绝密 ★ 启用前

2023 年 8 月第一届“鱼塘杯”高考适应性练习

数 学

本试卷共 4 页，22 小题，满分 150 分，考试用时 120 分钟.

注意事项:

1. **答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号（即 QQ 号后 6 位）填写在答题卡上.**

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑; 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案. 答案不能答在试卷上. **最终请在“雨课堂”直接选中您作答的选项.**

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上; 如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案; 不准使用铅笔和涂改液. 不按以上要求作答无效. **最终请逐题拍照上传至“雨课堂”的指定位置，要求字迹工整、清晰.**

4. **请认准“鱼塘杯”高考适应性练习官方信息发布 QQ 群 778435509，后续阅卷申诉、奖金颁发和获奖名单公示都在此群内进行.** 本联考活动最终解释权归鱼塘杯联考命题组所有.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x \mid x(x-4)(x-5)=0\}$，则集合 A 的非空真子集的个数是

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

2. 如果 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(3,x)$. 若 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$，则 x 的值是

A. 2　　B. -2　　C. 4　　D. -4

3. 已知线段 AB，则平面上全体满足 $|AP|^2+|BP|^2$ 为定值 $C>\dfrac{|AB|^2}{2}$ 的点 P 的轨迹是

A. 直线　　B. 圆　　C. 椭圆　　D. 抛物线

4. 设 $z\in\mathbf{C}$，满足 $\dfrac{z-2023}{z-\mathrm{i}}\in\mathbf{R}$，其中 i 为虚数单位. 则在复平面内，$z$ 表示的点的轨迹不经过的象限是

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

5. 已知二项式 $(1+2x)^{13}$ 的展开式中第 k 项系数最大，则 $(2+x)^k$ 展开式的二项式系数和是

A. 2^{10}　　B. 3^{10}　　C. 2^9　　D. 3^9

6. 如果 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，那么 $\cos\beta$ 所有取值的和是

A. $\frac{96}{25}$　　B. $\frac{48}{25}$　　C. $\frac{24}{25}$　　D. $\frac{12}{25}$

7. 函数 $f(x)$ 满足：任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$f(n)\geqslant 5n$. 且 $f(x+y)=f(x)+f(y)+10xy$. 则 $\sum\limits_{i=1}^{10}f(i)$ 的最小值是

A. 1775　　B. 1850　　C. 1925　　D. 2000

8. 已知 $x,y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，满足 $\cos(x+y)+\cos x\sin x\cos y-\sin y\cos y\sin x\leqslant 0$，则下列关系式一定成立的是

A. $x-y\leqslant 0$　　B. $x-y\geqslant 0$　　C. $0\leqslant x+y\leqslant\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{\pi}{2}\leqslant x+y<\pi$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 给定一组均为整数的样本，现在将这个样本同时加上 $a\in\mathbf{Z}$，则下列说法正确的是

A. 平均数增大 a

B. 方差不变

C. 如果 a 是奇数，随机抽取这组数据的一个，是奇数的概率不变

D. 如果 a 是偶数，随机抽取这组数据的一个，是奇数的概率不变

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_{n+1}=a_n^2+2a_n$，$a_1=1$，则下列说法错误的是

A. $a_4=255$　　B. $\{a_n+1\}$ 是等比数列

C. $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是递增数列　　D. 若令 $b_n=a_n+1$，则 $b_n=2^{2n-2}$

11. 已知四面体 $ABCD, AC=BD=\sqrt{5}, AD=BC=\sqrt{10}, AB=CD=\sqrt{13}$, 球 O 是四面体 $ABCD$ 的外接球，P,Q 分别是直线 AD,BC 上一动点，则下列说法正确的是

A. $\cos\angle ACB=\frac{9\sqrt{130}}{130}$

B. $|PQ|$ 的最小值为 2

C. 球 O 的表面积为 14π

D. 若球 O' 与球 O 球心相同，半径为 3，则球 O' 截直线 BC 的长为 $4\sqrt{2}$

12. 已知 $\triangle ABC$ 内切圆半径为 $\frac{1}{9}$，现用斜二测画法画出其直观图 $\triangle A'B'C'$，$\triangle A'B'C'$ 的面积是 $\frac{\sqrt{2}}{36}$，a,b,c 分别为 $\triangle ABC$ 的三边边长，则下列说法正确的是

A. $(a+b)\cdot c$ 的最大值是 1　　B. $\frac{4}{a+b}+\frac{1}{c}$ 的最小值是 $\frac{9}{2}$

C. $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}<25$　　D. $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}>17$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 现有一组数：22,17,69,34,29,66,58,40. 这组数的上四分位数是___▲___.

