数学期末考试参考答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	A	D	C	B	A	A	C	BD	ABD	AD	ACD

13.___4______. 14.__$-\frac{7}{25}$_______. 15.___5______. 16._____$\frac{5}{2}$_____.

8.由题得函数 $f(x)$ 为偶函数，在 $[0,+\infty)$ 单调递增，

则对任意的 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，不等式 $f(ax+1)\le f(x-2)$ 恒成立，

则不等式 $f(|ax+1|)\le f(|x-2|)$，$x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 恒成立，

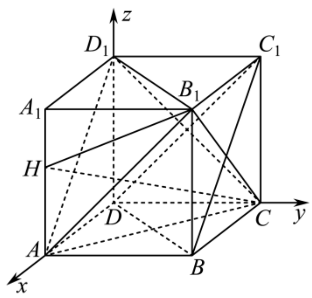
则 $|ax+1|\le|x-2|$，$x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 恒成立，

得 $(ax+1)^2-(x-2)^2\le 0$，得 $(a-\frac{1-x}{x})(a-\frac{x-3}{x})\le 0$，$x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 恒成立，

则 $a\le\frac{1-x}{x}$ 且 $a\ge\frac{x-3}{x}$，或 $a\ge\frac{1-x}{x}$ 且 $a\le\frac{x-3}{x}$，$x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 恒成立，

即当 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 时，$a\le\left(\frac{1-x}{x}\right)_{\min}$ 且 $a\ge\left(\frac{x-3}{x}\right)_{\max}$，或 $a\ge\left(\frac{1-x}{x}\right)_{\max}$ 且 $a\le\left(\frac{x-3}{x}\right)_{\min}$，

又当 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，有 $0\le\frac{1-x}{x}\le 1$，$-5\le\frac{x-3}{x}\le -2$，得 $-2\le a\le 0$.故选：C.



12. 由正方体可建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $D(0,0,0),B(1,1,0),C(0,1,0),A(1,0,0),D_1(0,0,1),C_1(0,1,1),B_1(1,1,1)$，

设 $H(1,0,h)$，其中 $0\le h\le 1$，

对于 A：$\overrightarrow{CH}=(1,-1,h),\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$，故 $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{DB}=0$ 即 $CH\perp BD$，故 A 确.

对于 B：$\overrightarrow{AB_1}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,1),\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$，

设平面 AB_1D_1 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}y+z=0\\ -x+z=0\end{cases}$，故 $\vec{m}=(1,-1,1)$.

设平面 AB_1C 的法向量为 $\vec{n}=(a,b,c)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}b+c=0\\ -a+b=0\end{cases}$，取 $b=1$，则

$a=1,c=-1$，

故 $\vec{n}=(1,1,-1)$.故 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\frac{-1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=-\frac{1}{3}$，而二面角 D_1-AB_1-C 为锐二面角，

故其余弦值为$\frac{1}{3}$，不为$\frac{1}{2}$，故二面角D_1-AB_1-C的平面角不是$\frac{\pi}{3}$，故 B 错误.

对于 C：$\overrightarrow{D_1B_1}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{D_1C}=(0,1,-1)$，设平面$CB_1D_1$的法向量为$\vec{k}=(p,q,r)$，

则$\begin{cases}\vec{k}\cdot\overrightarrow{D_1B_1}=0\\ \vec{k}\cdot\overrightarrow{D_1C}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}p+q=0\\ q-r=0\end{cases}$，取$q=1$，则$p=-1,r=1$，故$\vec{k}=(-1,1,1)$.

而$\overrightarrow{B_1H}=(0,-1,h-1)$，故$H$到平面$CB_1D_1$的距离为$|\overrightarrow{BH}|\times\left|\frac{\overrightarrow{BH}\cdot\vec{k}}{|\overrightarrow{BH}|\times|\vec{k}|}\right|=\frac{|2-h|}{\sqrt{3}}=\frac{2-h}{\sqrt{3}}\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$，

故 C 正确. 对于 D：设直线CD与平面β所成的角为θ.

因为$CH\perp$平面β，故$\overrightarrow{CH}=(1,-1,h)$为平面$\beta$的法向量，

而$\overrightarrow{DC}=(0,1,0)$，故$\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{DC},\overrightarrow{CH}\rangle\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{h^2+2}}\right|=\frac{1}{\sqrt{h^2+2}}$，

而$h\in[0,1],\therefore\frac{1}{\sqrt{h^2+2}}\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$，故 D 正确. 故选：ACD

16.依题意，$|\vec{a}|=3,|\vec{e}|=1,|\vec{b}-\vec{a}|=1,\langle\vec{a},\vec{e}\rangle=\frac{2\pi}{3}$，在平面直角坐标系$xOy$中，设$E(1,0)$，$\overrightarrow{OE}$

对应向量$\vec{e}$，$\angle AOx=\frac{2\pi}{3}$，$\overrightarrow{OA}$对应向量$\vec{a}$，则$\vec{a}=\left(-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，则$A\left(-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，

由于$|\vec{b}-\vec{a}|=1$，所以$\vec{b}$对应终点的轨迹是以 A 为圆心，半径为1的圆.

