1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

-2,-1,0,1,2,3,4

1. 已知集合 $A=\{x\in \mathbf{Z}|-3<x<5\}$，$B=\{y|y=2x,x\in A\}$，则 $A\cap B$ 的元素个数为 B

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

2. 在$\triangle ABC$中，若 $AB=1$，$AC=5$，$\sin A=\frac{3}{5}$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$

A. 3　　B. ± 3　　C. 4　　D. ± 4

3. 函数 $f(x)=x^3-7x^2+1$ 的图象在点$(4,f(4))$处的切线斜率为

A. -8　　B. -7　　C. -6　　D. -5

4. 跑步是一项有氧运动，通过跑步，我们能提高肌力，同时提高体内的基础代谢水平，加速脂肪的燃烧，养成易瘦体质. 小林最近给自己制定了一个 200 千米的跑步健身计划，他第一天跑了 8 千米，以后每天比前一天多跑 0.5 千米，则他要完成该计划至少需要

A. 16 天　　B. 17 天　　C. 18 天　　D. 19 天

5. 明朝的一个葡萄纹椭圆盘如图(1)所示，清朝的一个青花山水楼阁纹饰椭圆盘如图(2)所示，北宋的一个汝窑椭圆盘如图(3)所示，这三个椭圆盘的外轮廓均为椭圆. 已知图(1)，(2)，(3)中椭圆的长轴长与短轴长的比值分别为$\frac{13}{9}$，$\frac{56}{45}$，$\frac{10}{7}$，设图(1)，(2)，(3)中椭圆的离心率分别为 e_1,e_2,e_3，则

(1)　　(2)　　(3)

A. $e_1>e_3>e_2$　　B. $e_2>e_3>e_1$

C. $e_1>e_2>e_3$　　D. $e_2>e_1>e_3$

6. 已知函数 $f(x)=\lg x-(\frac{1}{2})^x$，$f(m)=1$，且 $0<p<m<n$，则

A. $f(n)<1$ 且 $f(p)>1$　　B. $f(n)>1$ 且 $f(p)>1$

C. $f(n)>1$ 且 $f(p)<1$　　D. $f(n)<1$ 且 $f(p)<1$

7. 下列各项中，是$(\sqrt{xy}-\dfrac{y}{x})^6$的展开式的项为

A. 15　　B. $-20x^2$　　C. $15y^4$　　D. $-20y^2$

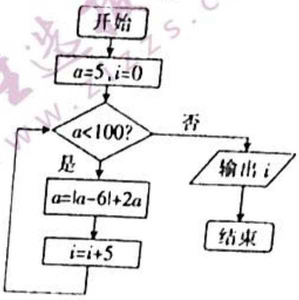
8. 执行如图所示的程序框图，则输出的$i=$

A. 10

B. 15

C. 20

D. 25



9. 已知函数$f(x)=\tan x-\sin x\cos x$，则

A. $f(x)$的最小正周期为2π

B. $f(x)$的图象关于y轴对称

C. $f(x)$的图象不关于$(\dfrac{\pi}{2},0)$对称

D. $f(x)$的图象关于$(\pi,0)$对称

10. 在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，D为侧棱CC_1的中点，从该三棱柱的九条棱中随机选取两条，则这两条棱所在直线至少有一条与直线BD异面的概率是

A. $\dfrac{2}{3}$　　B. $\dfrac{13}{18}$　　C. $\dfrac{7}{9}$　　D. $\dfrac{5}{6}$

11. 已知双曲线C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，$M$为$C$左支上一点，$N$为线段$MF_2$上一点，且$|MN|=|MF_1|$，$P$为线段$NF_1$的中点．若$|F_1F_2|=4|OP|$（$O$为坐标原点），则$C$的渐近线方程为

A. $y=\pm x$　　B. $y=\pm\sqrt{2}x$

C. $y=\pm\sqrt{3}x$　　D. $y=\pm 2x$

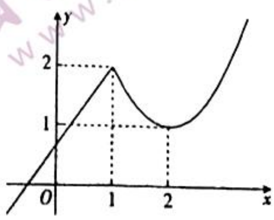
12. 如图，函数$f(x)$的图象由一条射线和抛物线的一部分构成，$f(x)$的零点为$-\dfrac{1}{2}$，若不等式$f(x+a^2)\geqslant f(x)(a\neq 0)$对$x\in\mathbf{R}$恒成立，则$a$的取值范围是