14. 设正实数 a 满足 $\{a\},[a],a$ 是等比数列，其中 $[a]$ 表示不超过 a 的最大整数，$\{a\}=a-[a]$，则 a 的值是___▲___.

15. 小鱼忘记了四位的 iPad 密码，他尝试了 5 次：6197,5073,0359,3925,2530，每次都有两个数字是正确的，可是位置都不对. 那么他 iPad 的密码是___▲___.

16. 设 AB 是 $\odot O$ 的直径，取圆上在 AB 不同侧的 P,Q 两点，连 AP,AQ,BQ. 设 AP 交 BQ 于 F，设 $\angle PAB=\alpha,\angle QAB=\beta$，满足 $\tan\alpha+\dfrac{1}{\tan\beta}=\dfrac{1}{\tan(\alpha-\beta)}$，这样的点 F 的轨迹为双曲线，其离心率是___▲___.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知一组独立重复的试验，每次试验成功的概率为 p，失败的概率为 $q=1-p$，将试验进行到出现 r 次成功为止，以随机变量 X 表示所需试验次数，X 的概率分布为 $P(X=k)$.

（1）若 $p=0.5,r=2$，求 $P(X=4)$；

（2）如果不要求第 r 次成功时停止这组试验，记前 k 次成功的次数为随机变量 Y，证明：

$$1\leqslant\frac{P(Y=r)}{P(X=k)}\leqslant k.$$

18.（12 分）

设函数 $f(x)=x^2-6x+2\ln x$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若 $f(x_1)+f(x_2)=5$，证明：$x_1+x_2\geqslant 7$.

19.（12 分）

设数列 $\{a_n\}$ 满足：a_n 是区间 $[0,1)$ 内小数部分不含偶数数字的 n 位小数的个数.

（1）设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\tan(\log_5(a_n))\cdot\tan(\log_5(a_{n+1}))$，且数列 $\{T_n\}$ 为数列 $\{b_n\}$ 前 n 项之和组成的数列，求数列 $\{T_n\}$ 的通项公式；

（2）若数列 $\{S_n\}$ 满足：S_n 是区间 $[0,1)$ 内所有小数部分不含偶数数字的 n 位小数的和，证明：$\dfrac{S_n}{a_n}<\dfrac{5}{9}$.

为了防止歧义，特别说明：本题中 n 位小数指的是 $[0,1)$ 内有 n 位有效数字的小数.

20.（12 分）

设四面体 $ABCD$ 满足 $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，$\cos\angle CAD=\frac{1}{3}$，$\cos\angle DAB=\frac{1}{4}$. $AB=2, AC=3, AD=2$.

（1）设 G 是 $\triangle BCD$ 的重心，求 $|AG|$；

（2）求四面体 $ABCD$ 在底面 BCD 上的高 h_{A-BCD}.

21.（12 分）

设 $\triangle ABC$ 中，A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 且有 $B=2C$.

（1）若 $a=2$，证明 $b-c<1$；

（2）若 $b^2>c^2+4c$，比较 $a+2c$ 和 $4\sqrt{b}$ 的大小关系，说明理由.

22.（12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，$A(-1,0)$. P 在 y 轴上运动，以 P 为圆心，PO 为半径的圆与直线 AP 交于 M_1, M_2. 设 M_1, M_2 的轨迹为 Γ.

（1）求 Γ 的方程；

（2）考虑抛物线 $C: y^2=-4x-4$ 上任意一点 B，B 不在 x 轴上，过 B 作 C 的切线 ℓ 与 Γ 交点的集合为 $\mathcal{P}$. 证明：一定存在点 $X\in\mathcal{P}$，使得 $\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{XB}=0$.

为了防止歧义，特别说明：本题的意思是在 ℓ 与 Γ 的所有交点中，一定存在一个 X，满足 $\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{XB}=0$.

绝密 ★ 启用前

2023 年 8 月第一届“鱼塘杯”高考适应性练习

数学参考答案和评分标准

本参考答案和评分标准共 8 页，22 小题，满分 120 分.

注意事项：

1. 本参考答案和评分标准第 I 卷部分提供了答案和解析，第 II 卷部分提供了标准解答和评分标准.

2. 第 II 卷部分每一题只给出了一种解答提供阅卷参考，如果出现新的解答，按照本参考答案和评分标准的精神，划定步骤分评分.

3. 如果考生发现自己的改卷结果和本参考答案和评分标准不一致，可在官方 QQ 群中 @ 任意一个管理员进行申诉，申诉时需要提供准考证号和自己的解答拍照.