依题意，$|\vec{c}-t\vec{e}|\geq|\vec{c}-2\vec{e}|$恒成立，两边平方并化简得$t^2-(2\vec{c}\cdot\vec{e})\cdot t+4\vec{c}\cdot\vec{e}-4\geq 0$恒成立，

所以$\Delta=4(\vec{c}\cdot\vec{e})^2-4(4\vec{c}\cdot\vec{e}-4)\leq 0$，整理得$(\vec{c}\cdot\vec{e}-2)^2\leq 0,\vec{c}\cdot\vec{e}=2$，

设$C(x,y)$，则$\vec{c}\cdot\vec{e}=1\times x+0\times y=x=2$，所以$\vec{c}$对应点的轨迹是直线$x=2$.

则$|\vec{c}-\vec{b}|$表示圆 A 上的点和直线$x=2$上的点的距离，

所以$|\vec{c}-\vec{b}|$的最小值为$\frac{3}{2}+2-1=\frac{5}{2}$.

17．(1)$\sqrt{21}$　　(2)$\frac{13}{4}$

18.（1）由频率分布直方图可得这 100 名学生得分的平均数

$\bar{x}=(45\times0.01+55\times0.015+65\times0.02+75\times0.03+85\times0.015+95\times0.01)\times10=70.5$

（2）因为成绩在$[40,70)$的频率为0.45，成绩在$[70,80)$的频率为0.3，

所以中位数为$70+10\times\dfrac{0.05}{0.3}\approx 71.67$

（3）在$[80,90)$和$[90,100]$两组中的人数分别为

$100\times(0.015\times10)=15$和$100\times(0.01\times10)=10$人，

所以在$[80,90)$分组中抽取的人数为$5\times\dfrac{15}{10+15}=3$人，记为$a,b,c$，

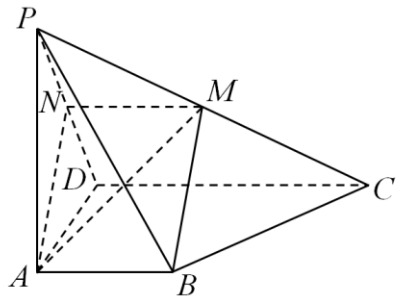
在$[90,100]$分组中抽取的人数为 2 人，记为$1,2$，

所以这 5 人中随机抽取 2 人的情况有$ab,ac,bc,a1,a2,b1,b2,c1,c2,12$共 10 种，

其中两人得分都在$[90,100]$的情况有 1 种，

所以两人得分都在$[90,100]$的概率为$P=\dfrac{1}{10}$.

19.（1）取 PD 中点 N，连接 MN，AN，证 BM//AN 即可　　　　4 分



（2）因为 $PA=AD$，所以 $AN\perp PD$，

由 $AB\perp$平面 PAD， $PD\subset$平面 PAD，所以 $AB\perp PD$，

又由 $AN\cap AB=A$，且 AN， $AB\subset$平面 ABN，所以 $PD\perp$平面 ABN，

因为 MN 是$\triangle PCD$ 中位线，所以 $AB\,//\,CD\,//\,MN$，

所以 $ABMN$ 四点共面，于是 $PD\perp$平面 ABM， $PD\subset$平面 PCD，

所以平面 $ABM\perp$平面 PCD　　　　*8 分*

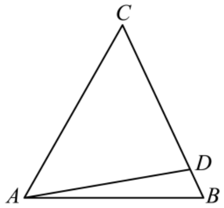
（3）由（1）可得 $MN\,//\,AB$，且 $AB\subset$平面 PAB，所以 $MN\,//$平面 PAB，

所以$V_{M-PAB}=V_{N-PAB}=V_{B-NAP}$，

因为 $AB\perp$平面 PAD，可得$V_{B-NAP}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle NAP}\times AB$， 又由 $AP=4$， $PN=\sqrt{7}$， $AN\perp PD$，

所以 $AN=\sqrt{4^2-7}=3$， $S_{\triangle NAP}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{7}\times3=\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$， 所以$V_{B-NAP}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3\sqrt{7}}{2}\times2=\sqrt{7}$　　　　12 分

