考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：集合、常用逻辑用语、函数、导数、三角函数、三角恒等变换、解三角形、平面向量、数列、不等式、立体几何、直线与圆、圆锥曲线。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{(x,y)|x+y=1\}$ 和 $B=\{(x,y)|y=1\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{1\}$　　B. $\{0\}$　　C. $\{(1,0)\}$　　D. $\{(0,1)\}$

2. 已知直线 $l_1:ax+2y+3=0$ 和 $l_2:x+(a-1)y+1=0$，则“$a=2$”是“$l_1 /\!/ l_2$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 已知向量 a,b 满足 $|a|=\sqrt{6}$，$|b|=\sqrt{2}$，$(a-b)\cdot b=1$，则向量 a,b 夹角的大小等于

A. [illegible]　　B. 45°　　C. 60°　　D. 120°

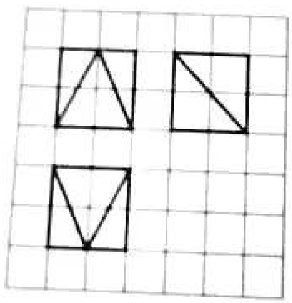
4. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b}=1(b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，过 F_1 的直线 l 与双曲线 C 的左支交于 A,B 两点，若 $|AB|=|BF_2|$，则 $|AF_2|=$

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 12

5. 在公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1,a_2,a_{k_1},a_{k_2},a_{k_3}$ 成公比为 4 的等比数列，则 $k_3=$

A. 84　　B. 86　　C. 88　　D. 96

6. 如图是某几何体的三视图，图中小方格的边长为 1，则该几何体的体积为



A. $\frac{22}{3}$　　B. $\frac{20}{3}$　　C. 6　　D. $\frac{17}{3}$

7. 碳-14测年法是由美国科学家马丁·卡门与同事塞缪尔·鲁宾于1940年发现的一种测定含碳物质年龄的方法，在考古中有大量的应用. 其原理为：宇宙射线中的中子与氮-14反应产生碳-14，而碳-14会发生衰变变成氮-14，由此构建一个核素平衡. 空气中的碳-14与氧反应生成的二氧化碳被生物吸收，活体生物体内的碳-14和碳-12浓度比例是一定的，只有当生物死亡后，碳循环中断，碳-14会衰变并逐渐消失. 放射性元素的衰变满足规律 $N=N_0e^{-\lambda t}$（表示的是放射性元素在生物体中最初的含量 N_0 与经过时间 t 后的含量 N 间的关系，其中 $\lambda=\frac{\ln 2}{T}$（T 为半衰期））. 已知碳-14的半衰期为5 730年，$N_0=1.2\times10^{-12}$，经测量某地出土的生物化石中碳-14含量为 4×10^{-13}，据此推测该化石活体生物生活的年代距今约（结果保留整数，参考数据 $\log_2 3\approx1.585$）

A. 7 650年　　B. 8 890年

C. 9 082年　　D. 10 098年

8. 给出下列四种图象的变换方法：

①将图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度；②将图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度；

③将图象向左平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位长度；④将图象向右平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位长度.

利用上述变换中的某些方法，能由函数 $y=\sin 4x$ 的图象得到函数 $y=-2\sin 2x\cos 2x$ 的图象的变换方法是

A. ①②　　B. ②③　　C. ①④　　D. ②④

9. 已知 $f(x)$ 是定义在R上的减函数，对任意 $x,y\in\mathbf{R}$，$f(x+y)=f(x)f(y)$ 恒成立，若 $f(-5)=3$，则 $f(3-x)<27$ 的解集为