4. 本联考活动最终解释权归鱼塘杯联考命题组所有.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

本题主要考察基本知识和基本方法.

1. 设集合 $A=\{x\mid x(x-4)(x-5)=0\}$，则集合 A 的非空真子集的个数是

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

【答案】B.

【解析】注意到 $A=\{0,4,5\}$，因此 A 的非空真子集个数为 $2^3-2=6$.

2. 如果 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(3,x)$. 若 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$，则 x 的值是

A. 2　　B. -2　　C. 4　　D. -4

【答案】D.

【解析】注意到 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(4,2+x)$，所以 $0=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=4+2(2+x)$，解得 $x=-4$.

3. 已知线段 AB，则平面上全体满足 $|AP|^2+|BP|^2$ 为定值 $C>\dfrac{|AB|^2}{2}$ 的点 P 的轨迹是

A. 直线　　B. 圆　　C. 椭圆　　D. 抛物线

【答案】B.

【解析】考虑一个三角形 ABC，CM 为这个三角形的中线，那么在两个小三角形中，根据余弦定理，有 $\dfrac{|CM|^2+|MA|^2-|AC|^2}{2|CM|\cdot|MA|}+\dfrac{|CM|^2+|MB|^2-|BC|^2}{2|CM|\cdot|MB|}=0$，因此 $|CA|^2+|CB|^2=2(|CM|^2+|MA|^2)$，因此若 $|PA|^2+|PB|^2$ 为定值，其一定在 AB 中点 M 为圆心，确定半径的一个圆上运动.

4. 设 $z \in \mathbf{C}$，满足 $\dfrac{z-2023}{z-\mathrm{i}} \in \mathbf{R}$，其中 i 为虚数单位. 则在复平面内，$z$ 表示的点的轨迹不经过的象限是

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

【答案】C.

【解析】考虑向量意义. $\dfrac{z-2023}{z-\mathrm{i}} \in \mathbf{R}$ 意思是说 $z, 2023, \mathrm{i}$ 共线，这个直线过第一、二、四象限，不过第三象限.

5. 已知二项式 $(1+2x)^{13}$ 的展开式中第 k 项系数最大，则 $(2+x)^k$ 展开式的二项式系数和是

A. 2^{10}　　B. 3^{10}　　C. 2^9　　D. 3^9

【答案】A.

【解析】用 T_k 表示二项式 $(1+2x)^{13}$ 中第 k 项系数，若二项式 $(1+2x)^{13}$ 中第 k 项系数最大，则有 $T_{k-1} \leqslant T_k \geqslant T_{k+1}$，其中 $T_k = \mathrm{C}_{13}^{k-1} 2^{k-1}$，解得 $k=10$，所以 $(2+x)^k$ 展开式的二项式系数和为 2^{10}.

6. 如果 $\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{4}{5}$，$\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$，那么 $\cos\beta$ 所有取值的和是

A. $\dfrac{96}{25}$　　B. $\dfrac{48}{25}$　　C. $\dfrac{24}{25}$　　D. $\dfrac{12}{25}$

【答案】C.

【解析】$\cos\beta = \cos[(\alpha+\beta)-\alpha] = \cos(\alpha+\beta)\cos\alpha + \sin(\alpha+\beta)\sin\beta$，然而 $\cos(\alpha+\beta)$ 和 $\cos\alpha$ 都有正负两种取值，最终可以得到这些的和为 $\dfrac{24}{25}$.

7. 函数 $f(x)$ 满足：任意 $n \in \mathbf{N}^*$，$f(n) \geqslant 5n$. 且 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 10xy$. 则 $\sum\limits_{i=1}^{10} f(i)$ 的最小值是

A. 1775　　B. 1850　　C. 1925　　D. 2000

【答案】C.

【解析】注意 $f(x+y) - 5(x+y)^2 = f(x) - 5x^2 + f(y) - 5y^2$，设 $g(x) = f(x) - 5x^2$，那么 $g(x+y) = g(x) + g(y)$，因此 $g(n) = g(n-1) + g(1) = \cdots = ng(1) = n[f(1)-5]$，因此 $f(n) = 5n^2 + [f(1)-5]n \geqslant 5n$，取 $n=1$，得到 $f(1) \geqslant 5$. 所以 $\sum\limits_{i=1}^{10} f(i) = 5\sum\limits_{i=1}^{10} i^2 + [f(1)-5]\sum\limits_{i=1}^{10} i \geqslant 5\sum\limits_{i=1}^{10} i^2 = 1925$. 设 $f(x) = 5x^2$，等号成立!

