2022—2023 学年高中毕业班阶段性测试(六)
理科数学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

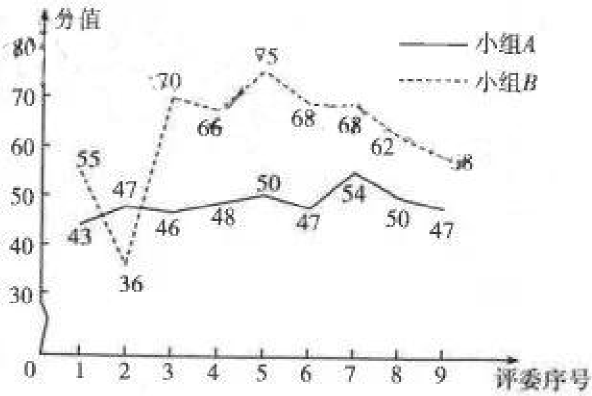
1. 已知集合 $A=\{-2,-1,0,4,6\}$, $B=\{x|2^{x-2}<4\}$, 则 $A\cap B=$

A. $\{-2,-1,0\}$ B. $\{-2,-1,4\}$ C. $\{-1,0,4\}$ D. $\{-2,-1,0,4\}$

2. 已知复数 $z=\dfrac{4-3i}{1-2i}$, 则 z 在复平面内对应的点位于

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. 在某次演讲比赛中,由两个评委小组(分别为专业人士(记为小组 A)和观众代表(记为小组 B))给参赛选手打分,根据两个评委小组给同一名选手打分的分值绘制成如图所示的折线图,则下列结论错误的是



A. 小组 A 打分的分值的平均数为 48

B. 小组 B 打分的分值的中位数为 66

C. 小组 A 打分的分值的极差大于小组 B 打分的分值的极差

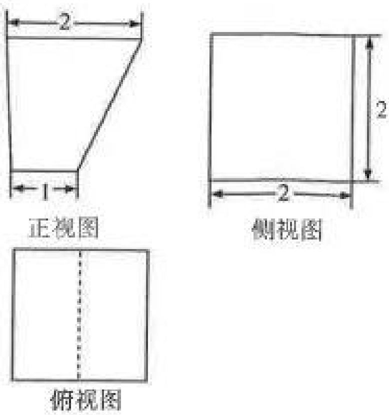
D. 小组 A 打分的分值的方差小于小组 B 打分的分值的方差

4. 已知 $\tan\theta=-3$, 则 $\sin^2\theta-\cos 2\theta=$

A. $\dfrac{13}{10}$ B. $\dfrac{3}{2}$

C. $\dfrac{8}{5}$ D. $\dfrac{17}{10}$

5. 某几何体的三视图如图所示,则该几何体的表面积是



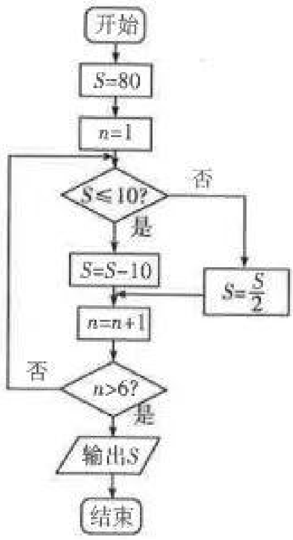
A. $11+2\sqrt{5}$ B. $15+\sqrt{5}$

C. $15+2\sqrt{5}$ D. $16+2\sqrt{5}$

6. 执行如图所示的程序框图，输出的 $S=$

A. -30　　B. -20

C. -10　　D. 0



7. 已知电磁波在空间中自由传播时的损耗公式为 $L=32.4+20(\lg D+\lg F)$，其中 D 为传输距离（单位：km），F 为载波频率（单位：MHz），L 为传输损耗（单位：dB）. 若载波频率变为原来的200倍，传输损耗增加90 dB，则传输距离约为原来的

参考数据：$\lg 2\approx 0.3$.

A. $10^{2.1}$倍　　B. $10^{2.2}$倍

C. $10^{2.5}$倍　　D. $10^{2.7}$倍

8. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，$f(3)=0$，若 $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 且 $x_1\neq x_2$ 满足 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，则不等式 $\frac{f(x)+2f(-x)}{x}<0$ 的解集为

A. $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$　　B. $(-3,0)\cup(0,3)$

C. $(-3,0)\cup(3,+\infty)$　　D. $(-\infty,-3)\cup(0,3)$

9. 将函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，则函数 $h(x)=f(x)+|g(x)|$ 的值域为

A. $[-1,\sqrt{2}]$　　B. $[-1,1]$　　C. $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$　　D. $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

10. 已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，$N(2,1)$，M 为抛物线 C 上位于第一象限的一点，且点 M 的横坐标小于2，则 $\triangle MFN$ 的面积

A. 有最大值 $\frac{3}{2}$　　B. 有最小值 $\frac{3}{2}$　　C. 有最大值1　　D. 有最小值1

11. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F，点 A 为 C 的一条渐近线上的一点，且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AF}=0$（$O$ 为坐标原点），点 M 为 C 的左顶点，以 AM 为直径的圆与 x 轴交于不同于点 M 的点 B，且 $\angle MAB=\angle AOB$，则 C 的渐近线方程为

A. $y=\pm\sqrt{2}x$　　B. $y=\pm\sqrt{3}x$　　C. $y=\pm 2x$　　D. $y=\pm\sqrt{5}x$

12. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是矩形，$AB\perp PD$，$AB=2\sqrt{13}$，$PA=PD$，$\angle APD=120°$. 若四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的体积为 $\frac{500\pi}{3}$，则该球上的点到平面 PAB 的距离的最大值为

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 满足 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$，则实数 $\lambda=$ ________.