A. $(-\infty,-\dfrac{5\sqrt{3}}{6}]\cup[\dfrac{5\sqrt{3}}{6},+\infty)$

B. $(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty)$

C. $(-\infty,-\dfrac{4\sqrt{3}}{5}]\cup[\dfrac{4\sqrt{3}}{5},+\infty)$

D. $(-\infty,-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}]\cup[\dfrac{2\sqrt{3}}{3},+\infty)$



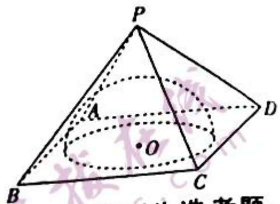
二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．把答案填在答题卡的相应位置．

13. 复数$z=(1-2i)(1-5i)$的实部为__▲__．

14. 若x,y满足约束条件$\begin{cases}x\leqslant 2,\\x+y\leqslant 3,\\3x+2y\geqslant 6,\end{cases}$则$x-y$的最大值为__▲__，$x^2+y^2$的最小值为__▲__．（本题第一空2分，第二空3分）

15. 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$(n^2+1)a_{n+1}=2(n^2-2n+2)a_n$，则$a_n=$__▲__．

16. 如图，正四棱锥 $P-ABCD$ 的每个顶点都在球 M 的球面上，侧面 PAB 是等边三角形. 若半球 O 的球心为四棱锥的底面中心，且半球与四个侧面均相切，则半球 O 的体积与球 M 的体积的比值为 ▲ .



三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤. 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22，23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）

$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c. 已知 $a=\sqrt{3}$，$b=2$.

（1）若 $A=\frac{\pi}{6}$，求 $\cos 2B$；

（2）当 A 取得最大值时，求$\triangle ABC$ 的面积.

18.（12 分）

某社区为丰富居民的业余文化生活，打算在周一到周五连续为该社区居民举行"社区音乐会"，每晚举行一场，但若遇到风雨天气，则暂停举行. 根据气象部门的天气预报得知，在周一到周五这五天的晚上，前三天每天出现风雨天气的概率均为 p_1，后两天每天出现风雨天气的概率均为 p_2，每天晚上是否出现风雨天气相互独立. 已知前两天的晚上均出现风雨天气的概率为 $\frac{1}{4}$，且这五天至少有一天晚上出现风雨天气的概率为 $\frac{199}{200}$.

（1）求该社区能举行 4 场音乐会的概率；

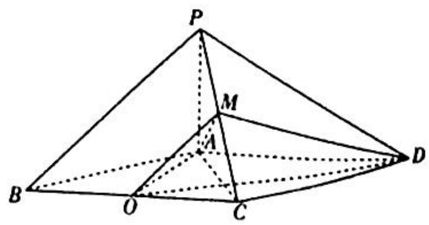
（2）求该社区举行音乐会场数 X 的数学期望.

19.（12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，以 BC 为直径的圆 O（O 为圆心）过点 A，且 $AO=AC=AP=2$，$PA\perp$底面 $ABCD$，M 为 PC 的中点.

（1）证明：平面 $OAM\perp$平面 PCD.

（2）求二面角 $O-MD-C$ 的余弦值.



20.（12 分）

已知 F 为抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的焦点，直线 $l:y=2x+1$ 与 C 交于 A,B 两点，且 $|AF|+|BF|=20$.

(1)求 C 的方程.

(2)若直线 $m:y=2x+t(t\neq 1)$ 与 C 交于 M,N 两点，且 AM 与 BN 相交于点 T，证明：点 T 在定直线上.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=m(x+1)^2-1-2\ln x$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)当 $x\in[1,2]$ 时，$f(x)\leqslant 0$，求 m 的取值范围.

(二)选考题：共 10 分. 请考生从第 22,23 两题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一个题目计分.

22. [选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的方程为 $x=\sqrt{-y^2+2y+3}$.

