昆明市 2022~2023 学年高二期末质量检测

数学参考答案及评分标准

一、单选题；二、多选题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	C	B	B	A	D	C	ABC	ABC	AD	BC

三、填空题

13．$\sqrt{5}$　　14．-2（写出$[-4,0]$中的任意一个实数即可）　　15．94　　16．$(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$

17．解：（1）由已知得 $2S_n=(n+1)a_n$，所以 $2S_{n+1}=(n+2)a_{n+1}$，

两式相减得 $2a_{n+1}=(n+2)a_{n+1}-(n+1)a_n$，所以 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}$，

故数列 $\{\frac{a_n}{n}\}$ 为常数列，则 $\frac{a_n}{n}=\frac{a_1}{1}=1$，

所以 $a_n=n$．……………………………………5 分

（2）因为 $a_n=n$，所以 $b_n=2^n$，则

$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n=\frac{2\times(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$．……………………10 分

18．解：（1）由正弦定理得 $b^2-c^2=a(a-c)$，即 $a^2+c^2-b^2=ac$，

由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$，

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$．……………………………………6 分

（2）由已知得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}b\times2=\frac{1}{2}ac\sin\frac{\pi}{3}$，即 $b=\frac{\sqrt{3}}{4}ac$，

由（1）知 $b^2=a^2+c^2-ac$，

因此 $\frac{3}{16}a^2c^2=a^2+c^2-ac$，而 $a^2+c^2-ac\geq ac$，则 $\frac{3}{16}a^2c^2\geq ac$，

于是 $ac \geq \frac{16}{3}$，故 $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}ac \geq \frac{4\sqrt{3}}{3}$，当且仅当 $a = c = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时取等号，

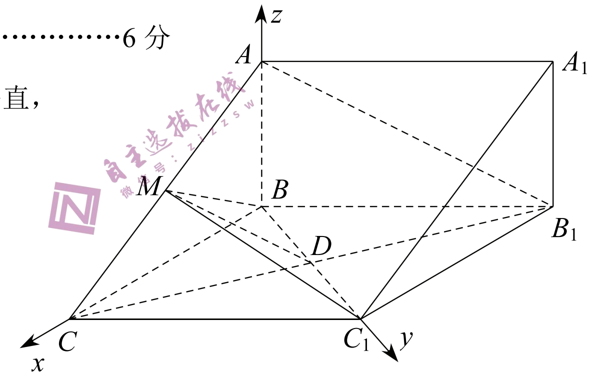
所以 $\triangle ABC$ 面积的最小值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$． ……………………………12 分

19．解：（1）由 $AB \perp$ 平面 BCC_1B_1，得 $AB \perp BC_1$，

又 $AC \perp BC_1$，$AB \cap AC = A$，

所以 $BC_1 \perp$ 平面 ABC，

又 $BC \subset$ 平面 ABC，所以 $BC_1 \perp BC$． ……………6 分



（2）由（1）知 BA，BC，BC_1 两两垂直，

建立空间直角坐标系 $B-xyz$ 如图所示，

不妨设 $BC = 2$，则 $AB = BC_1 = 1$，

可得 $\overrightarrow{BM} = (1, 0, \frac{1}{2})$，$\overrightarrow{BC_1} = (0, 1, 0)$，

设平面 MBC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1 = (x, y, z)$，

由 $\begin{cases} \boldsymbol{n}_1 \cdot \overrightarrow{BM} = 0, \\ \boldsymbol{n}_1 \cdot \overrightarrow{BC_1} = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x + \frac{1}{2}z = 0, \\ y = 0, \end{cases}$ 所以平面 MBC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1 = (1, 0, -2)$，

又 $\overrightarrow{CA} = (-2, 0, 1)$，$\overrightarrow{CC_1} = (-2, 1, 0)$，同理得平面 ACC_1A_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2 = (1, 2, 2)$，

所以 $|\cos\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2 \rangle| = \frac{|\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|} = \frac{|1 + 0 - 4|}{\sqrt{5} \times 3} = \frac{\sqrt{5}}{5}$，

所以，平面 MBC_1 与平面 ACC_1A_1 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$． ……………………12 分

20．解：（1）由题意知 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$，

所以 $f'(1) = 3a + 2b = 0$，$f(1) = a + b + 1 = 0$，所以 $a = 2$，$b = -3$． ………………5 分

（2）由（1）可知，函数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$，所以 $f'(x) = 6x^2 - 6x$，

设切点坐标为 $(x_0, 2x_0^3 - 3x_0^2 + 1)$，

所以切线方程为 $y - (2x_0^3 - 3x_0^2 + 1) = (6x_0^2 - 6x_0)(x - x_0)$，因为切线过点 $(1, m)$，

所以 $m - (2x_0^3 - 3x_0^2 + 1) = (6x_0^2 - 6x_0)(1 - x_0)$，即 $m = -4x_0^3 + 9x_0^2 - 6x_0 + 1$，

令 $h(x) = -4x^3 + 9x^2 - 6x + 1$，则 $h'(x) = -12x^2 + 18x - 6 = -6(2x - 1)(x - 1)$，

令 $h'(x)=0$，解得 $x=\frac{1}{2}$，或 $x=1$.

