

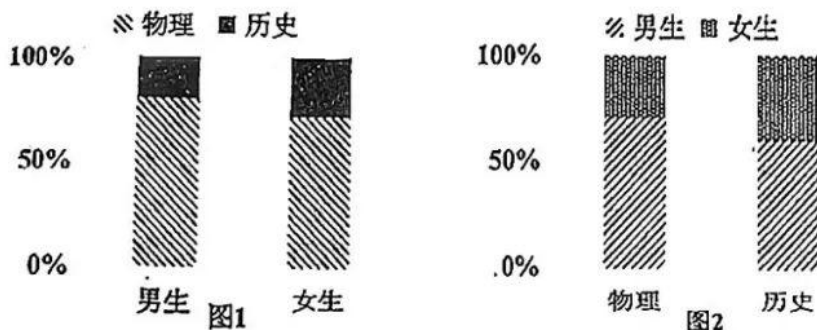
## 数学试题（理科）

### 注意事项：

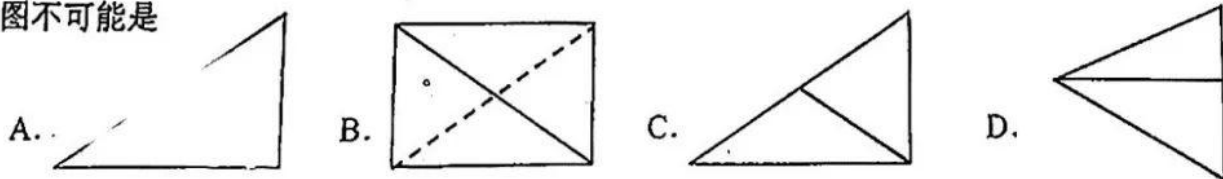
1. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x | \sqrt{x} \leq 1\}$ ,  $B = \{x | x < 1\}$ , 则  $A \cap B =$   
A.  $[0, 1)$       B.  $(0, 1)$       C.  $(-\infty, 1)$       D.  $(-\infty, 1]$
2. 复数  $z$  满足  $\frac{1}{z} = 2i$ , 则  $z =$   
A.  $-\frac{1}{2}$       B.  $\frac{1}{2}$       C.  $-\frac{1}{2}i$       D.  $\frac{1}{2}i$
3. 已知向量  $a, b$ , 满足  $a \perp b$ ,  $a = (1, 2)$ , 则  $(a-b) \cdot a =$   
A. 0      B. 2      C.  $\sqrt{5}$       D. 5
4. 四川省将从 2022 年秋季入学的高一年级学生开始实行高考综合改革，高考采用“3+1+2”模式，其中“1”为首选科目，即物理与历史二选一。某校为了解学生的首选意愿，对部分高一学生进行了抽样调查，制作出如下两个等高条形图，根据条形图信息，下列结论正确的是



- A. 样本中选择物理意愿的男生人数少于选择历史意愿的女生人数
  - B. 样本中女生选择历史意愿的人数多于男生选择历史意愿的人数
  - C. 样本中选择物理学科的人数较多
  - D. 样本中男生人数少于女生人数
5. 三棱锥  $P-ABC$  的底面  $ABC$  为直角三角形， $\triangle ABC$  的外接圆为圆  $O$ ,  $PQ \perp$  底面  $ABC$ ,  $Q$  在圆  $U$  上或内部，现将三棱锥的底面  $ABC$  放置在水平面上，则三棱锥  $P-ABC$  的俯视图不可能是



