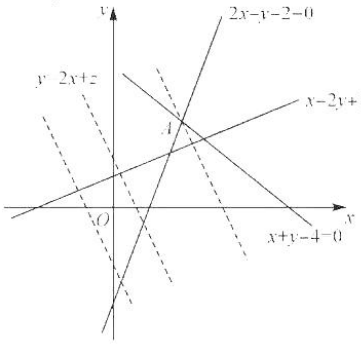
江西省吉安市重点中学六校协作体2023届五月联合考试·高三理科数学
参考答案、提示及评分细则

1. C　∵$M=[1,5)$，$N=(3,+\infty)$，∴$M\cap N=(3,5)$. 故选 C.

2. D　$2+z=\frac{2\text{i}}{1+\text{i}}=1+\text{i}\Rightarrow z=-1+\text{i}$，则 $\bar{z}=-1-\text{i}$. 故选 D.

3. B　∵$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，∴$m=-\frac{3}{4}$，$n=\frac{1}{4}$，∴$m+n=-\frac{1}{2}$. 故选 B.

4. C　$V_{半球}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 2^3=\frac{16}{3}\pi$，$S_{柱}=\pi\cdot 2^2=4\pi$，故水面高度 $h=\frac{V_{半球}}{S_{柱}}=\frac{\frac{16}{3}\pi}{4\pi}=\frac{4}{3}$. 故选 C.

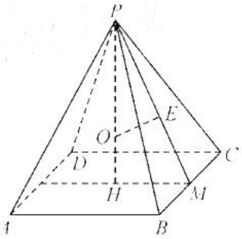


5. A　根据画图可知，当 $y=-2x+z$ 经过点 A 时 z 值最小，最小值为 $z=2\times 2+2=6$. 故选 A.

6. B　根据题意可得 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n(n\in\mathbf{N}^*)$，$a_3=\frac{1}{8}$，故 A 正确；$\frac{a_5}{a_2}=q^3=\frac{1}{8}$，故 B 错误；$a_3=\frac{1}{8}$，$a_4=\frac{1}{16}$，则 $a_3-a_4=\frac{1}{16}$，故 C 正确；$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^5}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{31}{32}$，故 D 正确. 故选 B.

7. B　$\frac{C_5^m\cdot C_4^{4-m}}{C_9^4}=\frac{10}{21}\Rightarrow C_5^m\cdot C_4^m=60$，$m$ 可取值为 0，1，2，3，4，检验得 $m=2$. 故选 B.

8. B　由 $f\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)=f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 可知：$f(x)$ 关于 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称，故 $\omega\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$\omega=4k+\frac{2}{3}$，$k=0$ 时，ω 取最小值为 $\frac{2}{3}$. 故选 B.



9. C　设球心为 O，O 在平面 $ABCD$ 内的射影为 H，M 为 BC 中点，$OH\perp PM$ 于 E，半径为 r，$AB=\frac{5}{2}r=x$，$PH=h$，则 $\triangle POE\backsim\triangle PMH\to\frac{r}{\frac{5}{4}r}=\frac{h-r}{\sqrt{h^2+\left(\frac{5}{4}r\right)^2}}\to\frac{h}{r}=\frac{50}{9}$，

$\tan\angle PAH=\frac{h}{AH}=\frac{2\sqrt{2}}{5}\cdot\frac{h}{r}=\frac{20\sqrt{2}}{9}$. 故选 C.

10. D　设 $l: x=ny-1$ 代入 $y^2=2px=2p(ny-1)\Rightarrow y^2-2pny+2p=0$　①，故 $\Delta=(2pn)^2-4\cdot 2p=0\Rightarrow p=\frac{2}{n^2}$ 代入①式得 $\left(y-\frac{2}{n}\right)^2=0$，∴$y=\frac{2}{n}=p$ 与 $p=\frac{2}{n^2}$ 得 $n=1$，$p=2$，得 $Q(1,2)$，$k_{QA}+k_{QB}=\frac{y_A-2}{x_A-1}+\frac{y_B-2}{x_B-1}=\frac{y_A-2}{\frac{y_A^2}{4}-1}+\frac{y_B-2}{\frac{y_B^2}{4}-1}=\frac{4}{y_A+2}+\frac{4}{y_B+2}=\frac{4(y_A+y_B+4)}{y_Ay_B+2(y_A+y_B)+4}=\frac{4(y_A+y_B+4)}{4+2(y_A+y_B)+4}=2$. 故选 D.