A. $(-\infty,15)$　　B. $(-\infty,18)$　　C. $(15,+\infty)$　　D. $(18,+\infty)$

10. 人利用双耳可以判定声源在什么方位，听觉的这种特性叫做双耳定位效应（简称双耳效应）. 根据双耳的时差，可以确定声源 P 必在以双耳为左右焦点的一条双曲线上. 又若声源 P 所在的双曲线与它的渐近线趋近，此时声源 P 对于测听者的方向偏角 α，就近似地由双曲线的渐近线与虚轴所在直线的夹角来确定. 一般地，甲测听者的左右两耳相距约为20 cm，声源 P 的声波传及甲的左、右两耳的时间差为 3×10^{-5} s，声速为334 m/s，则声源 P 对于甲的方向偏角 α 的正弦值约为

A. 0.004　　B. 0.04　　C. 0.005　　D. 0.05

11. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$AC\perp CB$，其外接球的体积为 36π，若 $AC=x$，$BC=y$，$AP=z$，则 $xy+yz+zx$ 的最大值为

A. 36　　B. 32　　C. 24　　D. 12

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, & x\geq1,\\ x-1, & x<1,\end{cases}$ 则满足 $f(-x)-f(x-1)>-1$ 的 x 的取值范围是

A. $(-\infty,0)$　　B. $(-\infty,-1)$

C. $(-\infty,1)$　　D. $(-\infty,2)$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 函数 $f(x)=x\ln x$ 的图象在点 $(e,f(e))$ 处的切线方程为________.

14. 已知实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y-4\le 0, \\ x-y-1\ge 0, \\ 2x-6y-3\le 0, \end{cases}$ 则 $z=2x+3y$ 的最大值为________.

15. 某中学组队到某村参加社会实践活动，村长让学生测量河流两岸 A 与 B 两点间的距离. 同学们各抒己见，但李明想到一种测量方法，同学们一致认为很好. 其方法是：在点 A 处垂直地面竖立一根竹竿，在竹竿上取一点 P，使 $AP=a$ 米，在 P 处测得从 P 看 B 的俯角为 α.

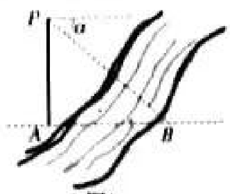


图1

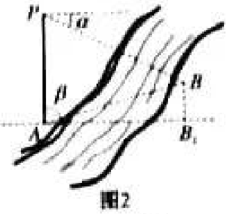


图2

①当 A 和 B 在同一水平面上时(如图 1)，测得 $AB=$________米；

②当 A 和 B 不在同一水平面上(A 和 B_1 在同一水平面上)时(如图 2)，利用测角仪测得 $\angle PAB=\beta$，此时，可测得 $AB=$________米. (本小题第一空 2 分，第二空 3 分)

16. 已知抛物线 $C: x^2=\frac{4}{3}y$ 的焦点为 F，过点 F 的直线 l 与抛物线 C 交于 A，B 两点，则 $\frac{|AB|}{|AF|\cdot|BF|}=$________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_na_{n+1}=a_n-a_{n+1}$ $(n\in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 令 $b_n=a_na_{n+1}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18. (本小题满分 12 分)

在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，角 A 为锐角且 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求 $\tan\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$；

(2) 若 $\cos B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$c=2\sqrt{2}$，求 b.

. (本小题满分 12 分)

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$CA=CB$，$CD\perp AB$，$AB=AA_1$，$\angle BAA_1=60^\circ$.

(1) 求证：平面 $ABC\perp$ 平面 A_1CD；

(2) 若平面 $ABC\perp$ 平面 AA_1B_1B，$AB=CB=2$，求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积.