8. 已知 $x, y \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，满足 $\cos(x+y) + \cos x \sin x \cos y - \sin y \cos y \sin x \leqslant 0$，则下列关系式一定成立的是

A. $x - y \leqslant 0$　　B. $x - y \geqslant 0$　　C. $0 \leqslant x + y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$　　D. $\dfrac{\pi}{2} \leqslant x + y < \pi$

【答案】D.

【解析】原不等式左侧 $= \cos x \cos y - \sin x \sin y + (\cos x - \sin y) \sin x \cos y = \sin x \cos y \left(\dfrac{1}{\tan x} - \tan y + \cos x - \sin y\right) = \sin x \cos y \left[\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \tan y - \sin y\right]$. 因为

$x,y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin x\cos y\geqslant 0$. 因此原不等式可变为 $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\leqslant \tan y+\sin y$. 设 $f(x)=\tan x+\sin x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，易知 $f(x)$ 在定义域上单调递增，且原不等式即为 $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\leqslant f(y)$, 故有 $\frac{\pi}{2}-x\leqslant y$，即 $x+y\geqslant\frac{\pi}{2}$。由 x,y 取值范围易知 $x+y<\pi$，所以 $\frac{\pi}{2}\leqslant x+y<\pi$.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

本题主要考察基本知识和基本方法的适当扩展.

9. 给定一组均为整数的样本. 现在将这个样本同时加上 $a\in\mathbf{Z}$，则下列说法正确的是

A. 平均数增大 a

B. 方差不变

C. 如果 a 是奇数，随机抽取这组数据的一个，是奇数的概率不变

D. 如果 a 是偶数，随机抽取这组数据的一个，是奇数的概率不变

【答案】ABD.

【解析】A 和 B 显然正确. 如果 a 是奇数，和这组数据中的每一个相加，奇偶性替换，所以是奇数的概率不一定不变；如果 a 是偶数，相加后奇偶性不变，所以奇数的概率不变.

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_{n+1}=a_n^2+2a_n$，$a_1=1$，则下列说法错误的是

A. $a_4=255$

B. $\{a_n+1\}$ 是等比数列

C. $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是递增数列

D. 若令 $b_n=a_n+1$，则 $b_n=2^{2n-2}$

【答案】BD.

【解析】不妨令 $b_n=a_n+1$，则有 $b_{n+1}=b_n^2=2^{2^n}, b_1=a_1+1=2$，故 $b_n=2^{2^{n-1}}, a_n=2^{2^{n-1}}-1$. 计算可得 $a_4=2^8-1=256-1=255$.

$\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2^{2^{n-1}}$，不为常数，所以 $\{a_n+1\}$ 不是等比数列.

注意到 $\frac{\frac{a_{n+1}}{n+1}}{\frac{a_n}{n}}-1=\frac{[n2^{2^n}+n-(n+1)2^{2^{n-1}}-(n+1)]}{(n+1)(2^{2^{n-1}+1})}$，$n\geqslant 2$ 时，因为 $2^{n-1}>1$，所以 $2^n>2^{n-1}+1$，所以 $2^{2^n}>2^{2^{n-1}+1}=2\cdot 2^{2^{n-1}}$，所以 $n2^n-(n+1)2^{2^{n-1}}>2^{2^{n-1}}\cdot(n-1)\geqslant 1$，所以 $\frac{\frac{a_{n+1}}{n+1}}{\frac{a_n}{n}}-1>0$；$n=1$ 时 $\frac{\frac{a_{n+1}}{n+1}}{\frac{a_n}{n}}-1=\frac{1}{2}>0$；综上，$\frac{\frac{a_{n+1}}{n+1}}{\frac{a_n}{n}}-1>0, \frac{\frac{a_{n+1}}{n+1}}{\frac{a_n}{n}}>1, \frac{a_{n+1}}{n+1}>\frac{a_n}{n}$，故 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 单调递增.

根据上述结论，$b_n=2^{2^{n-1}}$.

11. 已知四面体 $ABCD, AC=BD=\sqrt{5}, AD=BC=\sqrt{10}, AB=CD=\sqrt{13}$, 球 O 是四面体 $ABCD$ 的外接球，P,Q 分别是直线 AD,BC 上一动点，则下列说法正确的是

A. $\cos\angle ACB=\frac{9\sqrt{130}}{130}$

B. $|PQ|$ 的最小值为 2

C. 球 O 的表面积为 14π

D. 若球 O' 与球 O 球心相同，半径为 3，则球 O' 截直线 BC 的长为 $4\sqrt{2}$

【答案】BCD.