20（1）解：由$b\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)-a\sin B=0$结合正弦定理可得：



$\sin B\left(\dfrac{1}{2}\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right)-\sin A\sin B=0$，则

$\sin B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A-\dfrac{1}{2}\sin A\right)=0$，

因为A 、 $B\in(0,\pi)$，则 $\sin B>0$，所以，$\sqrt{3}\cos A=\sin A>0$，可得 $\tan A=\sqrt{3}$，故 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

（2）解：由 $\angle ADB=2\angle ACB$ 可得 $\angle CAD=\angle ADB-\angle ACB=\angle ACB$，所以，$AD=CD$，

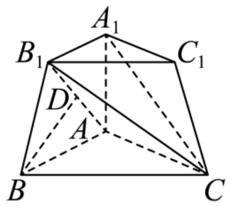
所以，$C<\angle BAC$，故 $0<C<\dfrac{\pi}{3}$，在 $\triangle ABD$ 中，$B=\dfrac{2\pi}{3}-C$，$\angle BAD=\dfrac{\pi}{3}-C$，

由正弦定理可得 $\dfrac{BD}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-C\right)}=\dfrac{CD}{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-C\right)}$，

所以，$\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-C\right)}{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-C\right)}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos C-\dfrac{1}{2}\sin C}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\dfrac{1}{2}\sin C}=\dfrac{\sqrt{3}-\tan C}{\sqrt{3}+\tan C}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\tan C}-1$，

因为 $C\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$，则 $0<\tan C<\sqrt{3}$，所以，$\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\tan C}-1\in(0,1)$.

所以，$\dfrac{BD}{CD}$ 的取值范围是 $(0,1)$



21.（1）证明：取 AB_1 中点 D，连接 BD，

因为 $AB=BB_1$，所以 $BD\perp AB_1$，

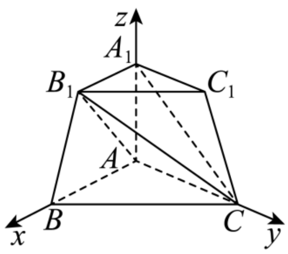
又因为 $AB_1=$ 平面 $AB_1C\cap$ 平面 ABB_1A_1，平面 $AB_1C\perp$ 平面 ABB_1A_1，$BD\subset$ 平面 ABB_1A_1，

所以 $BD\perp$ 平面 AB_1C，$AC\subset$ 平面 AB_1C，

所以 $BD\perp AC$ ①，又因为 $AA_1\perp$ 平面 ABC，$AC\subset$ 平面 ABC，

所以 $AA_1\perp AC$ ②，易知 BD 与 AA_1 相交③，

由①②③可得 $AC\perp$ 平面 ABB_1A_1，又因为 $BB_1\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $AC\perp BB_1$；



（2）解：因为 $AA_1\perp$ 平面 ABC，$AB,AC\subset$ 平面 ABC，

所以 $AA_1\perp AB$，$AA_1\perp AC$，

由（1）可知 $AC\perp$ 平面 ABB_1A_1，$AB\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $AC\perp$

AB，

所以以A 为原点，AB 、AC 、AA_1 所在的直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立如图所示的坐标系：

因为 $AB=BB_1=2A_1B_1=2$，所以 $AA_1=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，$AB_1=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，

又因为$\triangle AB_1C$的面积为4，即$\frac{1}{2}\cdot AB_1\cdot AC=4$，解得$AC=4$，

所以$A(0,0,0)$，$C(0,4,0)$，$B_1(1,0,\sqrt{3})$，$A_1(0,0,\sqrt{3})$，

所以$\overrightarrow{B_1C}=(-1,4,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AC}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{A_1C}=(0,4,-\sqrt{3})$，

设平面AB_1C的法向量为$\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

则有$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1C}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-x_1+4y_1-\sqrt{3}z_1=0\\ 4y_1=0\end{cases}$，所以$\begin{cases}y_1=0\\ x_1=-\sqrt{3}z_1\end{cases}$，取$\vec{n}=(-\sqrt{3},0,1)$，

设平面A_1B_1C的法向量为$\vec{m}=(x_2,y_2,z_2)$，

则有$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{B_1C}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1C}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-x_2+4y_2-\sqrt{3}z_2=0\\ 4y_2-\sqrt{3}z_2=0\end{cases}$，所以$\begin{cases}x_2=0\\ y_2=\frac{\sqrt{3}}{4}z_2\end{cases}$，取$\vec{m}=(0,\sqrt{3},4)$，

设二面角$\boldsymbol{A-B_1C-A_1}$的大小为θ，为锐角，

则有$\cos\theta=|\cos<\vec{m},\vec{n}>|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{4}{2\sqrt{19}}=\frac{2\sqrt{19}}{19}$.（用定义法也可以）

22.（1）因为$f(x)=\log_4(4^x+1)-mx$，

所以，$f(-x)=\log_4(4^{-x}+1)+mx=\log_4\left(\frac{1}{4^x}+1\right)+mx=\log_4\frac{4^x+1}{4^x}+mx$

$=\log_4(4^x+1)+(m-1)x$，

因为函数$f(x)$为偶函数，则$f(-x)=f(x)$，即$\log_4(4^x+1)+(m-1)x=\log_4(4^x+1)-mx$，

所以，$m-1=-m$，解得$m=\frac{1}{2}$.