14. 若 $(2x^3-1)\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中各项的系数和为64，则展开式中 x^3 的系数为________.

15. 已知在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，且满足$\cos A(b-a\cos C)=\sqrt{3}c\cos C-a\sin A\sin C$，$b^2+a^2=c^2+6$，则$\triangle ABC$的面积为__________.

16. 若存在n条直线与函数$f(x)=x^3$，$g(x)=me^x(m>0)$的图象都相切，则当n取最大值时，实数m的取值范围是__________.

三、解答题：共70分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤. 第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第22,23题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共60分.

17.（12分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$4S_n=(2n+1)a_n+2$.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；

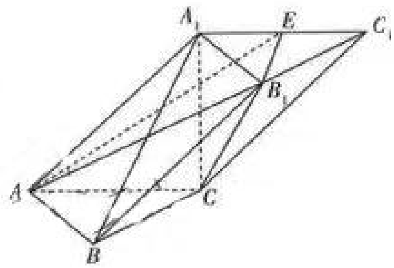
（Ⅱ）记$b_n=\dfrac{a_n}{2^{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

18.（12分）

如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\triangle ABC$是边长为2的等边三角形，$A_1C\perp BC$，平面AA_1C_1C⊥平面ABC.

（Ⅰ）证明：$A_1A=A_1B$；

（Ⅱ）若E为A_1C_1的中点，直线B_1B与平面ABC所成的角为45°，求直线B_1C与平面AB_1E所成的角的正弦值.



19.（12分）

某体育频道为了解某地电视观众对卡塔尔世界杯的收看情况，随机抽取了该地200名观众进行调查，下表是根据所有调查结果制作的观众日均收看世界杯时间（单位：时）的频率分布表：

日均收看世界杯时间（时）	[0.5,1]	(1,1.5]	(1.5,2]	(2,2.5]	(2.5,3]	(3,3.5]
频率	0.1	0.18	0.22	0.25	0.2	0.05

如果把日均收看世界杯的时间高于2.5小时的观众称为"足球迷".

（Ⅰ）根据已知条件完成下面的2×2列联表，并判断是否有99.9%的把握认为该地的电视观众是否为"足球迷"与性别有关；

	非足球迷	足球迷	合计
女	70		
男		40	
合计			

(Ⅱ)将样本的频率分布当作总体的概率分布,现从该地的电视观众中随机抽取4人,记这4人中的"足球迷"人数为X,求随机变量X的分布列和数学期望.

参考公式:$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,其中$n=a+b+c+d$.

参考数据:

$P(K^2\geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

20.(12分)

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的上顶点为$A$,右顶点为$B$,坐标原点$O$到直线$AB$的距离为$\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$,$\triangle AOB$的面积为2.

(Ⅰ)求椭圆C的方程;

(Ⅱ)若过点$P(2,0)$且不过点$Q(3,1)$的直线l与椭圆C交于M,N两点,直线MQ与直线$x=4$交于点E,证明:$PQ/\!/NE$.

21.(12分)

已知函数$f(x)=x^2\ln x+x^2$.

(Ⅰ)求$f(x)$的极值;

(Ⅱ)若不等式$\dfrac{f(x)}{x}\geq x^2+me^x$在$\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$上恒成立,求实数$m$的取值范围

(二)选考题:共10分.请考生在第22,23题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分.

22.[选修4-4:坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系xOy中,曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=4\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$为参数),以坐标原点$O$为极点,$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线$C_2$的极坐标方程为$\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta-4=0$.

(Ⅰ)设曲线C_1与曲线C_2交于A,B两点,求$|AB|$;

(Ⅱ)若M,N是曲线C_1上的两个动点,且$OM\perp ON$,求$|OM|\cdot|ON|$的取值范围.

23.[选修4-5:不等式选讲](10分)

已知函数$f(x)=|x-2|+|2x+1|$.

(Ⅰ)求不等式$f(x)\geq 6$的解集;

(Ⅱ)若$f(x)$的最小值为t,a,b,c为正实数,且$a+b=\dfrac{2}{5}t$,证明:$\dfrac{c}{ab}+\dfrac{3ac}{b}+\dfrac{8}{3c+1}\geq 6$.

2022—2023 学年高中毕业班阶段性测试(六)

理科数学 · 答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

1. 答案　A

命题意图　本题考查集合的运算.

解析　由 $2^{x-2}<4$，得 $x-2<2$，即 $x<4$，所以 $A\cap B=\{-2,-1,0\}$.

2. 答案　D

命题意图　本题考查复数的运算及几何意义.

解析　因为 $z=\dfrac{4-3i}{1-2i}$，所以 $z=\dfrac{(4-3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\dfrac{4+8i-3i+6}{5}=2+i$，$\bar{z}=2-i$，所以 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点 $(2,-1)$ 位于第四象限.