20.（本小题满分 12 分）

在$\triangle AOB$中，$OB=2\sqrt{3}$，$\angle OAB=60^\circ$．以 O 为原点，$\overrightarrow{OB}$的方向为 x 轴的正方向，建立平面直角坐标系 xOy，设 A 在 x 轴的上方，C 为$\triangle AOB$ 外接圆的圆心．

(1)求圆 C 的方程；

(2)求圆 C 在点 B 处的切线方程；

(3)是否存在点 A，使得$|AB|=2$？若存在，求出点 A 的坐标；若不存在，请说明理由．

21.（本小题满分 12 分）

已知 F_1，F_2 分别是椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，A，C 分别是椭圆 E 的左、右顶点，D，B 分别是椭圆 E 的上、下顶点，若四边形 $ABCD$ 的面积为 $2\sqrt{2}$，$\triangle DF_1F_2$ 的面积为 1．

(1)求椭圆 E 的方程；

(2)设平行于 AB 的动直线 l 与四边形 $ABCD$ 的对边 AD，BC 分别交于点 M，N，与椭圆交于点 P，(在直线 l 上从上到下顺次分别为 P，M，N，Q)，求证：$|PM|=|NQ|$．

题满分 12 分)

数 $f(x)=xe^x-x$，$g(x)=\ln x+1$．

函数 $f(x)$的单调区间；

明：不等式 $f(x)\geq g(x)$在区间$(0,+\infty)$上恒成立．

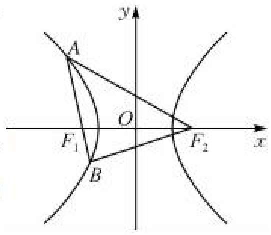
高三文科数学参考答案、提示及评分细则

1. D 解方程组$\begin{cases}y=1,\\x+y=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=0,\\y=1,\end{cases}$所以$A\cap B=\{(0,1)\}$. 故选 D.

2. A 当$a=2$时,可以推出$l_1/\!/l_2$;当$l_1/\!/l_2$时,可得$a=2$或$a=-1$,所以"$a=2$"是"$l_1/\!/l_2$"的充分不必要条件. 故选 A.

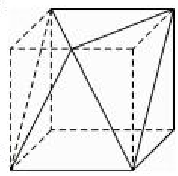
3. A 由$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=1$,得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1+(\sqrt{2})^2=3$,所以$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,则向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$夹角的大小为$30°$. 故选 A.

4. C 根据双曲线的定义,得$|AF_2|-|AF_1|=4$,$|BF_2|-|BF_1|=4$,两式相加得$|AF_2|+|BF_2|-(|AF_1|+|BF_1|)=8$,即$|AF_2|+|BF_2|-|AB|=8$,又$|BF_2|=|AB|$,所以$|AF_2|=8$. 故选 C.



5. B 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d. 因为$a_1,a_2,a_{k_1},a_{k_2},a_{k_3}$成公比为 4 的等比数列,所以$a_2=4a_1$,所以$a_1+d=4a_1$,得$d=3a_1$. 所以$a_{k_3}=4^4a_1=256a_1$,所以$a_1+(k_3-1)d=256a_1$. 即$(k_3-1)\cdot 3a_1=255a_1$,解得$k_3=86$. 故选 B.

6. B 由三视图知该几何体为正方体截去了两个相同的三棱锥(如图),所以该几何体的体积为$2\times2\times2-2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times1\times2=8-\frac{4}{3}=\frac{20}{3}$. 故选 B.



7. C 由题意知$t=\frac{T\cdot\ln\frac{N_0}{N}}{\ln 2}=\frac{5\ 730\times\ln\frac{1.2\times10^{-12}}{4\times10^{-13}}}{\ln 2}=\frac{5\ 730\ln 3}{\ln 2}=5\ 730\log_2 3\approx5\ 730\times1.585=9\ 082.05\approx9\ 082$. 故选 C.

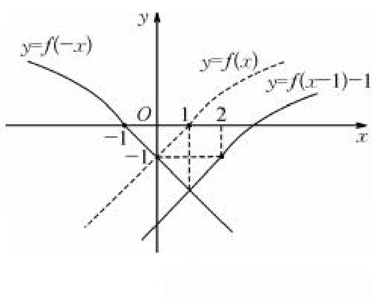
8. A $y=-2\sin 2x\cos 2x=-\sin 4x$. 因为$\sin 4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin(4x-\pi)=-\sin 4x$,所以①适合;因为$\sin 4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin(4x+\pi)=-\sin 4x$,所以②适合;因为$\sin 4\left(x+\frac{3\pi}{8}\right)=\sin\left(4x+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos 4x$,所以③不适合;因为$\sin 4\left(x-\frac{3\pi}{8}\right)=\sin\left(4x-\frac{3\pi}{2}\right)=\cos 4x$,所以④不适合. 故选 A.

