2023年普通高等学校招生全国统一考试
（第二次模拟考试）
理科数学参考答案

一、选择题

1. B　2. C　3. D　4. B　5. C　6. A　7. A　8. D　9. B　10. C　11. D　12. A

二、填空题

13. 3　14. $30°$(或$\frac{\pi}{6}$)　15. $(x-2)^2+(y-1)^2=5$　16. 192π

三、解答题

17. 解：(1)设$\{a_n\}$的公差为d，$\{b_n\}$的公比为q，则$a_n=1+(n-1)d$，$b_n=2q^{n-1}$. ……… 2分

由$a_2+b_2=4$得$d+2q=3$，由$a_3+b_3=13$得$d+q^2=6$，

联立$\begin{cases}d+2q=3,\\d+q^2=6,\end{cases}$解得$\begin{cases}d=-3,\\q=3,\end{cases}$ …………………… 4分

所以$a_n=-3n+4$，$b_n=2\times3^{n-1}$. …………………… 6分

(2)设$\{a_n\}$的公差为d，$\{b_n\}$的公比为q，

由$b_1=2$，$S_3=14$，得$q^2+q-6=0$，解得$q=2$，或$q=-3$， …………………… 8分

当$q=2$时，由$a_2+b_2=4$，得$d+2q=3$，所以$d=-1$，故$T_4=4a_1+6d=-2$， …… 10分

当$q=-3$时，由$a_2+b_2=4$，得$d+2q=3$，所以$d=9$，故$T_4=4a_1+6d=58$. …… 12分

18. 解：(1)“乙队连胜四场”的事件为$ACAC$， …………………… 2分

所以$P(ACAC)=P(A)P(C)P(A)P(C)=0.5\times0.4\times0.5\times0.4=0.04$. ………… 4分

(2)“比赛四场结束”共有三种情况，分别是：

“甲队连胜四场”为事件$BCBC$；“乙队连胜四场”为事件$ACAC$；

“丙队上场后连胜三场”为事件$ABAB$和事件$BABA$. …………………… 7分

所以，“比赛四场结束”的概率为$P_1=P(BCBC)+P(ACAC)+P(ABAB)+P(BABA)$

$=(0.5\times0.6\times0.5\times0.6)+(0.5\times0.4\times0.5\times0.4)+(0.5\times0.6\times0.4\times0.6)+(0.5\times0.4\times0.6\times0.4)$

$=0.09+0.04+0.072+0.048=0.25$. …………………… 10分

(3)根据赛制，至少需要进行四场比赛，至多需要进行五场比赛.

所以，需要进行第五场比赛的概率为$P=1-P_1=0.75$. …………………… 12分

19. 解：(1)设M为SD的中点，连接ME，MA，

因为ME是$\triangle SDC$的中位线，所以$ME=\frac{1}{2}DC=AD=1$，

又因为$AD=BC$，且$AD/\!/BC$，所以底面$ABCD$为平行四边形.

所以$AF=\frac{1}{2}AB=1$，又$ME/\!/DC$，且$DC/\!/AB$，故$ME/\!/AB$，

且$ME=AF=1$，所以四边形$AFEM$是平行四边形. …………………… 2分

所以$AM/\!/FE$，又$AM\subset$平面SAD，$EF\not\subset$平面SAD，

所以$EF/\!/$平面SAD. …………………… 4分

(2)因为$SD=SC=\sqrt{2}AD=\sqrt{2}$，又$DC=2$，

所以$SD^2+SC^2=DC^2$，故$SD\perp SC$.