3. 答案　C

命题意图　本题考查样本的数字特征.

解析　由图可知，小组 A 打分的分值的平均数为 $(43+47+46+48+50+47+54+50+47)\times\dfrac{1}{9}=48$，故 A 正确；将小组 B 打分的分值从小到大排列为 36，55，58，62，66，68，68，70，75，其中位数为 66，故 B 正确；小组 A 打分的分值的极差为 $54-43=11$，小组 B 打分的分值的极差为 $75-36=39$，故 C 错误；小组 A 打分的分值相对更集中，故 D 正确. 故选 C.

4. 答案　D

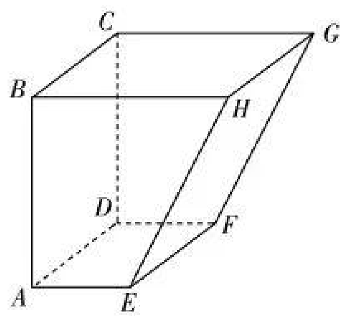
命题意图　本题考查三角恒等变换及同角三角函数的基本关系.

解析　由题意知 $\sin^2\theta-\cos 2\theta=\sin^2\theta-(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=2\sin^2\theta-\cos^2\theta=\dfrac{2\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\dfrac{2\tan^2\theta-1}{\tan^2\theta+1}=\dfrac{17}{10}$.

5. 答案　D

命题意图　本题考查空间几何体的表面积.

解析　根据几何体的三视图得该几何体为如图所示的多面体，其表面积为 $\dfrac{1}{2}\times(1+2)\times2\times2+2\times2\times2+1\times2+2\times\sqrt{5}=16+2\sqrt{5}$.



6. 答案　B

命题意图　本题考查程序框图.

解析　由程序框图可知第一次循环 $S=40$，$n=2$；第二次循环 $S=20$，$n=3$；第三次循环 $S=10$，$n=4$；第四次循环

$S=0,n=5$；第五次循环 $S=-10,n=6$；第六次循环 $S=-20,n=7$，跳出循环，输出 $S=-20$.

7. **答案**　B

命题意图　本题考查函数模型的应用.

解析　设 L' 是变化后的传输损耗，F' 是变化后的载波频率，D' 是变化后的传输距离，则 $L'=L+90$，$F'=200F$①，$\therefore 90=L'-L=20\lg D'+20\lg F'-20\lg D-20\lg F=20\lg\frac{D'}{D}+20\lg\frac{F'}{F}$②，由①②得 $20\lg\frac{D'}{D}=90-20\lg\frac{F'}{F}=90-20\lg 200=90-20(2+\lg 2)\approx 44$，即 $\lg\frac{D'}{D}=2.2$，即 $D'\approx 10^{2.2}D$，故传输距离约为原来的 $10^{2.2}$ 倍.

8. **答案**　A

命题意图　本题考查函数的性质.

解析　因为 $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 且 $x_1\neq x_2$ 满足 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(3)=0$，所以 $f(-3)=0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增. 由 $\frac{f(x)+2f(-x)}{x}<0$，得 $xf(x)>0$，当 $x>0$ 时，由 $f(x)>0=f(3)$，得 $x>3$，当 $x<0$ 时，由 $f(x)<0=f(-3)$，得 $x<-3$，所以原不等式的解集为 $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$.

9. **答案**　A

命题意图　本题考查三角函数的图象变换及性质.

解析　根据题意，$g(x)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{2}\right]=-\sin 2x$，所以 $h(x)=\cos 2x+|\sin 2x|$，故 $h(x)=\begin{cases}\cos 2x+\sin 2x, k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2},\\ \cos 2x-\sin 2x, k\pi+\frac{\pi}{2}<x<k\pi+\pi\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$，即 $h(x)=\begin{cases}\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right), k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2},\\ \sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right), k\pi+\frac{\pi}{2}<x<k\pi+\pi,\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$. 当 $k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$ 时，$2k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$，则 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$，即 $-1\leqslant\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$，当 $k\pi+\frac{\pi}{2}<x<k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$ 时，$2k\pi+\frac{5\pi}{4}<2x+\frac{\pi}{4}<2k\pi+\frac{9\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$，则 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$，即 $-1<\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$. 综上所述，$h(x)$ 的值域为 $[-1,\sqrt{2}]$.

10. **答案**　C

命题意图　本题考查抛物线的方程与性质.

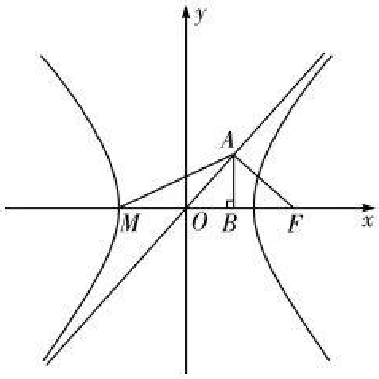
解析　由题意，可得 $F(1,0)$，则 $|FN|=\sqrt{2}$，直线 FN 的方程为 $y=x-1$. 设与直线 FN 平行且与抛物线 C 相切的直线的方程为 $y=x+m$，联立抛物线 C 的方程可得 $x^2+(2m-4)x+m^2=0$（*）. 由 $\Delta=(2m-4)^2-4m^2=0$，可得 $m=1$，所以当 M 点为直线 $y=x+1$ 与抛物线 C 相切的切点时，M 点到直线 FN 的距离最大. 当 $m=1$ 时，由（*）式可得 $x=1$，则 M 点的坐标为 $(1,2)$，此时点 M 到直线 FN 的距离为 $\frac{|1-2-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，所以 $\triangle MFN$ 的面积的最大值为 $\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$.