6. “ $a > b > 0$ ”是“ $\frac{a}{b} > e^{b-a}$ ”的
- A. 充分不必要条件  
B. 必要不充分条件  
C. 充分必要条件  
D. 既不充分也不必要条件
7. 把一个三边均为有理数的直角三角形面积的数值称为同余数，如果正整数  $n$  为同余数，则称  $n$  为整同余数. 2021 年 11 月 3 日，2020 年度国家科学奖励大会在人民大会堂隆重召开，中国科学院研究员田刚以“同余数问题与  $L$ -函数的算术”项目荣获 2020 年度国家自然科学奖二等奖，在同余数这个具有千年历史数学中最重要的古老问题上取得突破性进展. 在  $\triangle ABC$  中， $C = \frac{\pi}{2}$ ， $\triangle ABC$  绕  $AC$  旋转一周，所成几何体的侧面积和体积的数值之比为 5:4，若  $\triangle ABC$  的面积  $n$  为整同余数，则  $n$  的值可以为
- A. 5  
B. 6  
C. 8  
D. 12
8. 将函数  $f(x) = \sin(\frac{1}{2}\omega x + \frac{\pi}{3})$  ( $\omega > 0$ ) 图象上所有点的横坐标缩短到原来的  $\frac{1}{2}$  倍，纵坐标不变，得到函数  $g(x)$  的图象，直线  $l$  与曲线  $y = g(x)$  仅交于  $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ， $P(\frac{\pi}{6}, g(\frac{\pi}{6}))$  三点， $\frac{\pi}{6}$  为  $x_1, x_2$  的等差中项，则  $\omega$  的最小值为
- A. 8  
B. 6  
C. 4  
D. 2
9. 点  $F$  为双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的一个焦点，过  $F$  作双曲线的一条渐近线的平行线交双曲线于点  $A$ ， $O$  为原点， $|OA| = b$ ，则双曲线的离心率为
- A.  $\sqrt{2}$   
B.  $2\sqrt{3}$   
C.  $2\sqrt{2}$   
D.  $\sqrt{3}$
10. 曲线  $f(x) = (x+m)\ln x$  ( $m \in \mathbf{R}$ ) 在点  $(1, f(1))$  处的切线平分圆  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ ，则
- A.  $y = f(x)$  有两个零点  
B.  $y = f(x)$  有极大值  
C.  $y = f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上为增函数  
D. 当  $x > 1$  时， $f(x) > 0$
11. 在棱长为 2 的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中， $E, F$  分别为  $AB, BC$  的中点，则
- A. 异面直线  $DD_1$  与  $B_1F$  所成角的余弦值为  $\frac{\sqrt{5}}{5}$   
B. 点  $P$  为正方形  $A_1B_1C_1D_1$  内一点，当  $DP \parallel$  平面  $B_1EF$  时， $DP$  的最小值为  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$   
C. 过点  $D_1, E, F$  的平面截正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  所得的截面周长为  $3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$   
D. 当三棱锥  $B_1 - BEF$  的所有顶点都在球  $O$  的表面上时，球  $O$  的表面积为  $12\pi$
12. 函数  $f(x)$  满足  $f(2-x) + f(x) = 2$ ，令  $g(x) = f(x+1) - 1$ ，对任意的  $x < 0$ ，都有  $g(\frac{x}{x-1}) = xg(x)$ ，若  $g(\frac{1}{100}) = \frac{2}{99!}$ ，则  $f(0) =$
- A. -1  
B. 3  
C. 1  
D.  $\frac{1}{99!}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13.  $(x + \frac{1}{x})^8$  展开式中的常数项为\_\_\_\_\_ (用数字作答)。

14. 定义  $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$ ，现从集合  $\{x \in \mathbb{N}^* | x < 10\}$  中随机取两个不同的元素  $m, n$ ，则满足  $\begin{vmatrix} 2 & m \\ 3 & n \end{vmatrix} = 0$  的概率为\_\_\_\_\_。

15. 已知正方形  $ABCD$  边长为2， $M, N$  两点分别为边  $BC, CD$  上动点， $\angle MAN = 45^\circ$ ，则  $\triangle CMN$  的周长为\_\_\_\_\_。

16. 斜率为1的直线  $l$  与曲线  $C: y^2 = 2px (p > 0, y \geq 0)$  交于  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  两点， $F$  为  $y^2 = 2px$  的焦点， $x_2 - x_1 = 2$ ， $|AF| + |BF| = 3$ ，点  $M(x_0, y_0) (x_1 < x_0 < x_2)$  为曲线  $C$  上一点，当  $\triangle MAB$  的面积取最大值时， $|MF| =$ \_\_\_\_\_。

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共60分。

17. (12分)

党的十九大提出实施乡村振兴战略以来，农民收入大幅提升，2022年9月23日某市举办中国农民丰收节庆祝活动，粮食总产量有望连续十年全省第一。据统计该市2017年至2021年农村居民人均可支配收入的数据如下表：