(1)写出曲线 C 的一个参数方程；

(2)若 $A(1,0),B(-1,0)$，点 P 为曲线 C 上的动点，求 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$ 的取值范围.

23. [选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=|x+a|+|x+b|$.

(1)若 $a=b^2+3b+2$，证明：$\forall x\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R},f(x)\geqslant 1$.

(2)若关于 x 的不等式 $f(x)\leqslant 7$ 的解集为 $[-6,1]$，求 a,b 的一组值，并说明你的理由.

高三数学试卷参考答案(理科)

1. B 【解析】本题考查集合的交集,考查运算求解能力.

因为 $A=\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$,$B=\{-4,-2,0,2,4,6,8\}$,所以 $A\cap B=\{-2,0,2,4\}$.

2. D 【解析】本题考查平面向量的数量积,考查运算求解能力.

在$\triangle ABC$中,因为 $\sin A=\frac{3}{5}$,所以 $\cos A=\pm\frac{4}{5}$,所以$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|\cos A=-4$.

3. A 【解析】本题考查导数的几何意义,考查运算求解能力.

因为 $f'(x)=3x^2-14x$,所以所求切线的斜率为 $f'(4)=3\times16-14\times4=-8$.

4. B 【解析】本题考查等差数列的应用,考查数学建模与逻辑推理的核心素养.

依题意可得,他从第一天开始每天跑步的路程(单位:千米)依次成等差数列,且首项为8,公差为0.5.设经过 n 天后他完成健身计划,则 $8n+\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{1}{2}\geqslant200$,整理得 $n^2+31n-800\geqslant0$.

因为函数 $f(x)=x^2+31x-800$ 在$[1,+\infty)$上为增函数,且 $f(16)<0$,$f(17)>0$,所以 $n\geqslant17$.

5. A 【解析】本题考查椭圆的离心率与中国古代数学文化,考查数据处理能力与推理论证能力.

因为椭圆的离心率 $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-(\frac{2b}{2a})^2}$,所以长轴长与短轴长的比值越大,离心率越大.因为$\frac{13}{9}\approx1.44$,$\frac{56}{45}\approx1.24$,$\frac{10}{7}\approx1.43$,所以 $e_1>e_3>e_2$.

6. C 【解析】本题考查基本初等函数的单调性,考查推理论证能力.

因为 $y=\lg x$ 在$(0,+\infty)$上单调递增,$y=(\frac{1}{2})^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上单调递减,所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.又 $f(m)=1$,且 $0<p<m<n$,所以 $f(n)>1$ 且 $f(p)<1$.

7. C 【解析】本题考查二项式定理,考查运算求解能力与推理论证能力.

$(\sqrt{xy}-\frac{y}{x})^6$ 展开式中的第3项为 $C_6^2(\sqrt{xy})^4(-\frac{y}{x})^2=15y^4$.

8. C 【解析】本题考查程序框图,考查运算求解能力.

$a=1+10=11$,$i=5$;$a=5+22=27$,$i=10$;$a=21+54=75$,$i=15$;$a=69+150>100$,$i=20$.故输出的 $i=20$.

9. D 【解析】本题考查三角函数的对称性与周期,考查逻辑推理的核心素养.

因为 $f(x+\pi)=f(x)$,所以 $f(x)$的最小正周期不是2π.

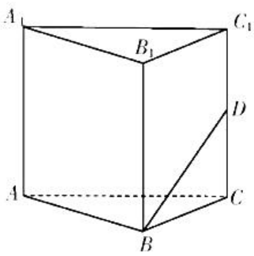
因为 $f(-x)=-f(x)\neq f(x)$,所以 $f(x)$是奇函数,其图象不关于 y 轴对称.

因为 $f(\pi-x)=-\tan x+\sin x\cos x=-f(x)$,所以 $f(x)$的图象关于$(\frac{\pi}{2},0)$对称.

因为 $f(2\pi-x)=-\tan x-\sin x\cos x=-f(x)$,所以 $f(x)$的图象关于$(\pi,0)$对称.

