>0$，$M(x)$ 在 $0<x<x_2$ 上单调递增

故 $M(x)>M(0)=0$ 即 $|f(x)-g(x)|>kx^2$，所以满足题意的 t 不存在

当 $k>1$ 时由 (1) 知存在 $x_0=k-1>0$，使得对任意的 $x\in(0,x_0)$ 恒有 $f(x)-g(x)>0$

此时 $|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)=k\ln(1+x)-x$

令 $N(x)=k\ln(1+x)-x-kx^2$，$x\in(0,+\infty)$，则有

$$N'(x)=\frac{k}{1+x}-1-2kx=\frac{-2kx^2-(2k+1)x+k-1}{1+x}，\quad x\in(0,+\infty)$$

$-2kx^2-(2k+1)x+k-1=0$ 有两个不同实数根 $x_1=\dfrac{-(2k+1)-\sqrt{12k^2-4k+1}}{4k}$

$x_2=\dfrac{-(2k+1)+\sqrt{12k^2-4k+1}}{4k}$ 且 $x_1<0<x_2$

故当 $0<x<x_2$ 时，$N'(x)>0$，$N(x)$ 在 $0<x<x_2$ 上单调递增

故 $N(x)>N(0)=0$ 即 $|f(x)-g(x)|>kx^2$，

记 x_0 与 x_2 中较小者为 x_0'，则当 $0<x<x_0'$ 时恒有 $|f(x)-g(x)|>kx^2$，

所以满足题意的 t 不存在

当 $k=1$ 时，则 (1) 知，当 $x\in(0,+\infty)$，$|f(x)-g(x)|=g(x)-f(x)=x-\ln(1+x)$

令 $h(x)=x-\ln(1+x)-x^2$，$x\in(0,+\infty)$，则有

$$h'(x)=1-\frac{1}{1+x}-2x=\frac{-2x^2-x}{1+x}，\quad x\in(0,+\infty)$$

当 $x>0$ 时 $h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在 $x>0$ 时单调递减，故 $h(x)<h(0)=0$

故当 $x>0$ 时，恒有 $|f(x)-g(x)|<x^2$，此时，任意实数 t 满足题意

综上，$k=1$ .... 12 分