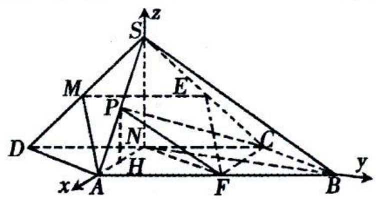
设N是DC的中点，连接SN，因为$SD=SC$，

所以$SN\perp DC$，又平面$SDC\perp$底面$ABCD$，$SN\subset$平面SDC，

所以$SN\perp$平面$ABCD$. …………………… 6分

连接NA，NB，NF，在$\triangle ADN$中，$\angle ADN=60°$，$DN=DA$，

所以$\triangle ADN$是正三角形，
在$\triangle BCN$中，$\angle BCN=120°$，$NC=CB=1$，所以$\angle BNC=\angle NBC=30°$，
所以$\angle ANB=90°$，即$AN\perp NB$. ………………………………………………………… 7 分
因为NS,NA,NB两两互相垂直，故以N为坐标原点，
向量$\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB},\overrightarrow{NS}$所在直线分别为$x,y,z$轴建立空间直角坐标系$N-xyz$. ……………… 8 分
在$\triangle NCB$中，由余弦定理得$NB=\sqrt{3}$.



过点P作$PH\perp AN$，垂足为H，则$PH\perp$底面$ABCD$，
且$PH/\!/SN$，所以$Rt\triangle PHA$与$Rt\triangle SNA$相似，
因为$SN=NA=1$，所以$PH=HA$.
设P的坐标为$(t,0,t)$ $(t>0)$，则$N(0,0,0)$，
$A(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$F(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，
$C(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$\overrightarrow{PF}=(\frac{1}{2}-t,\frac{\sqrt{3}}{2},-t)$，
设底面$ABCD$的法向量为$\vec{m}=(0,0,1)$，
当PF与底面$ABCD$所成角为30°时，$\overrightarrow{PF}$与$\vec{m}$所成角为60°.
故$\cos<\vec{m},\overrightarrow{PF}>=|\frac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{PF}}{|\vec{m}||\overrightarrow{PF}|}|=\frac{1}{2}$，即$\frac{t}{\sqrt{(\frac{1}{2}-t)^2+\frac{3}{4}+t^2}}=\frac{1}{2}$，解得$t=\frac{1}{2}$.
……………………………………………………………………………… 10 分
所以$P(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{PF}=(0,\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{PC}=(-1,\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{PA}=(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2})$.
设平面PCF的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，
则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PF}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{z}{2}=0,\\ -x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{1}{2}z=0,\end{cases}$可取$x=0,y=1,z=\sqrt{3}$，所以$\vec{n}=(0,1,\sqrt{3})$，
设平面PAF的法向量为$\vec{m}=(p,r,q)$，
则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PA}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PF}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\frac{p}{2}-\frac{q}{2}=0,\\ \frac{\sqrt{3}}{2}r-\frac{q}{2}=0,\end{cases}$可取$p=\sqrt{3},r=1,q=\sqrt{3}$，所以$\vec{m}=(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$，
故$\cos<\vec{n},\vec{m}>=\frac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\frac{4}{\sqrt{4}\times\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.
所以二面角$C-PF-A$的正弦值为$\frac{\sqrt{21}}{7}$. ……………………………………………… 12 分

20. 解：(1)直线MQ的方程为$y=\frac{t}{2}(x+2)$，直线PR的方程为$y=-\frac{1}{t}(x-2)$， …… 2 分
两式相乘，得$y^2=-\frac{1}{2}(x^2-4)$，即$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.
因为$t\neq0$，所以$y\neq0$，故点R的轨迹C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1(y\neq0)$. ……………… 4 分
(2)设直线AB的方程为$x=my+1$，点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases}x=my+1,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1,\end{cases}$消去 x 并整理,得$(m^2+2)y^2+2my-3=0$,则$\triangle=16m^2+24>0$,

$y_1+y_2=-\dfrac{2m}{m^2+2}$,$y_1y_2=-\dfrac{3}{m^2+2}$, ………………………………………………………… 6分

所以$|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\dfrac{2\sqrt{4m^2+6}}{m^2+2}$,