10. B 【解析】本题考查异面直线的判定、排列组合的应用、古典概型,考查直观想象、推理论证的核心素养.

如图,这九条棱中,与 BD 共面的是 BC、BB_1、CC_1、B_1C_1、AB,共五条,故所求概率 $P=1-\frac{C_5^2}{C_9^2}=\frac{13}{18}$.



11. C 【解析】本题考查双曲线的性质与定义的应用,考查数形结合的数学思想.

因为$|F_1F_2|=4|OP|$,所以$|OP|=\frac{c}{2}$,所以$|NF_2|=2|OP|=c$,又$|MF_2|-|MF_1|=|NF_2|=2a$,所以 $c=2a$,所以 $a^2+b^2=4a^2$,则$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$.故 C 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$.

12. A 【解析】本题考查函数与不等式的综合应用,考查化归与转化的数学思想.

由题可知射线经过点$(-\frac{1}{2},0)$,$(1,2)$,则射线的方程为$y=\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}(x\leqslant 1)$.

当$x\geqslant 1$时,设$f(x)=m(x-2)^2+1(m>0)$,因为$f(1)=m+1=2$,所以$m=1$.

令$f(x)=t(1\leqslant t\leqslant 2)$,则该方程的解为$x_1=\frac{3t-2}{4}$,$x_2=2-\sqrt{t-1}$,$x_3=2+\sqrt{t-1}$.

$x_3-x_1=2+\sqrt{t-1}-\frac{3t-2}{4}$,令$\sqrt{t-1}=l(0\leqslant l\leqslant 1)$,

则$x_3-x_1=2+l-\frac{3(l^2+1)-2}{4}=-\frac{3}{4}(l-\frac{2}{3})^2+\frac{25}{12}\leqslant\frac{25}{12}$.

依题意可得$a^2\geqslant\frac{25}{12}$,解得$a\in(-\infty,-\frac{5\sqrt{3}}{6}]\cup[\frac{5\sqrt{3}}{6},+\infty)$.

13. -9 **【解析】本题考查复数的四则运算与实部,考查运算求解能力.**

因为$z=-9-7i$,所以z的实部为-9.

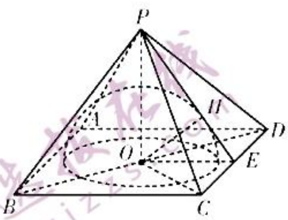
14. 2;$\frac{36}{13}$ **【解析】本题考查线性规划,考查推理论证能力与运算求解能力.**

作出约束条件表示的可行域(图略),由图可知当直线$z=x-y$经过$(2,0)$时,z有最大值2. x^2+y^2表示可行域中的点$P(x,y)$到原点距离的平方. 因为原点到直线$3x+2y-6=0$的距离为$\frac{6}{\sqrt{13}}$,所以x^2+y^2的最小值为$(\frac{6}{\sqrt{13}})^2=\frac{36}{13}$.

15. $\frac{2^n}{n^2-2n+2}$(或$\frac{2^n}{(n-1)^2+1}$) **【解析】本题考查等比数列的定义与通项公式,考查抽象概括能力.**

因为$(n^2+1)a_{n+1}=2[(n-1)^2+1]a_n$,$a_1=2$,所以数列$\{[(n-1)^2+1]a_n\}$是首项为2,公比为2的等比数列,则$[(n-1)^2+1]a_n=2^n$,所以$a_n=\frac{2^n}{(n-1)^2+1}=\frac{2^n}{n^2-2n+2}$.

16. $\frac{\sqrt{3}}{18}$ **【解析】本题考查四棱锥的外接球与内切球,考查空间想象能力与运算求解能力.**



如图,连接PO,BD,取CD的中点E,连接PE,OE,过O作$OH\perp PE$于H.易知$PO\perp$底面$ABCD$.设$AB=4$,则$BD=\sqrt{BA^2+BC^2}=4\sqrt{2}$,$BO=\frac{1}{2}BD=2\sqrt{2}$,$PO=\sqrt{BP^2-BO^2}=2\sqrt{2}$,设球$M$的半径为$R$,半球$O$的半径为$R_0$,则$R=2\sqrt{2}$.易知$R_0=OH$,则$\frac{R_0}{R}=\frac{OH}{PO}=\frac{OE}{PE}=\frac{1}{\sqrt{3}}$,故$\frac{V_{半球O}}{V_{球M}}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{4\pi R_0^3}{3}}{\frac{4\pi R^3}{3}}=\frac{1}{2}(\frac{R_0}{R})^3=\frac{\sqrt{3}}{18}$.