11. **答案**　B

命题意图　本题考查双曲线的性质.

解析　设双曲线 C 的焦距为 $2c(c>0)$. 如图所示，不妨设点 A 在双曲线的渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 上，则由 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AF}=0$，

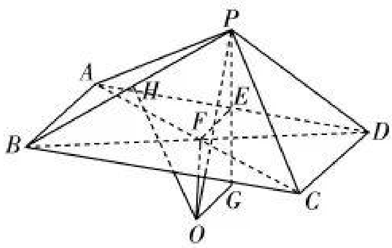
得 $AF\perp OA$，得 $k_{AF}=-\frac{a}{b}$，所以直线 $AF:y=-\frac{a}{b}(x-c)$，由 $\begin{cases}y=-\frac{a}{b}(x-c),\\ y=\frac{b}{a}x,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{a^2}{c},\\ y=\frac{ab}{c},\end{cases}$ 即 $A\left(\frac{a^2}{c},\frac{ab}{c}\right)$. 因为以 AM 为直径的圆与 x 轴交于不同于点 M 的点 B，所以 $AB\perp MB$. 因为 $\angle MAB=\angle AOB$，所以 $\triangle MAB\backsim\triangle AOB$，所以 $\frac{|AB|}{|MB|}=\frac{|OB|}{|AB|}$，即 $|AB|^2=|OB|\cdot|MB|$，又 $M(-a,0)$，所以 $\left(\frac{ab}{c}\right)^2=\frac{a^2}{c}\left(\frac{a^2}{c}+a\right)$，化简整理得 $c^2-ac-2a^2=0$，解得 $c=2a$，所以 $b=\sqrt{3}a$，所以 C 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$.



12. 答案 C

命题意图 本题考查空间几何体的结构特征.

解析 如图，在矩形 $ABCD$ 中，连接对角线 AC，BD，记 $AC\cap BD=F$，则点 F 为矩形 $ABCD$ 的外接圆圆心. 设 $PA=PD=a$，在 $\triangle PAD$ 中，由余弦定理可得 $AD^2=PA^2+PD^2-2\cdot PA\cdot PD\cdot\cos\angle APD=a^2+a^2-2\cdot a\cdot a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=3a^2$，则 $AD=\sqrt{3}a$，$\triangle PAD$ 的外接圆半径为 $\frac{AD}{2\sin\angle APD}=a$. 设 $\triangle PAD$ 的外接圆圆心为 G，则 $GP=a$. 取 AD 的中点 E，连接 PE，EF，易知 $EF\parallel AB$，$EF=\frac{1}{2}AB=\sqrt{13}$，$PE\perp AD$，且 P，E，G 共线. 因为 $AB\perp PD$，$AB\perp AD$，$AD\cap PD=D$，所以 $AB\perp$ 平面 PAD，所以 $EF\perp$ 平面 PAD，且 $PE\perp$ 平面 $ABCD$. 过 G 作 $GO\perp$ 平面 PAD，且 $GO=EF$，连接 FO，由 $GO\perp$ 平面 PAD，可知 $GO\parallel EF$，则四边形 $EFOG$ 为矩形，所以 $FO\parallel PG$，则 $FO\perp$ 平面 $ABCD$. 根据球的性质，可得点 O 为四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的球心. 因为球 O 的体积为 $\frac{500\pi}{3}$，所以 $\frac{4\pi}{3}\times PO^3=\frac{500\pi}{3}$，得 $PO=5$. 因为 $AB=2\sqrt{13}$，所以在 $\mathrm{Rt}\triangle PGO$ 中，$PG=a=\sqrt{PO^2-GO^2}=2\sqrt{3}$，所以 $PB=\sqrt{(2\sqrt{13})^2+(2\sqrt{3})^2}=8$. 取 PB 的中点 H，连接 OH，则 $OH\perp$ 平面 PAB，且 $OH=\sqrt{5^2-4^2}=3$，所以四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球上的点到平面 PAB 的距离的最大值为 8.



二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 答案 $\frac{1}{4}$

命题意图 本题考查平面向量的线性运算.

解析 因为$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$，所以$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$. 因为$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，所以$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，得 $\lambda=\frac{1}{4}$.

14. **答案** 15

命题意图 本题考查二项式定理.

解析 令 $x=1$，得 $2^n=64$，$n=6$. $\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^rx^{6-r}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=C_6^rx^{6-\frac{3r}{2}}$. 令 $6-\frac{3r}{2}=0$，得 $r=4$，令 $6-\frac{3r}{2}=3$，得 $r=2$，所以展开式中 x^3 的系数为 $2C_6^4-C_6^2=15$.