9. B 因为对任意$x,y\in\mathbf{R}$,$f(x+y)=f(x)f(y)$恒成立,所以$f(-10)=f(-5)f(-5)=9$,$f(-15)=f(-10)f(-5)=27$,则由$f(3-x)<27$,得$f(3-x)<f(-15)$,又$f(x)$是$\mathbf{R}$上的减函数,所以$3-x>-15$,解得$x<18$. 故选 B.

10. D 设两耳所在双曲线的实轴长为$2a$,焦距为$2c$,虚轴长为$2b$,则$2a=3\times10^{-5}\times334=0.01\ 002(\text{m})$,$2c=0.2(\text{m})$,$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{b}{a}$,所以$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{b}{a}$,所以$\sin\alpha=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}}}=\frac{a}{c}=\frac{2a}{2c}=\frac{0.01\ 002}{0.2}=0.0\ 501\approx0.05$. 故选 D.

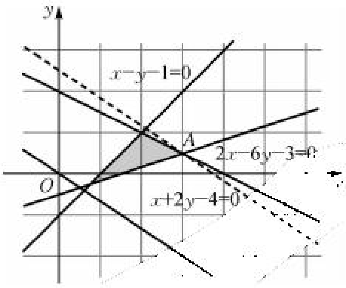
11. A 设三棱锥$P-ABC$外接球的半径为R,则$\frac{4\pi R^3}{3}=36\pi$,所以$R=3$,又$2R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,所以$x^2+y^2+z^2=36$,所以$xy+yz+zx\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{y^2+z^2}{2}+\frac{z^2+x^2}{2}=x^2+y^2+z^2=36$,当且仅当$x=y=z=2\sqrt{3}$时,等号成立. 故选 A.

12. C 考查函数$y=f(-x)$和$y=f(x-1)-1$的图象,其中$y=f(-x)$与$y=f(x)$的图象关于y轴对称,将$y=f(x)$的图象右移 1 个单位长度,再下移 1 个单位长度,得到$y=f(x-1)-1$的图象,如图所示,由$(-x)-1=[(x-1)-1]-1$,解得$x=1$,所以满足$f(-x)>f(x-1)-1$的x的取值范围是$x<1$. 故选 C.



13. $2x-y-\mathrm{e}=0$ 因为$f(\mathrm{e})=\mathrm{e}$,$f'(x)=\ln x+1$,则$f'(\mathrm{e})=2$,所以所求切线方程为$y-\mathrm{e}=2(x-\mathrm{e})$,即$2x-y-\mathrm{e}=0$.

14. $\frac{15}{2}$　画出可行域(如图阴影部分),当直线 $2x+3y=z$ 过点 $A\left(3,\frac{1}{2}\right)$ 时,z 取得最大值,所以 $z_{\max}=2\times3+3\times\frac{1}{2}=\frac{15}{2}$.



15. ①$\frac{a}{\tan\alpha}$　②$\frac{a\cos\alpha}{\cos(\alpha-\beta)}$　①$\angle PBA=\alpha$,由 $\frac{PA}{AB}=\tan\alpha$,得 $AB=\frac{a}{\tan\alpha}$;②$\angle APB=\frac{\pi}{2}-\alpha$,$\angle PBA=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta=\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta$,由正弦定理,得 $\frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta\right)}=\frac{AB}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$,解得 $AB=\frac{a\cos\alpha}{\cos(\alpha-\beta)}$.