17. 解:(1)由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,得$\frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\sin B}$. …………………… 2分

解得$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{3}$. …………………… 3分

所以$\cos 2B=1-2\sin^2 B=\frac{1}{3}$. …………………… 5分

(2)由余弦定理得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{c^2+1}{4c}$. …………………… 7分

因为$\frac{c^2+1}{4c}\geqslant\frac{2c}{4c}=\frac{1}{2}$, …………………… 8分

当且仅当$c=1$时,等号成立, …………………… 9分

所以 $\cos A \geqslant \frac{1}{2}$，则 $0<A\leqslant\frac{\pi}{3}$，则 A 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$. ………………………………………… 10 分

此时，$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times2\times1\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ………………………………………… 12 分

评分细则：

【1】第(1)问解析第一行未写 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 不扣分，得出 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{3}$，直接写 $\cos 2B=\frac{1}{3}$，没有写倍角公式扣 1 分.

【2】第(2)问中，得到 $0<A\leqslant\frac{\pi}{3}$，但未写 A 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$，不扣分.

18. 解：(1)因为前两天的晚上均为风雨天气的概率为 $\frac{1}{4}$，所以 $p_1^2=\frac{1}{4}$，则 $p_1=\frac{1}{2}$. ………………………… 1 分

因为这五天至少有一天出现风雨天气的概率为 $\frac{199}{200}$，

所以 $1-(1-p_1)^3(1-p_2)^2=\frac{199}{200}$， ………………………………………… 2 分

又 $p_1=\frac{1}{2}$，所以 $p_2=\frac{4}{5}$. ………………………………………… 3 分

设"该社区能举行 4 场音乐会"为事件 A，

则 $P(A)=C_3^1\times\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{2})^2(1-\frac{4}{5})^2+(1-\frac{1}{2})^3C_2^1\times\frac{4}{5}(1-\frac{4}{5})=\frac{11}{200}$. ………………………… 5 分

(2) X 的可能取值为 0，1，2，3，4，5. ………………………………………… 6 分

$P(X=0)=(\frac{1}{2})^3(\frac{4}{5})^2=\frac{2}{25}$. ………………………………………… 7 分

$P(X=1)=C_3^1(\frac{1}{2})^2\times\frac{1}{2}\times(\frac{4}{5})^2+(\frac{1}{2})^3C_2^1\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{7}{25}$， ………………………… 8 分

$P(X=2)=C_3^2\times\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})^2(\frac{4}{5})^2+C_3^1(\frac{1}{2})^2(1-\frac{1}{2})C_2^1\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}+(\frac{1}{2})^3(1-\frac{4}{5})^2=\frac{73}{200}$， ………… 9 分

$P(X=3)=(1-\frac{1}{2})^3(\frac{4}{5})^2+C_3^2(1-\frac{1}{2})^2\times\frac{1}{2}\times C_2^1\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}+C_3^1(\frac{1}{2})^2(1-\frac{1}{2})(1-\frac{4}{5})^2=\frac{43}{200}$， ………

………………………………………………………………………… 10 分

$P(X=4)=\frac{11}{200}$，$P(X=5)=1-\frac{199}{200}=\frac{1}{200}$. ………………………………………… 11 分

所以 $E(X)=1\times\frac{7}{25}+2\times\frac{73}{200}+3\times\frac{43}{200}+4\times\frac{11}{200}+5\times\frac{1}{200}=\frac{19}{10}$. ………………………… 12 分

评分细则：

【1】第(1)问中，只要得到 $p_1=\frac{1}{2}$ 即得 1 分，得到 $p_2=\frac{4}{5}$ 即得 2 分.

【2】第(2)问中，$E(X)$ 的最后结果写为 1.9 不扣分.