$\triangle MAB$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}|y_1-y_2|\times|MD|=\dfrac{3\sqrt{4m^2+6}}{m^2+2}=\dfrac{12\sqrt{4m^2+6}}{4m^2+8}=$

$\dfrac{12}{\sqrt{4m^2+6}+\dfrac{2}{\sqrt{4m^2+6}}}$, ………………………………………………………… 8分

设$t=\sqrt{4m^2+6}$,则$t\geqslant\sqrt{6}$,设$f(t)=t+\dfrac{2}{t}(t\geqslant\sqrt{6})$,

则$f'(t)=1-\dfrac{2}{t^2}>0$,$f(t)$在$[\sqrt{6},+\infty)$是增函数, ………………………………… 10分

故$f(t)\geqslant f(\sqrt{6})=\sqrt{6}+\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{8}{\sqrt{6}}$,即$\sqrt{4m^2+6}+\dfrac{2}{\sqrt{4m^2+6}}\geqslant\dfrac{8}{\sqrt{6}}$,有$S\leqslant\dfrac{12}{\frac{8}{\sqrt{6}}}=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$,

因此,当$t=\sqrt{6}$,即$m=0$时,S存在最大值为$\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$. ………………………………… 12分

21. 解:(1)当$a=\dfrac{e^{-2}}{2}$时,$f(x)=\dfrac{e^{2x-2}}{2}+(1-x)e^x+\dfrac{e^{-2}}{2}$,$f'(x)=e^{2x-2}-xe^x$,故$g(x)=e^x-xe^2$,

…………………………………………………………………………………………… 2分

所以$g'(x)=e^x-e^2$,当$x\in(-\infty,2)$时,$g'(x)<0$;当$x\in(2,+\infty)$时,$g'(x)>0$,

所以$g(x)$的单调递减区间为$(-\infty,2)$,单调递增区间为$(2,+\infty)$. ……………… 4分

(2)①$f'(x)=e^x(2ae^x-x)$,依据题意可知$f'(x)=0$有两个不等实数根,

即$2ae^x-x=0$有两个不等实数根x_1,x_2. ………………………………………………… 6分

由$2ae^x-x=0$,得$a=\dfrac{x}{2e^x}$,所以$2ae^x-x=0$有两个不等实数根可转化为函数$y=a$和$y=\dfrac{x}{2e^x}$的图象有两个不同的交点,令$h(x)=\dfrac{x}{2e^x}$,则$h'(x)=\dfrac{1-x}{2e^x}$,

因为$h(x)$在$(-\infty,1)$单调递增,在$(1,+\infty)$单调递减,所以$h(x)\leqslant h(1)=\dfrac{1}{2e}$.

又当$x\to+\infty$时,$h(x)\to0$,当$x\to-\infty$时,$h(x)\to-\infty$,

因为$y=a$与$y=h(x)$的图象有两个不同的交点,所以$a\in(0,\dfrac{1}{2e})$. ……………… 8分

② 由①可知$2ae^x-x=0$有两个不等实数根x_1,x_2,联立$\begin{cases}2ae^{x_1}=x_1,\\ 2ae^{x_2}=x_2,\end{cases}$可得$a=\dfrac{x_1-x_2}{2(e^{x_1}-e^{x_2})}$,

所以不等式$x_1+2x_2>3$等价于$x_1+2x_2=2ae^{x_1}+4ae^{x_2}=\dfrac{x_1-x_2}{e^{x_1}-e^{x_2}}(e^{x_1}+2e^{x_2})=$

$\dfrac{x_1-x_2}{e^{x_1-x_2}-1}(e^{x_1-x_2}+2)>3$.

令$t=x_1-x_2$,则$t<0$,且$x_1+2x_2>3$等价于$\dfrac{t}{e^t-1}(e^t+2)>3$.