16. 3　由题意知抛物线 C 的焦点坐标为 $F\left(0,\frac{1}{3}\right)$,因为直线 l 与 C 有两个交点,所以 l 的存在斜率,所以设 l 的方程为 $y=kx+\frac{1}{3}$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,联立 $\begin{cases}y=kx+\frac{1}{3},\\x^2=\frac{4}{3}y,\end{cases}$ 所以 $x^2-\frac{4}{3}kx-\frac{4}{9}=0$,所以 $x_1+x_2=\frac{4}{3}k$,$x_1x_2=-\frac{4}{9}$,又 $|AF|=\frac{1}{3}+y_1$,$|BF|=\frac{1}{3}+y_2$,所以 $|AF|\cdot|BF|=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}(y_1+y_2)+y_1y_2=\frac{4}{9}(1+k^2)$,$|AB|=|AF|+|BF|=\frac{2}{3}+y_1+y_2=\frac{4}{3}+k(x_1+x_2)=\frac{4}{3}(1+k^2)$,所以 $\frac{|AB|}{|AF|\cdot|BF|}=3$.

17. 解:(1)因为 $a_na_{n+1}=a_n-a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$,所以 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=1$, ………… 2分

又 $a_1=1$,所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是以1为首项,1为公差的等差数列, ………… 4分

所以 $\frac{1}{a_n}=n$,所以 $a_n=\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$. ………… 6分

(2)由(1)得 $b_n=a_na_{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, ………… 8分

所以 $S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$. ………… 10分

18. 解:(1)因为 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$A$ 为锐角,所以 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2A}=\frac{\sqrt{6}}{3}$, ………… 2分

所以 $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ………… 4分

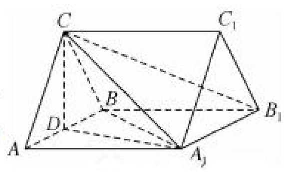
所以 $\tan\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan A+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan A\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}\times1}=3+2\sqrt{2}$. ………… 6分

(2)因为 $\cos B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,$B\in(0,\pi)$,所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\frac{1}{3}$, ………… 8分

则 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt{6}}{3}$, ………… 10分

由正弦定理,得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,即 $\frac{b}{\frac{1}{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}$,解得 $b=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. ………… 12分

19. (1)证明:因为 $CA=CB$,$CD\perp AB$,所以 D 为 AB 的中点,
连接 A_1B. 由于 $AB=AA_1$,$\angle BAA_1=60°$,故 $\triangle A_1AB$ 为等边三角形,
所以 $A_1D\perp AB$. ………… 2分
又因为 $CD\perp AB$,A_1D,$CD\subset$ 平面 A_1CD,$A_1D\cap CD=D$,所以 $AB\perp$ 平面 A_1CD. … 4分



又因为 $AB\subset$平面 ABC，所以平面 $ABC\perp$平面 A_1CD. …… 6分

(2)解：法一：因为平面 $ABC\perp$平面 AA_1B_1B，平面 $ABC\cap$平面 $AA_1B_1B=AB$，$CD\subset$平面 ABC，$CD\perp AB$.

所以 $CD\perp$平面 AA_1B_1B. …… 8分

由 $CA=CB=AB=2$，得$\triangle ABC$是等边三角形，则 $CD=\sqrt{3}$；

由$\triangle A_1AB$是等边三角形，得 $S_{\triangle A_1AB}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$，

所以 $V_{C\text{-}A_1AB}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1AB}\cdot CD=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=1$. …… 10分

连接 B_1C，由于 ABB_1A_1 和 BCC_1B_1 都是平行四边形，所以 $S_{\triangle A_1AB}=S_{\triangle A_1B_1B}$，$S_{\triangle B_1BC}=S_{\triangle B_1C_1C}$，

所以 $V_{C\text{-}A_1AB}=V_{C\text{-}A_1B_1B}=V_{A_1\text{-}B_1BC}=V_{A_1\text{-}B_1C_1C}$，