19. (1)证明：由题意点 A 为圆 O 上一点，则 $AB\perp AC$. ………………………………………… 1 分

由 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，知 $PA\perp AB$，又 $PA\cap AC=A$，因此 $AB\perp$ 平面 PAC， ………………………… 2 分

则 $AB\perp AM$，又 $AB/\!/CD$，则 $AM\perp CD$. ………………………………………… 3 分

因为 $AC=AP$，M 为 PC 的中点，所以 $AM\perp PC$. ………………………………………… 4 分

又 $CD\cap PC=C$，所以 $AM\perp$ 平面 PCD. ………………………………………… 5 分

因为 $AM\subset$ 平面 OAM，所以平面 $OAM\perp$ 平面 PCD. ………………………………………… 6 分

(2)解：如图，以 A 为原点，$\overrightarrow{AB}$ 的方向为 x 轴的正方向建立空间直角坐标系 $A-xyz$.

则 $C(0,2,0)$，$D(-2\sqrt{3},2,0)$，$M(0,1,1)$，$O(\sqrt{3},1,0)$，

$\overrightarrow{OM}=(-\sqrt{3},0,1)$，$\overrightarrow{OD}=(-3\sqrt{3},1,0)$. ………………………………………… 7 分

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 OMD 的法向量，

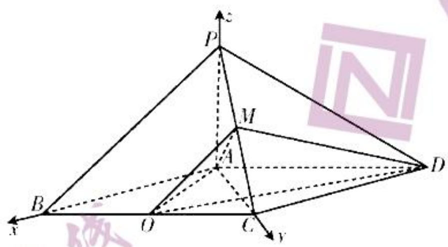
则$\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OM}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OD}=0, \end{cases}$即$\begin{cases} -\sqrt{3}x+z=0, \\ -3\sqrt{3}x+y=0. \end{cases}$ …………………… 8分

令$x=1$,得$\boldsymbol{n}=(1,3\sqrt{3},\sqrt{3})$. …………………… 9分

由(1)可知,$AM\perp$平面PCD,则平面CDM的一个法向量$\boldsymbol{m}=(0,1,1)$, …………………… 10分

所以$\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2\sqrt{186}}{31}$. …………………… 11分

由图可知二面角$O-MD-C$为锐角,故二面角$O-MD-C$的余弦值为$\dfrac{2\sqrt{186}}{31}$. …………………… 12分



评分细则:

【1】第(1)问严格按步骤给分.

【2】第(2)问中,平面OMD的一个法向量只要与$\boldsymbol{n}=(1,3\sqrt{3},\sqrt{3})$共线即可得分.

20.(1)解:设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由$\begin{cases} y=2x+1, \\ x^2=2py, \end{cases}$得$y^2-(8p+2)y+1=0$, …………………… 2分

则$y_1+y_2=8p+2$, …………………… 3分

从而$|AF|+|BF|=y_1+\dfrac{p}{2}+y_2+\dfrac{p}{2}=9p+2=20$, …………………… 5分

解得$p=2$,故C的方程为$x^2=4y$. …………………… 6分

(2)证明:设$M(x_3,y_3)$,$N(x_4,y_4)$,$T(x_0,y_0)$,且设$\overrightarrow{TM}=\lambda\overrightarrow{TA}(\lambda\neq1)$.

因为$AB/\!/MN$,所以$\overrightarrow{TN}=\lambda\overrightarrow{TB}$. …………………… 7分

根据$\begin{cases} x_1^2=4y_1, \\ x_2^2=4y_2, \end{cases}$得$(x_1+x_2)(x_1-x_2)=4(y_1-y_2)$,则$x_1+x_2=\dfrac{4(y_1-y_2)}{(x_1-x_2)}=8$,

同理得$x_3+x_4=8$. …………………… 9分

又$\begin{cases} x_3-x_0=\lambda(x_1-x_0), \\ x_4-x_0=\lambda(x_2-x_0), \end{cases}$两式相加得$x_3+x_4-2x_0=\lambda(x_1+x_2-2x_0)$, …………………… 10分

即$(4-x_0)(1-\lambda)=0$,由于$\lambda\neq1$,所以$x_0=4$. …………………… 11分

故点T在定直线$x=4$上. …………………… 12分

评分细则:

【1】第(1)问还可以通过联立消去y,其步骤及给分如下:

由$\begin{cases} y=2x+1, \\ x^2=2py, \end{cases}$得$x^2-4px-2p=0$, …………………… 1分

则$x_1+x_2=4p$, …………………… 2分

$y_1+y_2=2(x_1+x_2)+2=8p+2$, …………………… 3分

从而$|AF|+|BF|=y_1+\dfrac{p}{2}+y_2+\dfrac{p}{2}=9p+2=20$, …………………… 5分

解得$p=2$,故C的方程为$x^2=4y$. …………………… 6分

【2】第(2)问若用其他方法解答请按照步骤给分.

21.解:(1)$f'(x)=2m(x+1)-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2(mx^2+mx-1)}{x}$,$x>0$. …………………… 1分

①当 $m\leqslant 0$ 时,显然 $f'(x)<0$,此时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. ………………………………………… 2分

②当 $m>0$ 时,令 $f'(x)<0$,得 $0<x<\dfrac{\sqrt{m^2+4m}}{2m}-\dfrac{1}{2}$;令 $f'(x)>0$,$x>\dfrac{\sqrt{m^2+4m}}{2m}-\dfrac{1}{2}$. …………… 3分

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\sqrt{m^2+4m}}{2m}-\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\dfrac{\sqrt{m^2+4m}}{2m}-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增. ………… 4分

(2)由于对一切 $x\in[1,2]$,$f(x)\leqslant 0$ 恒成立,所以 $\forall x\in[1,2]$,$m\leqslant\dfrac{1-2\ln x}{(x+1)^2}$. ……………………………… 5分

构造函数 $F(x)=\dfrac{1-2\ln x}{(x+1)^2}$,$x\in[1,2]$,则 $F'(x)=\dfrac{\frac{2}{x}-4\ln x}{(x+1)^3}$. …………………………………………………… 6分

再令 $g(x)=\dfrac{2}{x}-4\ln x$,$x\in[1,2]$,所以 $g'(x)=-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{4}{x}<0$,$g(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递减. …………… 7分

因为 $g(1)=2>0$,$g(2)=1-4\ln 2<0$,所以存在唯一的 $x_0\in(1,2)$,使 $g(x_0)=0$. ……………………… 8分

且当 $x\in[1,x_0)$ 时,$g(x)>0$;当 $x\in(x_0,2]$ 时,$g(x)<0$,所以 $F(x)$ 在 $[1,x_0)$ 上单调递增,在 $(x_0,2]$ 上单调递减. ………………………………………………………………………………………………… 9分

因为 $5=\ln e^5<\ln 3^5<\ln 2^8=8\ln 2$, ……………………………………………………………………… 10分

所以 $F(2)-F(1)=\dfrac{8\ln 2-5}{36}>0$,则 $F(x)_{\min}=F(1)=\dfrac{1}{4}$. ………………………………………………… 11分

从而 $m\leqslant\dfrac{1}{4}$,即 m 的取值范围是 $\left(-\infty,\dfrac{1}{4}\right]$. ……………………………………………………… 12分

评分细则:

【1】第(1)问中,未写定义域或未说明 $x>0$,但求导正确,不扣分.

【2】第(2)问中,解法二如下:

由于对一切 $x\in[1,2]$,$f(x)\leqslant 0$ 恒成立,所以 $f(1)=4m-1\leqslant 0$,得 $m\leqslant\dfrac{1}{4}$. ……………………………… 6分

下面证明当 $m\leqslant\dfrac{1}{4}$ 时,$f(x)\leqslant 0$ 对一切 $x\in[1,2]$ 恒成立.