【解析】作出一个长方体，其正面水平边长为 3，侧面水平边长为 2，高为 1，取其左前上方顶点为 A，右后上方顶点为 B，左后下方顶点为 C，右前下方顶点为 D，则 A,B,C,D 即为四面体 $ABCD$ 的四个顶点.

首先有 $\cos\angle ACB=\dfrac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

然后 $|PQ|_{\min}$ 即为直线 AD 和直线 BC 之间的距离，即为长方体前后两平面距离，即为 2.

因为长方体外接球过四面体四个顶点，所以四面体外接球即为长方体外接球。易知该球半径为 $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$，所以四面体 $ABCD$ 外接球表面积为 14π.

易知 O 点到 BC 距离为 1，所以 O' 截直线 BC 的长度为 $2\sqrt{3^2-1^2}=4\sqrt{2}$.

12. 已知 $\triangle ABC$ 内切圆半径为 $\dfrac{1}{9}$，现用斜二测画法画出其直观图 $\triangle A'B'C'$，$\triangle A'B'C'$ 的面积是 $\dfrac{\sqrt{2}}{36}$. a,b,c 分别为 $\triangle ABC$ 的三边边长，则下列说法正确的是

A. $(a+b)\cdot c$ 的最大值是 1

B. $\dfrac{4}{a+b}+\dfrac{1}{c}$ 的最小值是 $\dfrac{9}{2}$

C. $\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{1}{1-b}+\dfrac{1}{1-c}<25$

D. $\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{1}{1-b}+\dfrac{1}{1-c}>17$

【答案】BC.

【解析】由于本题是全卷最难的一题，如果将解析全部放出，会减少解析的神秘感，所以本题解析敬请期待讲评现场（讲评人的手稿会发送到群文件）.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

本题主要考察基本知识和基本方法的适当扩展.

13. 现有一组数：22,17,69,34,29,66,58,40. 这组数的上四分位数是___▲___.

【答案】62.

【解析】先排序，得到数据为 17,22,29,34,40,58,66,69. 再求上四分位数，也就是 75% 分位数，由于 $8\times75\%=6$，所以其为第 6 项和第 7 项的平均数，为 62.

14. 设正实数 a 满足 $\{a\},[a],a$ 是等比数列，其中 $[a]$ 表示不超过 a 的最大整数，$\{a\}=a-[a]$，则 a 的值是___▲___.

【答案】$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

【解析】设 $[a]=x,\{a\}=y$，那么 $x+y=a$，所以 $x^2=y(x+y)=xy+y^2<x+1$，也就是 $x^2-x-1<0$，得到 $x=0$（等比数列，舍去）或 $x=1$，因此 $1=y(1+y)$，最终得到 $a=x+y=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

15. 小鱼忘记了四位的 iPad 密码，他尝试了 5 次：6197,5073,0359,3925,2530，每次都有两个数字是正确的，可是位置都不对. 那么他 iPad 的密码是___▲___.

【答案】9702.

【解析】由于 3 和 5 在每个位置都出现过了，所以密码一定不含 3 或 5. 接下来通过每一位的一一验证可以得到密码为 9702.

16. 设 AB 是 $\odot O$ 的直径，取圆上在 AB 不同侧的 P,Q 两点，连 AP,AQ,BQ. 设 AP 交 BQ 于 F，设 $\angle PAB=\alpha,\angle QAB=\beta$，满足 $\tan\alpha+\dfrac{1}{\tan\beta}=\dfrac{1}{\tan(\alpha-\beta)}$，这样的点 F 的轨迹为双曲线，其离心率是___▲___.

【答案】$\sqrt{3}$.

【解析】由正切联想到斜率，由于 F 轨迹是 AP、BQ 交点，故推测 $k_{AP}\cdot k_{BQ}$ 为定值，下给出证明与计算：设 $\angle QBA=\gamma$，则 $\gamma=\dfrac{\pi}{2}-\beta$，且 $k_{AP}=\tan\alpha, k_{BQ}=\tan\gamma.\tan\gamma=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)=\dfrac{1}{\tan\beta}\tan(\alpha-\beta)=\tan\left(\alpha+\gamma-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{\tan(\alpha+\gamma)}$，因为 $\tan\alpha+\dfrac{1}{\tan\beta}=\dfrac{1}{\tan(\alpha-\beta)}$，所以 $\tan\alpha+\tan\gamma=-\tan(\alpha+\gamma)=-\dfrac{\tan\alpha+\tan\gamma}{1-\tan\alpha\tan\gamma}$，即 $k_{AP}\cdot k_{BQ}=\tan\alpha\tan\gamma=2$，易知当 $\alpha\to 0$ 时，$\gamma\to\dfrac{\pi}{2}$，此时 $F\to B$，同理 $F\to A$ 也存在，即 A,B 在双曲线上，由 α,γ 对称性可知，A,B 两点对称，再结合双曲线第三定义可知：$e^2-1=k_{AP}\cdot k_{BQ}$，所以 $e=\sqrt{3}$. 即双曲线离心率为 $\sqrt{3}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知一组独立重复的试验，每次试验成功的概率为 p，失败的概率为 $q=1-p$，将试验进行到出现 r 次成功为止，以随机变量 X 表示所需试验次数，X 的概率分布为 $P(X=k)$.