于是 $V_{ABC\text{-}A_1B_1C_1}=V_{C\text{-}A_1AB}+V_{A_1\text{-}B_1BC}+V_{A_1\text{-}B_1C_1C}=3V_{C\text{-}A_1AB}=3\times 1=3$. …… 12分

法二：由(1)，得 $A_1D\perp AB$，

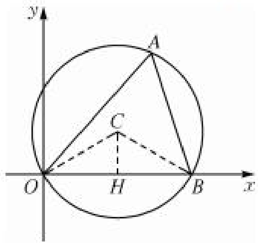
因为平面 $ABC\perp$平面 AA_1B_1B，平面 $ABC\cap$平面 $AA_1B_1B=AB$，$A_1D\subset$平面 AA_1B_1B，

所以 $A_1D\perp$平面 ABC. …… 8分

由$\triangle A_1AB$是边长为2的等边三角形，得 $A_1D=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$. …… 9分

由 $CA=CB=AB=2$，得$\triangle ABC$是等边三角形，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$，…… 10分

于是 $V_{ABC\text{-}A_1B_1C_1}=A_1D\cdot S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$. …… 12分



20. 解：(1)如图，设 OB 的中点为 H，连接 CH，则 $CH\perp OB$. 由正弦定理，得圆 C 的半径为 $R=\frac{1}{2}\times\frac{OB}{\sin\angle OAB}=\frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=2$. …… 2分

由$\angle OAB=60^\circ$，得$\angle OCH=60^\circ$，所以 $|CH|=1$，又 $|OH|=\sqrt{3}$，所以 $C(\sqrt{3},1)$，

所以圆 C 的方程为 $(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=4$. …… 4分

(2)直线 BC 的斜率为 $k_{BC}=\frac{1-0}{\sqrt{3}-2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以圆 C 在点 B 处的切线的斜率为$\sqrt{3}$，

故圆 C 在点 B 处的切线方程为 $y=\sqrt{3}(x-2\sqrt{3})$，即切线方程为$\sqrt{3}x-y-6=0$. …… 6分

(3)①当直线 AB 的斜率存在时，由 $B(2\sqrt{3},0)$，可设直线 AB 的方程为 $y=k(x-2\sqrt{3})$，即 $kx-y-2\sqrt{3}k=0$，

则圆心 C 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{|k\times\sqrt{3}-1-2\sqrt{3}k|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|\sqrt{3}k+1|}{\sqrt{k^2+1}}$，…… 7分

所以 $|AB|=2\sqrt{R^2-d^2}=2\sqrt{4-\frac{(\sqrt{3}k+1)^2}{k^2+1}}=2$，

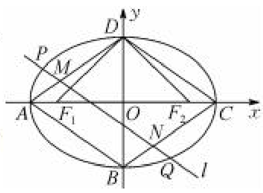
解得 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$. …… 9分

由 A 在 x 轴的上方及(2)，可得 $k<0$ 或 $k>\sqrt{3}$，因此 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$不适合题意，应舍去. …… 10分

②当直线 AB 的斜率不存在时，$AB\perp x$ 轴，此时 O、C、A 三点共线，显然 $|AB|=2$，此时 $A(2\sqrt{3},2)$. …… 11分

综上，存在点 $A(2\sqrt{3},2)$，使得 $|AB|=2$. …… 12分

21. 解：(1)因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以$\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2b=2\sqrt{2}$；　① …… 1分



因为$\triangle DF_1F_2$为等腰三角形，所以$\frac{1}{2}\cdot 2c\cdot b=1$.　② …… 2分

由①②，再结合 $a^2=b^2+c^2$，解得 $a=\sqrt{2}$，$b=c=1$，

故椭圆 E 的方程是$\frac{x^2}{2}+y^2=1$. …… 4分

(2)证明：设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$M(x_3,y_3)$，$N(x_4,y_4)$.