11. A　由 $\ln(1+0.1)<0.1$ 知：$b<a$，又 $c=\frac{2}{21}<\frac{2}{20}=0.1=a$，以下比较 b，c 大小，$c=\frac{2}{21}=\frac{0.2}{2.1}=\frac{2\times 0.1}{2+0.1}$，构造：$f(x)=\ln(1+x)-\frac{2x}{2+x}$，则 $f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{4}{(2+x)^2}=\frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2}>0$，故 $f(x)$ 为增函数，$f(0.1)>f(0)\to\ln 1.1>\frac{2}{21}$，故 $b>c$，故选 A.

12. D　由 $f(3-x)=f(1+x)$ 得 $f(x)$ 关于 $x=2$ 对称，故 $g\left(x+\frac{1}{2}\right)-1=f(2x)$ 关于 $x=1$ 对称，故 $g(x)$ 关于 $x=\frac{3}{2}$ 对称，由 $g(2-x)+g(x)=2$ 得 $g(x)$ 关于点 $(1,1)$ 中心对称，故 $g(x)$ 的周期为 2，B 正确；$f(2x)=g\left(x+\frac{1}{2}\right)-1$ 的周期为 2，故 $f(x)$ 的周期为 4，故 $x=2+4$ 是 $f(x)$ 的一条对称轴，A 正确；C：$f(2x)=g\left(x+\frac{1}{2}\right)-1$ 的对称中心 $\left(\frac{1}{2},0\right)$，故 $f(x)$ 的对称中心为 $(1,0)$ 与之关于 $x=2$ 对称的点为 $(3,0)$ 是 $f(x)$ 的

对称中心，故 C 正确；D：对 $k\in\mathbf{Z}$，$f(4k)+f(4k+1)+f(4k+2)+f(4k+3)=f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$，其中 $f(0)+f(2)=0$，$f(1)+f(3)=0$，故 $f(4k)+f(4k+1)+f(4k+2)+f(4k+3)=0$，$[f(4)+f(5)+f(6)+f(7)]+\cdots+[f(2020)+f(2021)+f(2022)+f(2023)]=0$，对 $f(3)=0$，$f(2)=f(0)>0$，故 n 最小值为 3，D 错误，故选 D。

13\. 32 $\left(2+\frac{1}{x}\right)^2(2x-1)^3=\frac{(4x^2-1)^2(2x-1)}{x^2}$，$x^3$ 项的系数即分子展开式中 x^5 项的系数，x^5 项：$C_2^0\cdot(4x^2)^2\cdot2x$，系数为 32.

14\. $2\sqrt{3}$ $a+b\geqslant\frac{3}{a}+\frac{3}{b}\Rightarrow(a+b)^2\geqslant\left(\frac{3}{a}+\frac{3}{b}\right)(a+b)=6+\frac{3b}{a}+\frac{3a}{b}\geqslant12$，$a+b\geqslant2\sqrt{3}$，当且仅当 $a=b=\sqrt{3}$ 时取等号.

15\. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 由 $a^2+ab=b^2(3\cos^2B-\sin^2B)$ 得 $a^2+ab=b^2(4\cos^2B-1)$，又∵ $c=2b\cos B$，

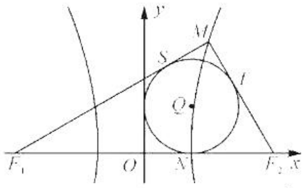
$\therefore\cos^2B=\frac{c^2}{4b^2}$，$\therefore a^2+ab=b^2\left(\frac{c^2}{b^2}-1\right)$，

$\therefore a^2+ab=c^2-b^2$，$\therefore a^2+b^2-c^2=-ab$，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{2}$，$C\in(0,\pi)$，

$\therefore C=\frac{2\pi}{3}$，又∵ $c=2b\cos B$，$\therefore\sin C=2\sin B\cos B=\sin 2B$，

$\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin 2B$，$2B\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$，$\therefore B=\frac{\pi}{6}$，$A=\frac{\pi}{6}$，$\therefore a=b=1$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.