年份	2017	2018	2019	2020	2021
年份代码 $x$	1	2	3	4	5
人均可支配收入 $y$ (单位：万元)	1.30	1.40	1.62	1.68	1.80

(i) 根据上表统计数据，计算  $y$  与  $x$  的相关系数  $r$ ，并判断  $y$  与  $x$  是否具有较高的线性相关程度 (若  $0.30 \leq |r| < 0.75$ ，则线性相关程度一般，若  $|r| \geq 0.75$  则线性相关程度较高， $r$  精确到0.01)；

(2) 市五届人大二次会议政府工作报告提出，2022年农村居民人均可支配收入力争不低于1.98万元，求该市2022年农村居民人均可支配收入相对2021年增长率最小值 (用百分比表示)。

参考公式和数据：相关系数  $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$ ， $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 1.28$ ，

$\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 \approx 0.17$ ， $\sqrt{1.7} \approx 1.3$ 。

18. (12分)

已知正项等比数列  $\{a_n\}$  前  $n$  项和为  $S_n$ ， $a_4 = a_2^3$ ，当  $n \geq 2$  时， $S_n = 2S_{n-1} + m$ ， $m \in \mathbb{R}$ 。

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式；

(2) 求数列  $\left\{ \frac{m \cdot 2^n}{a_n} \right\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ 。

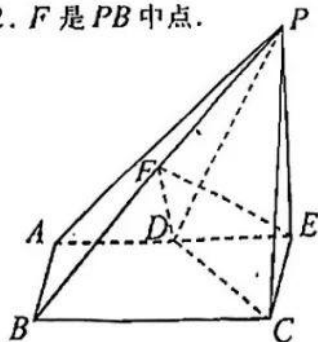
19. (12分)

如图, 四棱锥  $P-ABCD$  的底面  $ABCD$  是梯形,  $AD \parallel BC$ ,  $AB \perp BC$ .  $E$  为  $AD$  延长线上一点,  $PE \perp$  平面  $ABCD$ ,  $PE = 2AD$ ,  $\tan \angle PDA = -2$ .  $F$  是  $PB$  中点.

(1) 证明:  $EF \perp PA$ ;

(2) 若  $BC = 2AD = 2$ , 三棱锥  $E-PDC$  的体积为  $\frac{1}{3}$ ,

求二面角  $F-DE-C$  的余弦值.



20. (12分)

已知直线  $l: y = kx (k > 0)$  交椭圆  $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  于  $A, B$  两点,  $F_1, F_2$  为  $C$  的左、右焦点,  $F_1$  关于直线  $l$  的对称点在  $C$  上.

(1) 求  $k$  的值;

(2) 过  $F_2$  斜率为  $k_1$  的直线交线段  $AB$  于点  $D$ , 交  $C$  于点  $M, N$ , 求  $\frac{|F_2D|^2}{|MN|}$  的最小值.

21. (12分)

已知函数  $f(x) = xe^{-mx} - \ln x (m \in \mathbf{R})$ .

(1) 若  $x=1$  是函数  $f(x)$  的极值点, 求  $f(x)$  的单调区间;

(2) 证明: 当  $m < -\frac{1}{2}$  时, 曲线  $y=f(x)$  上的所有点均在抛物线  $x^2 = y$  的内部.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程](10分)

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 以坐标原点  $O$  为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 2\rho \sin \theta - 2 = 0$ , 直线  $l$  的参数方程为

$$\begin{cases} x = 2 + t \cos \theta, \\ y = 2 + t \sin \theta \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$

(i) 写出曲线  $C$  的直角坐标方程;

(2) 设直线  $l$  与曲线  $C$  交于  $A, B$  两点, 定点  $P(2, 2)$ , 求  $|PA| + |PB|$  的最小值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲](10分)

设函数  $f(x) =$

(1) 若  $f(x) > f(x+m)$  的解集为  $\{x | x < 0\}$ , 求实数  $m$  的值;

(2) 若  $0 < a < b$ , 且  $f(a) = f(b)$ , 求  $\frac{4}{a} + \frac{1}{b-1}$  的最小值.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