15. **答案** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

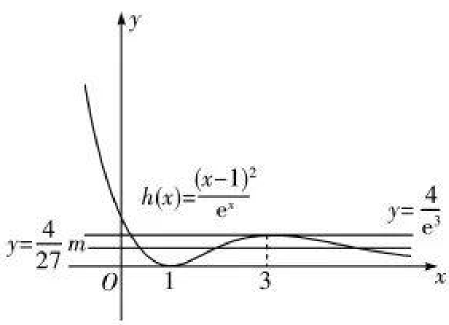
命题意图 本题考查解三角形.

解析 因为 $\cos A(b-a\cos C)=\sqrt{3}c\cos C-a\sin A\sin C$，所以 $b\cos A-a\cos A\cos C+a\sin A\sin C=\sqrt{3}c\cos C$，所以 $b\cos A-a(\cos A\cos C-\sin A\sin C)=\sqrt{3}c\cos C$，所以 $b\cos A-a\cos(A+C)=\sqrt{3}c\cos C$，所以 $b\cos A+a\cos B=\sqrt{3}c\cos C$，由正弦定理得 $\sin B\cos A+\sin A\cos B=\sqrt{3}\sin C\cos C$，即 $\sin(A+B)=\sqrt{3}\sin C\cos C$，得 $\sin C=\sqrt{3}\sin C\cos C$. 又 $\sin C\neq0$，所以 $\cos C=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\sin C=\frac{\sqrt{6}}{3}$. 因为 $b^2+a^2=c^2+6$，所以由余弦定理可得 $c^2=b^2+a^2-6=b^2+a^2-2ab\cos C$，即 $-2ab\cos C=-6$，所以 $ab=3\sqrt{3}$，$\triangle ABC$ 的面积为$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

16. **答案** $\left(0,\frac{27}{e^3}\right)$

命题意图 本题考查导数的几何意义及导数的应用.

解析 设公切线与 $f(x)$ 的图象的切点为 (x_1,x_1^3)，与 $g(x)$ 的图象的切点为 (x_2,me^{x_2})，则 $f'(x_1)=3x_1^2$，$g'(x_2)=me^{x_2}$，对应的切线方程分别为 $y-x_1^3=3x_1^2(x-x_1)$，$y-me^{x_2}=me^{x_2}(x-x_2)$，即 $y=3x_1^2x-2x_1^3$，$y=me^{x_2}x+me^{x_2}(1-x_2)$. 由$\begin{cases}3x_1^2=me^{x_2},\\-2x_1^3=me^{x_2}(1-x_2),\end{cases}$易知 $x_1\neq0$，$x_2\neq1$，$3x_1^2=\frac{2x_1^3}{x_2-1}$，即 $x_1=\frac{3}{2}(x_2-1)$，则 $me^{x_2}=3\times\left[\frac{3}{2}(x_2-1)\right]^2$，整理得$\frac{4}{27}m=\frac{(x_2-1)^2}{e^{x_2}}$. 设 $h(x)=\frac{(x-1)^2}{e^x}$，则 $h(x)\geqslant0$，$h'(x)=\frac{-(x-1)(x-3)}{e^x}$. 令 $h'(x)>0$，得 $1<x<3$，令 $h'(x)<0$，得 $x<1$ 或 $x>3$，所以 $h(x)$在$(1,3)$上单调递增，在$(-\infty,1)$和$(3,+\infty)$上单调递减，所以 $h(x)_{极小值}=h(1)=0$，$h(x)_{极大值}=h(3)=\frac{4}{e^3}$. 又当 $x\to+\infty$ 时，$h(x)\to0$，当 $x\to-\infty$ 时，$h(x)\to+\infty$，所以 $h(x)$ 的大致图象如图所示，由图可知 n 的最大值为 3，此时 $0<\frac{4}{27}m<\frac{4}{e^3}$，解得 $0<m<\frac{27}{e^3}$.



三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查数列的通项公式及错位相减法求前 n 项和.

解析 （Ⅰ）在 $4S_n=(2n+1)a_n+2$ 中，令 $n=1$，得 $a_1=2$. …………（1 分）

因为 $4S_n=(2n+1)a_n+2$，

所以 $4S_{n-1}=(2n-1)a_{n-1}+2(n\geqslant 2)$，

两式相减得 $4a_n=(2n+1)a_n-(2n-1)a_{n-1}(n\geqslant 2)$，

又易知 $a_n\neq 0$，

所以 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{2n-1}{2n-3}(n\geqslant 2)$. …………（3 分）

所以 $a_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\dfrac{2n-1}{2n-3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{3}{1}\cdot 2=4n-2(n\geqslant 2)$. …………（5 分）

又 $a_1=2$ 也符合上式，

所以 $a_n=4n-2$. …………（6 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $b_n=\dfrac{4n-2}{2^{n+1}}=\dfrac{2n-1}{2^n}=(2n-1)\times\dfrac{1}{2^n}$， …………（7 分）

则 $T_n=1\times\dfrac{1}{2}+3\times\dfrac{1}{2^2}+\cdots+(2n-3)\times\dfrac{1}{2^{n-1}}+(2n-1)\times\dfrac{1}{2^n}$， …………（8 分）

$\dfrac{1}{2}T_n=1\times\dfrac{1}{2^2}+3\times\dfrac{1}{2^3}+\cdots+(2n-3)\times\dfrac{1}{2^n}+(2n-1)\times\dfrac{1}{2^{n+1}}$，…………（9 分）

两式相减得 $\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{1}{2}+2\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)-(2n-1)\times\dfrac{1}{2^{n+1}}$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-(2n-1)\times\frac{1}{2^{n+1}}$$

$=\dfrac{3}{2}-\dfrac{2n+3}{2^{n+1}}$， …………（11 分）

故 $T_n=3-\dfrac{2n+3}{2^n}$. …………（12 分）

18. **命题意图** 本题考查空间中线面位置关系的证明及空间向量的应用.