所以只要不等式$(3-t)e^t-2t-3>0$在$t<0$时成立即可. ………………………… 10分

设函数$m(t)=(3-t)e^t-2t-3(t<0)$,则$m'(t)=(2-t)e^t-2(t<0)$,

设$p(t)=(2-t)e^t-2(t<0)$,则$p'(t)=(1-t)e^t>0(t<0)$,

故$p(t)=m'(t)$在$(-\infty,0)$单调递增,得$m'(t)<m'(0)=0$,

所以$m(t)$在$(-\infty,0)$单调递减,得$m(t)>m(0)=0$.

综上,原不等式$x_1+2x_2>3$成立. ………………………… 12分

22. 解:(1)由C的参数方程消去参数t,得C的普通方程为$y^2=4x$. ………………………… 3分

(2)根据(1),设$P(x,y)$,$A(4t_1^2,4t_1)$,$B(4t_2^2,4t_2)$,$(t_1\neq t_2$,且$t_1t_2\neq 0)$,

则$k_{OA}=\dfrac{4t_1}{4t_1^2}=\dfrac{1}{t_1}$,$k_{OB}=\dfrac{4t_2}{4t_2^2}=\dfrac{1}{t_2}$,因为$OA\perp OB$,所以$k_{OA}\cdot k_{OB}=-1$,得$t_1t_2=-1$, ……

………………………… 5分

又$k_{OP}=\dfrac{y}{x}$,$k_{AB}=\dfrac{1}{t_2+t_1}$,因为$OP\perp AB$,所以$k_{OP}\cdot k_{AB}=-1$,即$t_1+t_2=-\dfrac{y}{x}(x\neq 0)$, …

………………………… 7分

因为A,P,B三点共线,所以$k_{AP}=k_{PB}$,

即$\dfrac{4t_1-y}{4t_1^2-x}=\dfrac{4t_2-y}{4t_2^2-x}$,整理得$x-(t_1+t_2)y+4t_1t_2=0$,

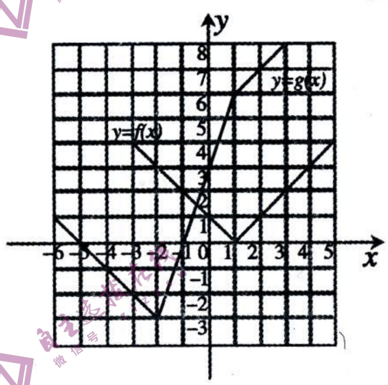
把$t_1+t_2=-\dfrac{y}{x}$和$t_1t_2=-1$,代入上式,得$x^2+y^2-4x=0\ (x\neq 0)$,

故点P轨迹的极坐标方程为$\rho=4\cos\theta\ (\rho\neq 0)$. ………………………… 10分

23. 解:由已知得$g(x)=\begin{cases}-x-5, x<-2,\\ 3x+3, -2\leqslant x\leqslant 1,\\ x+5, x>1.\end{cases}$ ……

………………………… 3分

$y=f(x)$和$y=g(x)$的图象如图所示.



………………………… 5分

(2)$y=f(x+a)$的图象是由函数$y=f(x)$的图象向左平移$a(a>0)$个单位长度,或向右平移$|a|$ $(a<0)$个单位长度得到的,根据图象与$f(x+a)\geqslant g(x)$,

可知把函数$y=f(x)$的图象向右平移不符合题意,只能向左平移. ………………………… 7分

当向左平移使$y=f(x+a)$的图象的右支经过$y=g(x)$的图象上的点$(1,6)$时为临界状态,

如图所示,此时$y=f(x+a)$的图象的右支对应的函数解析式为$y=x+a-1\ (x\geqslant 1-a)$,

$y=f(x+a)$的图象的左支与$y=g(x)$的图象的一部分重合,

代入点$(1,6)$的坐标,则$6=1+a-1$,解得$a=6$.

因为$f(x+a)\geqslant g(x)$,所以$a=6$,故a的值为6. …

………………………… 10分