由 $A(-\sqrt{2},0)$，$B(0,-1)$，得直线 AB 的方程为 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x-1$，…… 5分

则可设直线 l 的方程为 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+n(-1<n<1)$，…… 6分

由 $\begin{cases} y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+n(-1<n<1), \\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1, \end{cases}$ 消去 y 并整理，得 $x^2-\sqrt{2}nx+n^2-1=0$，

则 $\Delta=2n^2-4(n^2-1)=4-2n^2>0$，且 $x_1+x_2=\sqrt{2}n$. ……………………………………… 8 分

直线 AD 的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+1$，直线 BC 的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-1$，

由 $\begin{cases} y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+1, \\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+n, \end{cases}$ 解得 $x_3=\dfrac{n-1}{\sqrt{2}}$； ……………………………………… 9 分

由 $\begin{cases} y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-1, \\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+n, \end{cases}$ 解得 $x_4=\dfrac{n+1}{\sqrt{2}}$， ……………………………………… 10 分

于是 $x_3+x_4=\dfrac{n-1}{\sqrt{2}}+\dfrac{n+1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}n$，

所以 $x_1+x_2=x_3+x_4$，即 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{x_3+x_4}{2}$，

从而 PQ 与 MN 的中点重合，所以 $|PM|=|NQ|$. ……………………………………… 12 分

22.（1）解：函数 $f(x)=xe^x-x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$.

由 $f(x)=xe^x-x$，得 $f'(x)=e^x+xe^x-1=(1+x)e^x-1$， ……………………………… 1 分

当 $x>0$ 时，$1+x>1$，$e^x>1$，所以 $(1+x)e^x>1$. 所以 $(1+x)e^x-1>0$，即 $f'(x)>0$； ……………… 2 分

当 $x<0$ 时，$1+x<1$，$0<e^x<1$，所以由 $1+x<1$ 两边同时乘以正数 e^x，得 $(1+x)e^x<e^x<1$，即 $(1+x)e^x<1$. 所以 $(1+x)e^x-1<0$，即 $f'(x)<0$. ……………………………………… 3 分

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,0)$，单调递增区间为 $(0,+\infty)$. ……………………… 4 分

（2）证明："不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立"等价于"不等式 $xe^x-x\geqslant \ln x+1$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立"，等价于"不等式 $xe^x-x-\ln x-1\geqslant 0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立".

令 $F(x)=xe^x-\ln x-x-1(x>0)$，则进一步转化为证明"不等式 $F(x)\geqslant 0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立". …… 5 分

$F'(x)=(x+1)e^x-\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{x+1}{x}\cdot(xe^x-1)$，

令 $G(x)=xe^x-1$，则 $G'(x)=(x+1)e^x(x>0)$.

因为当 $x>0$ 时，$G'(x)=(x+1)e^x>0$，

所以函数 $G(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

所以函数 $G(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上最多有一个零点.

又因为 $G(0)=-1<0$，$G(1)=e-1>0$，所以存在唯一的 $c\in(0,1)$，使得 $G(c)=0$. ……………… 7 分

且当 $x\in(0,c)$ 时，$G(x)<0$；当 $x\in(c,+\infty)$ 时，$G(x)>0$.

即当 $x\in(0,c)$ 时，$F'(x)<0$；当 $x\in(c,+\infty)$ 时，$F'(0)>0$.

所以函数 $F(x)$ 在区间 $(0,c)$ 上单调递减，在区间 $(c,+\infty)$ 上单调递增.

从而 $F(x)\geqslant F(c)=ce^c-\ln c-c-1$. ……………………………………… 9 分

由 $G(c)=0$，得 $ce^c-1=0$，即 $ce^c=1$.

两边取对数得 $\ln c+c=0$， ……………………………………… 10 分

所以 $F(c)=ce^c-\ln c-c-1=(ce^c-1)-(\ln c+c)=0-0=0$. ……………………………… 11 分

所以 $F(x)\geqslant F(c)=0$，即 $F(x)\geqslant 0$.

从而证得不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立. ……………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 ‘’ 专业、专注、有态度 ‘’ 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。