解析 （Ⅰ）如图，取 AC 的中点 D，连接 BD.

因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形，

所以 $BD\perp AC$. …………（1 分）

又平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 ABC，且平面 $AA_1C_1C\cap$ 平面 $ABC=AC$，

所以 $BD\perp$ 平面 AA_1C_1C. …………（2 分）

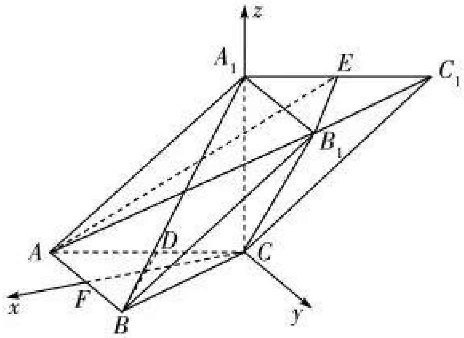
因为 $A_1C\subset$ 平面 AA_1C_1C，所以 $BD\perp A_1C$.

因为 $A_1C\perp BC$，$BD\cap BC=B$，

所以 $A_1C\perp$ 平面 ABC. …………（4 分）

因为 $AC\subset$ 平面 ABC，所以 $A_1C\perp AC$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AA_1C$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle BA_1C$ 中，由勾股定理可得 $A_1A=A_1B$. …………



(Ⅱ)取 AB 的中点 F,连接 CF. 由(Ⅰ)得 $A_1C\perp$ 平面 ABC.

又 $B_1B/\!/A_1A$,

所以 $\angle A_1AC$ 是直线 B_1B 与平面 ABC 所成的角,即 $\angle A_1AC=45°$. ………………………………………… (6 分)

由(Ⅰ)知 A_1C,CF,AB 两两互相垂直,以 C 为坐标原点,直线 CF 为 x 轴,过点 C 且平行于 AB 的直线为 y 轴,直线 CA_1 为 z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $C(0,0,0)$,$A(\sqrt{3},-1,0)$,$A_1(0,0,2)$,$B_1(0,2,2)$,$C_1(-\sqrt{3},1,2)$,$E\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},2\right)$,

所以 $\overrightarrow{AB_1}=(-\sqrt{3},3,2)$,$\overrightarrow{EB_1}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2},0\right)$,$\overrightarrow{CB_1}=(0,2,2)$. ………………………………………… (8 分)

设平面 AB_1E 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{3}x_1+3y_1+2z_1=0,\\ \sqrt{3}x_1+3y_1=0.\end{cases}$

令 $x_1=\sqrt{3}$,可得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1,3)$. ·· (10 分)

设直线 B_1C 与平面 AB_1E 所成的角为 θ,

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{CB_1}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB_1}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{CB_1}|}=\dfrac{4}{\sqrt{13}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{26}}{13}$,

即直线 B_1C 与平面 AB_1E 所成的角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{26}}{13}$. ………………………………………… (12 分)

19. **命题意图** 本题考查独立性检验及离散型随机变量的分布列和数学期望.

解析 (Ⅰ)由频率分布表可知,"足球迷"对应的频率为 $0.2+0.05=0.25$.

所以在抽取的 200 人中,"足球迷"有 $200\times0.25=50$ 人. ………………………………………… (1 分)

故 2×2 列联表如下:

	非足球迷	足球迷	合计
女	70	10	80
男	80	40	120
合计	150	50	200

………………………………………………………………………………………… (3 分)

所以 $K^2=\dfrac{200\times(70\times40-80\times10)^2}{150\times50\times80\times120}=\dfrac{100}{9}\approx11.111$. ………………………………………… (5 分)

因为 $11.111>10.828$,所以有 99.9% 的把握认为该地的电视观众是否为"足球迷"与性别有关.

(Ⅱ)由频率分布表可知"足球迷"对应的频率为 0.25,

则从该地的电视观众中随机抽取 1 人,其为"足球迷"的概率 $P=\frac{1}{4}$. ……………………………… (7 分)

由题可知 X 的所有可能取值为 0,1,2,3,4,

$P(X=0)=C_4^0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256}$, $P(X=1)=C_4^1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$, $P(X=2)=C_4^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{128}$,

$P(X=3)=C_4^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{64}$, $P(X=4)=C_4^4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{256}$, ……………………………… (9 分)

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{81}{256}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{128}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{256}$

……………………………………………………………………………………………… (10 分)

由题意得 $X\sim B\left(4,\frac{1}{4}\right)$,故 $E(X)=4\times\frac{1}{4}=1$. ……………………………………………… (12 分)

20. **命题意图** 本题考查椭圆的方程与性质及直线与椭圆的位置关系.