要证此结论成立,只需证明当 $m=\dfrac{1}{4}$ 时,$f(x)\leqslant 0$ 对一切 $x\in[1,2]$ 恒成立. ……………………………… 7分

此时 $f(x)=\dfrac{1}{4}(x+1)^2-1-2\ln x$,$f'(x)=\dfrac{x^2+x-4}{2x}$. 令 $f'(x)=0$,得 $x=\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}\in(1,2)$,且 $f(x)$ 在 $\left[1,\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\dfrac{\sqrt{17}-1}{2},2\right]$ 上单调递增. …………………………………………………… 8分

因为 $5=\ln e^5<\ln 3^5<\ln 2^8=8\ln 2$, ………………………………………………………………………… 9分

所以 $f(2)=\dfrac{5}{4}-2\ln 2<0$. ……………………………………………………………………………………… 10分

又 $f(1)=0$,所以当 $m=\dfrac{1}{4}$ 时,结论成立. ……………………………………………………………………… 11分

综上,m 的取值范围是 $\left(-\infty,\dfrac{1}{4}\right]$. ……………………………………………………………………… 12分

22. 解:(1)由 $x=\sqrt{-y^2+2y+3}$,得 $x^2=-y^2+2y+3$, ………………………………………………………… 1分

整理得 $x^2+(y-1)^2=4$. ……………………………………………………………………………………………… 2分

又 $x=\sqrt{-y^2+2y+3}\geqslant 0$, ……………………………………………………………………………………… 3分

所以曲线 C 的一个参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=1+2\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数,且 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$). ………………………… 5分

(2)由(1)可设点 P 的坐标为 $(2\cos\theta,1+2\sin\theta)$,$-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$. ……………………………………… 6分

因为 $\overrightarrow{PA}=(1-2\cos\theta,-1-2\sin\theta)$,$\overrightarrow{PB}=(-1-2\cos\theta,-1-2\sin\theta)$,

所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(1-2\cos\theta)(-1-2\cos\theta)+(-1-2\sin\theta)^2=4+4\sin\theta$. ………………………………… 7 分

又$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=2\cos\theta$,

所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=4+4(\sin\theta+\cos\theta)=4+4\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$. ………………………………… 8 分

因为$-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$,所以$-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\leqslant1$. ………………………………… 9 分

故$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$的取值范围是$[0,4+4\sqrt{2}]$. ………………………………… 10 分

评分细则:

【1】第(1)问中,得到$x^2+(y-1)^2=4$后直接得出曲线C的一个参数方程为$\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=1+2\sin\theta\end{cases}$($\theta$为参数),扣2分.

【2】第(1)问的参数方程不唯一,只要参数方程对应的曲线为圆$x^2+(y-1)^2=4$的右半部分均可得分.

【3】第(2)问中设点P的坐标为$(2\cos\theta,1+2\sin\theta)$,后面没有写明$\theta$的取值范围,扣1分.

23.(1)证明:$f(x)=|x+a|+|x+b|\geqslant|x+a-(x+b)|=|a-b|$. ………………………………… 2 分

因为$a=b^2+3b+2$,所以$|a-b|=|b^2+2b+2|=(b+1)^2+1\geqslant1$. ………………………………… 3 分

当$b=-1$时,$|a-b|$取得最小值1,故$\forall x\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R},f(x)\geqslant1$. ………………………………… 4 分

(2)解:依题意可得$f(-6)=f(1)=7$,

即$|a-6|+|b-6|=|1+a|+|1+b|=7$, ………………………………… 5 分

不妨取$a=0$,则$b=5$. ………………………………… 6 分

下面证明$|x|+|x+5|\leqslant7$的解集为$[-6,1]$.

证明:当$x\leqslant-5$时,$-2x-5\leqslant7$,则$x\geqslant-6$,又$x\leqslant-5$,所以$-6\leqslant x\leqslant-5$. ………………………………… 7 分

当$-5<x<0$时,$5\leqslant7$显然成立,所以$-5<x<0$. ………………………………… 8 分

当$x\geqslant0$时,$2x+5\leqslant7$,则$x\leqslant1$,又$x\geqslant0$,所以$0\leqslant x\leqslant1$. ………………………………… 9 分

所以$|x|+|x+5|\leqslant7$的解集为$[-6,1]$,故a,b的一组值为$0,5$. ………………………………… 10 分

评分细则:

【1】第(1)问中,未写$b=-1$不扣分.

【2】第(2)问中,a,b的一组值不唯一,但$a+b=5$,且$a,b\in[-1,6]$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》