（1）若 $p=0.5,r=2$，求 $P(X=4)$；

（2）如果不要求第 r 次成功时停止这组试验，记前 k 次成功的次数为随机变量 Y，证明：

$$1\leqslant\frac{P(Y=r)}{P(X=k)}\leqslant k.$$

本题主要考察对排列组合与概率的结合、二项分布概率公式的运用.

【解析和评分标准】

（1）$P(x=4)=C_3^1\times(0.5)^1\times(1-0.5)^{3-1}\times 0.5=\dfrac{3}{16}$ ……（3 分）

（2）先求 $P(X=k)$，即前 $k-1$ 次试验中有 $r-1$ 次成功，且第 k 次试验成功.

所以 $P(X=k)=C_{k-1}^{r-1}p^{r-1}q^{k-r}\cdot p=\dfrac{(k-1)!}{(k-r)!(r-1)!}p^rq^{k-r}$ ……（5 分）

然后求 $P(Y=r)$，易知 Y 满足 k 次，p 为成功概率的二项分布 ……（6 分）

故 $P(Y=r)=C_k^rp^rq^{k-r}=\dfrac{k!}{r!(k-r)!}p^rq^{k-r}$ ……（7 分）

因此 $\dfrac{P(Y=r)}{P(X=k)}=\dfrac{\dfrac{k!}{r!(k-r)!}p^rq^{k-r}}{\dfrac{(k-1)!}{(k-r)!(r-1)!}p^rq^{k-r}}=\dfrac{k!}{r!(k-r)!}\cdot\dfrac{(k-r)!(r-1)!}{(k-1)!}=\dfrac{k}{r}$ ……（8 分）

又因为 k, r 分别为试验次数和成功次数，所以 $r \leqslant k$ 且 $r \geqslant 1$ .... (9 分)

所以 $1 \leqslant \dfrac{k}{r} \leqslant k$，即 $1 \leqslant \dfrac{P(Y=r)}{P(X=k)} \leqslant k$ .... (10 分)

18. (12 分)

设函数 $f(x)=x^2-6x+2\ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 若 $f(x_1)+f(x_2)=5$，证明：$x_1+x_2 \geqslant 7$.

本题主要考察导数的求法和运用、切线不等式、二次不等式和整体思想.

【解析和评分标准】

(1) $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，$f'(x)=2x-6+\dfrac{2}{x}=\dfrac{2x^2-6x+2}{x}$ .... (1 分)

令 $f'(x)=0$ 解得在定义域内，$x_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, x_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ .... (2 分)

当 $0<x<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增 .... (3 分)

因此 $f(x)$ 的增区间为 $\left(0,\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$，$\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$，减区间为 $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ (4 分)

(2) 根据题意，有 $2\ln x_1x_2+x_1^2+x_2^2-6x_1-6x_2=5$ .... (5 分)

设 $\varphi(t)=\ln t-t+1$，定义域 $(0,+\infty)$，$\varphi'(t)=\dfrac{1}{t}-1=\dfrac{1-t}{t}$ .... (7 分)

当 $0<t<1$ 时 $\varphi'(t)>0$，$\varphi(t)$ 单调递增；当 $t>1$ 时，$\varphi'(t)<0$，$\varphi(t)$ 单调递减，因此 $\varphi(t)$ 的最大值是 $\varphi(1)=0$. 所以 $\ln t \leqslant t-1$ 对任意 $t>0$ 恒成立 .... (10 分)

令 $t=x_1+x_2$，有 $5=2\ln x_1x_2+x_1^2+x_2^2-6x_1-6x_2 \leqslant 2x_1x_2-2+x_1^2+x_2^2-6x_1-6x_2=(x_1+x_2)^2-6(x_1+x_2)-2$ .... (11 分)

因此 $t^2-6t-7\geqslant 0$，也就是 $(t+1)(t-7)\geqslant 0$，解得 $x_1+x_2\geqslant 7$ .... (12 分)

19. (12 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足：a_n 是区间 $[0,1)$ 内小数部分不含偶数数字的 n 位小数的个数.