解析 (Ⅰ)由题意知 $A(0,b)$, $B(a,0)$,则 $|AB|=\sqrt{a^2+b^2}$. ……………………………… (1 分)

因为△AOB 的面积为 2,所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}ab=2$①. ……………………………… (2 分)

因为点 O 到直线 AB 的距离为$\frac{2\sqrt{10}}{5}$,

所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|AB|\times\frac{2\sqrt{10}}{5}=\frac{\sqrt{10}}{5}\sqrt{a^2+b^2}=2$②. (3 分)

由①②可得$\begin{cases}a=2\sqrt{2},\\ b=\sqrt{2}.\end{cases}$ ……………………………… (4 分)

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$. ……………………………… (5 分)

(Ⅱ)当直线 l 的斜率不存在时,直线 l 的方程为 $x=2$,

代入椭圆方程得 $y=\pm1$.

不妨设此时 $M(2,1)$, $N(2,-1)$,则 $E(4,1)$.

因为 $k_{PQ}=k_{NE}=1$,所以 $PQ/\!/NE$. ……………………………… (6 分)

当直线 l 的斜率存在时,设其方程为 $y=k(x-2)(k\neq1)$.

设 $M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$,则直线 MQ 的方程为 $y-1=\frac{y_1-1}{x_1-3}(x-3)$.

令 $x=4$,得 $E\left(4,\frac{y_1+x_1-4}{x_1-3}\right)$. ……………………………… (7 分)

由$\begin{cases}x^2+4y^2=8,\\ y=k(x-2),\end{cases}$ 得$(1+4k^2)x^2-16k^2x+16k^2-8=0$.

所以 $x_1+x_2=\frac{16k^2}{1+4k^2}$, $x_1x_2=\frac{16k^2-8}{1+4k^2}$. ………………………………

因为 $k_{NE}-1=\dfrac{\dfrac{y_1+x_1-4}{x_1-3}-y_2}{4-x_2}-1$

$=\dfrac{y_1+x_1-4-y_2(x_1-3)}{(4-x_2)(x_1-3)}-1$

$=\dfrac{k(x_1-2)+x_1-4-k(x_2-2)(x_1-3)-(4-x_2)(x_1-3)}{(4-x_2)(x_1-3)}$

$=\dfrac{(k-1)[-x_1x_2+3(x_1+x_2)-8]}{(4-x_2)(x_1-3)}$

$=\dfrac{(k-1)\left(\dfrac{-16k^2+8}{1+4k^2}+\dfrac{48k^2}{1+4k^2}-8\right)}{(4-x_2)(x_1-3)}$

$=0$，…………（11 分）

所以 $k_{NE}=k_{PQ}=1$.

所以 $PQ/\!/NE$.

综上可知，$PQ/\!/NE$. …………（12 分）

21. **命题意图** 本题考查导数在求函数极值及不等式恒成立问题中的应用.

解析 （Ⅰ）由题可知 $f'(x)=2x\ln x+x+2x=x(2\ln x+3)$，…………（1 分）

令 $f'(x)<0$，得 $0<x<e^{-\frac{3}{2}}$，令 $f'(x)>0$，得 $x>e^{-\frac{3}{2}}$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,e^{-\frac{3}{2}})$ 上单调递减，在 $(e^{-\frac{3}{2}},+\infty)$ 上单调递增，…………（3 分）

所以 $f(x)_{极小值}=f(e^{-\frac{3}{2}})=-\frac{1}{2}e^{-3}$，无极大值. …………（4 分）

（Ⅱ）由 $\dfrac{f(x)}{x}\geqslant x^2+me^x$，得 $x\ln x-x^2+x\geqslant me^x$，

即对任意的 $x\in\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$，$m\leqslant\dfrac{x\ln x-x^2+x}{e^x}$ 恒成立.

令 $h(x)=\dfrac{x\ln x-x^2+x}{e^x}$，

则 $h'(x)=\dfrac{(1+\ln x-2x+1)e^x-(x\ln x-x^2+x)e^x}{e^{2x}}=\dfrac{(1-x)(\ln x-x+2)}{e^x}$. …………（6 分）

令 $\varphi(x)=\ln x-x+2$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{1-x}{x}$，

令 $\varphi'(x)=\dfrac{1-x}{x}=0$，得 $x=1$，

因为当 $x\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$ 时，$\varphi'(x)>0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)<0$，

所以 $\varphi(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{e},1\right)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

又 $\varphi\left(\dfrac{1}{e}\right)=1-\dfrac{1}{e}>0$，$\varphi(1)=1>0$，$\varphi(e^2)=4-e^2<0$，

所以当 $x\in\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ 时，$\varphi(x)$ 在 $(1,e^2)$ 内存在唯一的零点 x_0. …………（8 分）

所以当 $x\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$ 时，$\varphi(x)>0$，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

当 $x\in(1,x_0)$ 时，$\varphi(x)>0,h'(x)<0,h(x)$ 单调递减，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$\varphi(x)<0,h'(x)>0,h(x)$ 单调递增，

所以 $h(x)_{\min}=\min\left\{h(x_0),h\left(\frac{1}{e}\right)\right\},h\left(\frac{1}{e}\right)=-e^{-2-\frac{1}{e}}$. ……………………………………………… (9 分)