当 x 变化时，$h'(x)$，$h(x)$ 的变化情况如下表所示，

x	$(-\infty,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	单调递减	$-\frac{1}{4}$	单调递增	0	单调递减

因此，当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$h(x)$ 有极小值 $h(\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$；

当 $x=1$ 时，$h(x)$ 有极大值 $h(1)=0$.

过点 $(1,m)$ 存在 3 条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切，等价于

关于 x 的方程 $m=-4x^3+9x^2-6x+1$ 有三个不同的根，则 $-\frac{1}{4}<m<0$，

所以实数 m 的取值范围是 $(-\frac{1}{4},0)$. ······································12 分

21．解：（1）因为 M 的一条渐近线方程为 $x-2y=0$，设 M：$x^2-4y^2=\lambda$，

因为过点 $(\sqrt{5},\frac{1}{2})$，所以 $\lambda=4$，

故 M 的方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$. ······································4 分

（2）设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$E(0,t)$，由题知 $|EQ|=|EP|=|ET|$，

故 $\sqrt{9+t^2}=\sqrt{{x_1}^2+(y_1-t)^2}=\sqrt{{x_2}^2+(y_2-t)^2}$，又 ${x_1}^2=4+4{y_1}^2$，${x_2}^2=4+4{y_2}^2$

所以 $5{y_1}^2-2ty_1-5=0$，$5{y_2}^2-2ty_2-5=0$.

所以 y_1,y_2 是方程 $5y^2-2ty-5=0$ 的两根，所以 $y_1y_2=-1$，····················8 分

设 l：$x=my+\sqrt{5}$，

联立 $\begin{cases}x=my+\sqrt{5},\\ \frac{x^2}{4}-y^2=1,\end{cases}$ 得 $(m^2-4)y^2+2\sqrt{5}my+1=0$，

$\Delta=16m^2+16>0$ ，所以 $y_1y_2=\dfrac{1}{m^2-4}$，故 $\dfrac{1}{m^2-4}=-1$，所以 $m=\pm\sqrt{3}$，

此时，直线 l 的斜率的绝对值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，大于渐近线斜率的绝对值 $\dfrac{1}{2}$，满足题设，

所以直线 l 的方程为 $x+\sqrt{3}y-\sqrt{5}=0$ 或 $x-\sqrt{3}y-\sqrt{5}=0$.　　　　　　………………12 分

22．解：（1）由题知随机变量 $X_1\sim B(10,p)$，所以 $P(A_1)=\mathrm{C}_{10}^2p^2(1-p)^8$. ………………4 分

（2）设事件 $A=A_1A_2A_3A_4A_5$，由题图可知 $x_1=2$， $x_2=1$， $x_3=1$， $x_4=3$， $x_5=3$，

则 $P(A)=[\mathrm{C}_{10}^2p^2(1-p)^8]\cdot[\mathrm{C}_{10}^1p(1-p)^9]^2\cdot[\mathrm{C}_{10}^3p^3(1-p)^7]^2$，

即 $P(A)=(\mathrm{C}_{10}^1)^2(\mathrm{C}_{10}^2)(\mathrm{C}_{10}^3)^2p^{10}(1-p)^{40}$.　　　……………………………………8 分

设 $g(p)=\ln P(A)=\ln[(\mathrm{C}_{10}^1)^2(\mathrm{C}_{10}^2)(\mathrm{C}_{10}^3)^2]+10\ln p+40\ln(1-p)$， $p\in(0,1)$，

则 $g'(p)=\dfrac{10}{p}-\dfrac{40}{1-p}=\dfrac{10-50p}{p(1-p)}$，

所以当 $0<p<\dfrac{1}{5}$ 时， $g'(p)>0$，所以 $g(p)$ 在 $(0,\dfrac{1}{5})$ 上单调递增；

当 $\dfrac{1}{5}<p<1$ 时， $g'(p)<0$，所以 $g(p)$ 在 $(\dfrac{1}{5},1)$ 上单调递减；

所以当 $p=\dfrac{1}{5}$ 时， $g(p)$ 取得最大值，即 $P(A)$ 取得最大值，

所以 $\dfrac{1}{2}{\theta_0}^2-\dfrac{5}{6}\theta_0+\dfrac{19}{45}=\dfrac{1}{5}$，即 $9{\theta_0}^2-15\theta_0+4=0$，解得 $\theta_0=\dfrac{1}{3}$ 或 $\theta_0=\dfrac{4}{3}$，

因为 $0<\theta_0<1$，所以 $\theta_0=\dfrac{1}{3}$.　　……………………………………12 分