（2）由（1）可得$f(x)=\log_4(4^x+1)-\frac{1}{2}x=\log_4(4^x+1)-\log_4 2^x=\log_4\frac{4^x+1}{2^x}$

$=\log_4(2^x+2^{-x})$，

$g(x)=4^{f(x)}=2^x+\frac{1}{2^x}$，

任取x_1、$x_2\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，且$x_1<x_2$，则$2^{x_2}>2^{x_1}>0$，

$g(x_1)-g(x_2)=\left(2^{x_1}+\frac{1}{2^{x_1}}\right)-\left(2^{x_2}+\frac{1}{2^{x_2}}\right)=\left(2^{x_1}-2^{x_2}\right)-\frac{2^{x_1}-2^{x_2}}{2^{x_1+x_2}}=\frac{\left(2^{x_1}-2^{x_2}\right)\left(2^{x_1+x_2}-1\right)}{2^{x_1+x_2}}$，

当$-\frac{1}{2}\le x_1<x_2<0$时，$x_1+x_2<0$，则$0<2^{x_1+x_2}<1$，

所以，$g(x_1)-g(x_2)=\frac{(2^{x_1}-2^{x_2})(2^{x_1+x_2}-1)}{2^{x_1+x_2}}>0$，即$g(x_1)>g(x_2)$，

当$0<x_1<x_2\le 1$时，$x_1+x_2>0$，则$2^{x_1+x_2}>1$，

所以，$g(x_1)-g(x_2)=\frac{(2^{x_1}-2^{x_2})(2^{x_1+x_2}-1)}{2^{x_1+x_2}}<0$，即$g(x_1)<g(x_2)$，

所以，函数$g(x)$在$\left[-\frac{1}{2},0\right)$上递减，在$[0,1]$上递增，

令$t=g(x)\in\left[2,\frac{5}{2}\right]$，问题转化为：$bt^2+a\ge|at-b|$，即$\frac{b}{a}t^2+1\ge\left|t-\frac{b}{a}\right|$，

再令$\frac{b}{a}=m$，所以，$mt^2+1\ge|t-m|$对$t\in\left[2,\frac{5}{2}\right]$恒成立.

（i）当$m\le 0$时，左边≤ 1，右边≥ 2，不符合题意

（ii）当$m>0$时，

①当$m\ge\frac{5}{2}$时，则$mt^2+1\ge 4m+1$，$|t-m|=m-t\le m-2$，

当$t=2$时，上述两个不等式等号同时成立，满足题意，则$4m+1\ge m-2$，解得$m\ge -1$，此时$m\ge\frac{5}{2}$；

②当$0<m\le 2$时，有$mt^2+1\ge t-m$，

所以，$m\ge\frac{t-1}{t^2+2}=\frac{t-1}{(t^2-1)+2}=\frac{1}{t+1+\frac{2}{t-1}}=\frac{1}{t-1+\frac{2}{t-1}+2}$，

当$2\le t\le\frac{5}{2}$，则$1\le t-1\le\frac{3}{2}$，

由基本不等式可得$t-1+\frac{2}{t-1}+2\ge 2\sqrt{(t-1)\cdot\frac{2}{t-1}}+2=2(\sqrt{2}+1)$，

当且仅当$t=\sqrt{2}+1$时，等号成立，故$y=\frac{1}{t-1+\frac{2}{t-1}+2}$在$\left[2,\frac{5}{2}\right]$上的最大值为

$\frac{1}{2(\sqrt{2}+1)}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$，所以，$m\ge\frac{\sqrt{2}-1}{2}$，此时，$\frac{\sqrt{2}-1}{2}\le m\le 2$；

③当$2<m<\frac{5}{2}$时，$mt^2+1>1>|t-m|$恒成立，符合题意.

综上所述，m的取值范围是$\left[\frac{\sqrt{2}-1}{2},+\infty\right)$，$\therefore\frac{b}{a}$的取值范围是$\left[\frac{\sqrt{2}-1}{2},+\infty\right)$