因为 $\varphi(x_0)=\ln x_0-x_0+2=0$,

所以 $\ln x_0-x_0+1=-1,x_0=e^{x_0-2}$,

所以 $h(x_0)=\frac{x_0\ln x_0-x_0^2+x_0}{e^{x_0}}=\frac{x_0(\ln x_0-x_0+1)}{e^{x_0}}=\frac{-x_0}{e^{x_0}}=-\frac{e^{x_0-2}}{e^{x_0}}=-\frac{1}{e^2}$. ……………………………… (11 分)

因为 $-e^{-2-\frac{1}{e}}>-e^{-2}$，所以 $h\left(\frac{1}{e}\right)>h(x_0)$,

所以 $h(x)_{\min}=h(x_0)=-\frac{1}{e^2}$,

所以实数 m 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{1}{e^2}\right]$. ……………………………………………………………… (12 分)

22. **命题意图** 本题考查参数方程与普通方程的互化、极坐标方程与直角坐标方程的互化及极坐标方程的应用.

解析 (Ⅰ)因为曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=4\cos\alpha,\\y=2\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数)，

所以曲线 C_1 的普通方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$. ……………………………………………………………… (2 分)

因为曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta-4=0$,

所以曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x+2y-4=0$. …………………………………………………………… (3 分)

由 $\begin{cases}x+2y-4=0,\\\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x=4,\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0,\\y=2,\end{cases}$

所以 $|AB|=\sqrt{(4-0)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{5}$. …………………………………………………………… (5 分)

(Ⅱ)由 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$，可得曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=\frac{4}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}$. ………………………… (6 分)

因为 $OM\perp ON$，所以可设 $M(\rho_1,\theta_1),N\left(\rho_2,\theta_1+\frac{\pi}{2}\right)$,

$$|OM|\cdot|ON|=\frac{16}{\sqrt{(1+3\sin^2\theta_1)\left[1+3\sin^2\left(\theta_1+\frac{\pi}{2}\right)\right]}}$$

$$=\frac{16}{\sqrt{(1+3\sin^2\theta_1)(1+3\cos^2\theta_1)}}$$

$$=\frac{16}{\sqrt{4+9\sin^2\theta_1\cos^2\theta_1}}$$

$$=\frac{16}{\sqrt{4+\frac{9}{4}\sin^2 2\theta_1}},$$ ………………………………………………………………… (8 分)

当 $\sin^2 2\theta_1=1$ 时，$|OM|\cdot|ON|$ 取得最小值 $\frac{32}{5}$,

当 $\sin^2 2\theta_1=0$ 时，$|OM|\cdot|ON|$ 取得最大值 8,

所以$|OM|\cdot|ON|$的取值范围为$\left[\frac{32}{5},8\right]$. ……………………………………………………………… (10 分)

23. **命题意图** 本题考查绝对值不等式的求解及基本不等式的应用.

解析 (Ⅰ)当$x\leqslant-\frac{1}{2}$时,$f(x)=2-x-2x-1=-3x+1$,由$-3x+1\geqslant6$,得$x\leqslant-\frac{5}{3}$,所以$x\leqslant-\frac{5}{3}$;

……………………………………………………………………………………………… (1 分)

当$-\frac{1}{2}<x<2$时,$f(x)=2-x+2x+1=x+3$,由$x+3\geqslant6$,得$x\geqslant3$(舍去); ……………………… (2 分)

当$x\geqslant2$时,$f(x)=x-2+2x+1=3x-1$,由$3x-1\geqslant6$,得$x\geqslant\frac{7}{3}$,所以$x\geqslant\frac{7}{3}$. ……………………… (3 分)

所以不等式$f(x)\geqslant6$的解集为$\left(-\infty,-\frac{5}{3}\right]\cup\left[\frac{7}{3},+\infty\right)$. ………………………………………… (4 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知当$x=-\frac{1}{2}$时,$t=f(x)_{\min}=\frac{5}{2}$,

所以$a+b=\frac{2}{5}t=1$. ……………………………………………………………………………… (5 分)

所以$\frac{c}{ab}+\frac{3ac}{b}+\frac{8}{3c+1}=c\left(\frac{1}{ab}+\frac{3a}{b}\right)+\frac{8}{3c+1}$

$$=c\left[\frac{(a+b)^2}{ab}+\frac{3a}{b}\right]+\frac{8}{3c+1}$$

$$=c\left(\frac{4a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)+\frac{8}{3c+1}$$

$$\geqslant c\left(2\sqrt{\frac{4a}{b}\times\frac{b}{a}}+2\right)+\frac{8}{3c+1}$$

$$=6c+\frac{8}{3c+1},$$

当且仅当$b=2a$,即$a=\frac{1}{3},b=\frac{2}{3}$时,等号成立. ……………………………………………………… (8 分)

又$6c+\frac{8}{3c+1}=2(3c+1)+\frac{8}{3c+1}-2\geqslant2\sqrt{2(3c+1)\times\frac{8}{3c+1}}-2=6$,

当且仅当$2(3c+1)=\frac{8}{3c+1}$,即$c=\frac{1}{3}$时,等号成立,

所以$\frac{c}{ab}+\frac{3ac}{b}+\frac{8}{3c+1}\geqslant6$. …………………………………………………………………… (10 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。