(1) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\tan(\log_5(a_n))\cdot\tan(\log_5(a_{n+1}))$，且数列 $\{T_n\}$ 为数列 $\{b_n\}$ 前 n 项之和组成的数列，求数列 $\{T_n\}$ 的通项公式；

(2) 若数列 $\{S_n\}$ 满足：S_n 是区间 $[0,1)$ 内小数部分所有不含偶数数字的 n 位小数的和，证明：$\dfrac{S_n}{a_n}<\dfrac{5}{9}$.

为了防止歧义，特别说明：本题中 n 位小数指的是 $[0,1)$ 内有 n 位有效数字的小数.

本题主要考察计数原理、数列和数列求和尤其是等比数列求和的基本方法、数列不等式的基本证明.

【解析和评分标准】

(1) 由于 n 位小数的每一位都有 5 种选法，所以 $a_n=5^n$ .... (2 分)

所以 $b_n=\tan(n)\tan(n+1)=\dfrac{\tan(n+1)-\tan(n)}{\tan[(n+1)-n]}-1$ .... (4 分)

所以 $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \dfrac{\tan(n+1)}{\tan 1} - n - 1$ ………………（6 分）

（2）由于 S_n 是区间 $[0,1)$ 内所有小数部分不含偶数数字的 n 位小数的和，注意到在小数的第 i 位上出现 $1,3,5,7,9$ 的数各有 5^{n-1} 个 ………………（8 分）

所以 $S_n = (1+3+5+7+9)\times 5^{n-1} \times \left(\dfrac{1}{10} + \cdots + \dfrac{1}{10^n}\right) = 5^{n+1} \times \dfrac{10^n - 1}{9\times 10^n}$ ………（10 分）

所以 $\dfrac{S_n}{a_n} = \dfrac{5\times(10^n - 1)}{9\times 10^n} < \dfrac{5\times 10^n}{9\times 10^n} = \dfrac{5}{9}$ ………………（12 分）

20.（12 分）

设四面体 $ABCD$ 满足 $\angle BAC = \dfrac{\pi}{3}$，$\cos\angle CAD = \dfrac{1}{3}$，$\cos\angle DAB = \dfrac{1}{4}$. $AB = 2, AC = 3, AD = 2$.

（1）设 G 是 $\triangle BCD$ 的重心，求 $|AG|$；

（2）求四面体 $ABCD$ 在底面 BCD 上的高 h_{A-BCD}.

本题主要考察重心的定义、空间向量的基本运算、点到平面的距离公式和解决立体几何问题的基底法.

【解析和评分标准】

（1）取 CD 中点 M. 注意到 $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ ………………（1 分）

因此 $|\overrightarrow{AG}|^2 = \dfrac{1}{9}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})^2 = \dfrac{1}{9}(|AB|^2 + |AC|^2 + |AD|^2 + 2|AB||AC|\cos\angle BAC + 2|AC||AD|\cos\angle CAD + 2|AD||AB|\cos\angle DAB) = \dfrac{1}{9}\times(4+9+4+6+4+2) = \dfrac{29}{9}$ ……（3 分）

所以 $|AG| = |\overrightarrow{AG}| = \dfrac{\sqrt{29}}{3}$ ………………（4 分）

（2）设平面 BCD 的一个法向量是 $\boldsymbol{n} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$. 那么有 $0 = \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{n}\cdot(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = (x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$ ………………（6 分）

所以有 $0 = 3x + 9y + 2z - 4x - 3y - z = -x + 6y + z$，同理有 $2x + 7y - 2z = 0$，令 $z = 1$，得 $x = 1, y = 0$ ………………（8 分）

因此 $\boldsymbol{n} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$，由于 $|\boldsymbol{n}| = \sqrt{|AB|^2 + |AD|^2 + 2|AB||AD|\cos\angle BAD} = \sqrt{10}$….（10 分）

而且 $\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n} = 4 + 1 = 5$ ………………（11 分）

所以 $h_{A-BCD} = \dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|} = \dfrac{5}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ ………………（12 分）

21.（12 分）

设 $\triangle ABC$ 中，A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 且有 $B = 2C$.

（1）若 $a = 2$，证明 $b - c < 1$；

（2）若 $b^2 > c^2 + 4c$，比较 $a + 2c$ 和 $4\sqrt{b}$ 的大小关系，说明理由.

本题主要考察解三角形的基本定理和基本方法和不等式的证明.

【解析和评分标准】

（1）因为 $\sin^2 B - \sin^2 C = \dfrac{1}{2}(\cos 2C - \cos 2B)$ ………………（1 分）

又因为 $\cos 2C-\cos 2B=2\sin(B+C)\cos(B-C)$，且 $B+C=\pi-A, B=2C$，所以 $\sin^2 B-\sin^2 C=\sin A\cdot\sin C$ …… (2 分)

又由于正弦定理，$\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$，所以 $b^2-c^2=ac$ …… (4 分)

所以 $b^2-c^2=2c$，$(c+1)^2=b^2+1>b^2$，所以 $b-c<1$ …… (6 分)

(2) 由于 $b^2=c^2+ac>c^2+4c$，所以 $a>4$ …… (7 分)

又因为 $b^2+\dfrac{a^2}{4}=\left(c+\dfrac{a}{2}\right)^2>b^2+4$ …… (9 分)

又因为 $b^2+4\geqslant 4b$，所以 $\left(c+\dfrac{a}{2}\right)^2>4b$ …… (11 分)

所以 $a+2c>4\sqrt{b}$ …… (12 分)

22.（12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，$A(-1,0)$. P 在 y 轴上运动，以 P 为圆心，PO 为半径的圆与直线 AP 交于 M_1,M_2. 设 M_1,M_2 的轨迹为 Γ.

(1) 求 Γ 的方程；

(2) 考虑抛物线 $C:y^2=-4x-4$ 上任意一点 B，B 不在 x 轴上，过 B 作 C 的切线 ℓ 与 Γ 交点的集合为 $\mathcal{P}$. 证明：一定存在点 $X\in\mathcal{P}$，使得 $\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{XB}=0$.

为了防止引发歧义，特别说明：本题的意思是在 ℓ 与 Γ 的所有交点中，一定存在一个 X，满足 $\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{XB}=0$.

本题主要考察轨迹的求解、抛物线切线的计算、解析几何运算的基本知识和基本方法.

【解析和评分标准】

(1) 设 $P(0,a)$，那么 $AP:y=ax+a$，$\odot P:x^2+(y-a)^2=a^2$ …… (1 分)

直线方程代入圆方程得到 $(a^2+1)x^2=a^2$ …… (2 分)

从直线方程得到 $a=\dfrac{y}{x+1}$，代入上式得到 $x^2y^2+x^2(x+1)^2=y^2$，也就是 $x^2(x+1)^2=y^2(1+x)(1-x)$，不妨设 $x\neq-1$，那么 $x^2(x+1)+y^2(x-1)=0(x\neq-1)$ …… (5 分)

(2) 设 $B(x_0,y_0)$，那么 $y_0^2=-4x_0-4$. 设切线是 $x=m(y-y_0)+x_0$，与抛物线联立得到 $y^2+4my+(4x_0+4-4my_0)=0$，这个方程有两个相等的实数根，所以 $\Delta=16m^2-4(4x_0+4-4my_0)=0$，计算得到切线 $\ell:yy_0=-2x-2x_0-4$（不可能过 $(-1,0)$）…… (7 分)

下面我们在 ℓ 上找一个点 $X'(x_1,y_1)$ 满足 $\overrightarrow{OX'}\cdot\overrightarrow{X'B}=0$，所以 $k_{OX'}=\dfrac{y_0}{2}$ …… (8 分)

联立 ℓ 和 $OX':y=\dfrac{y_0}{2}x$，得到 $x=\dfrac{x_0+2}{x_0}$（中间需要利用抛物线方程换掉 y_0^2）…… (9 分)

所以 $X'\left(\dfrac{x_0+2}{x_0},\dfrac{y_0(x_0+2)}{2x_0}\right)$，下面验证其在 Γ 上，这样我们就证明了题目的结论. 注意到

$$x_1^2(x_1+1)+y_1^2(x_1-1)=\frac{(x_0+2)^2}{x_0^2}\left(\frac{x_0+2}{x_0}+1\right)+\frac{y_0^2(x_0+2)^2}{4x_0^2}\left(\frac{x_0+2}{x_0}-1\right)=$$

$$\frac{2(x_0+1)(x_0+2)^2}{x_0^3}+\frac{-4(x_0+1)(x_0+2)^2}{4x_0^2}\cdot\frac{2}{x_0}=\frac{2(x_0+1)(x_0+2)^2}{x_0^3}-\frac{2(x_0+1)(x_0+2)^2}{x_0^3}=0,$$

所以 X' 在 Γ 上 …… (11 分)

然而 X' 也在 ℓ 上，所以 X' 是他们的一个交点，$X'\in\mathcal{P}$，那么我们就找到了这样的 X，也就是 X'，满足 $\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{XB}=0$ …… (12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。