16\. $\sqrt{3}+1$ 内切圆 Q 分别与 F_1M，F_2M，F_1F_2 切于点 S，T，N，则四边形 $QSMT$ 为正方形，故 $|F_1M|+|F_2M|-|F_1F_2|=2a$，$|F_1M|-|F_2M|=2a$，$|F_1M|=c+2a$，$\therefore(c+2a)^2+c^2=(2c)^2\Rightarrow c^2=2a^2+2ac$，$e=\sqrt{3}+1$.

17\. 解：(1)根据题意可得 $a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)+4(n-1)=4n-2$. …………………………………… 3 分

则 $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=(4n-6)+(4n-10)+\cdots+2+\left(-\frac{1}{2}\right)=$

$2(n-1)^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(2n-1)(2n-3)$；…………………………………… 6 分

(2)∵ $\frac{1}{a_n}=\frac{2}{(2n-1)(2n-3)}=\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}$. …………………………………… 9 分

$\therefore S_{2023}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2023}}=\frac{1}{-1}-\frac{1}{1}+\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4043}-\frac{1}{4045}=-\frac{4046}{4045}$. ………………… 12 分

18\. 解：(1)因为 $K^2=\frac{200\times(70\times60-30\times40)^2}{100\times100\times110\times90}=\frac{200}{11}\approx18.182>6.635$，…………………… 3 分

所以有 99% 的把握认为保护动物意识的强弱与性别有关，此推断犯错误的概率不大于 0.010；……… 4 分

(2)由题意可知：在女性的市民中抽到 1 人“保护动物意识强”的概率为 $\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$，

所以 $X\sim B\left(3,\frac{2}{5}\right)$，$X$ 的所有可能取值为 0，1，2，3，…………………………………… 5 分

$P(X=0)=C_3^0\times\left(1-\frac{2}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$，…………………………………… 6 分

$P(X=1)=C_3^1\times\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{2}{5}\right)^2=\frac{54}{125}$，…………………………………… 7 分

$P(X=2)=C_3^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{36}{125}$，…………………………………… 8 分

$P(X=3)=C_3^3\times\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125}$，…………………………………… 9 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

…………………………………………………………………………………………………… 11 分

$E(X)=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$. …………………………………………………… 12分

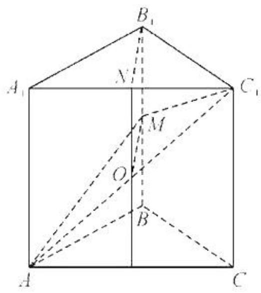
19. 解:(1)作 $B_1N\perp A_1C_1$ 于 N,则 $B_1N\perp$ 平面 ACC_1A_1.

作 $MO\perp AC_1$ 于 O,则 $MO\perp$ 平面 ACC_1A_1,故 $B_1N/\!/MO$. …………………… 2分

$BB_1/\!/$平面 $ACC_1A_1\Rightarrow BB_1/\!/NO$,故四边形 $MONB_1$ 为平行四边形,

故 $NO/\!/AA_1$ 且 $NO=B_1M=\frac{1}{2}AA_1$,故 O 为 AC_1 中点,$MA=MC_1$. ……… 4分

设 $AB=BC=x$,则 $\cos 120^\circ=\frac{x^2+4+x^2+4-(2x^2+16)}{2(x^2+4)}\Rightarrow x=2$; …………… 6分



(2)以 B 为原点,$\overrightarrow{BA}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{BB_1}$ 方向分别为 x,y,z 轴的正方向,建立空间直角坐标系 $O-xyz$. …………………………………………………… 8分

则 $A(2,0,0)$,$M(0,0,2)$,$C_1(0,2,4)$.

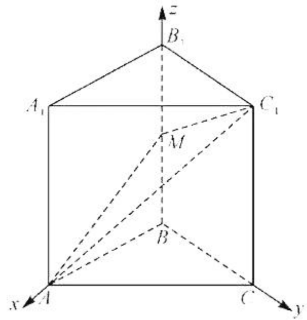
平面 ABC 的法向量为$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,4)$.

设平面 AMC_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AM}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x+2z=0,\\ -2x+2y+4z=0,\end{cases}$ ……………………………… 10分

取 $x=1$,则 $\boldsymbol{m}=(1,-1,1)$.

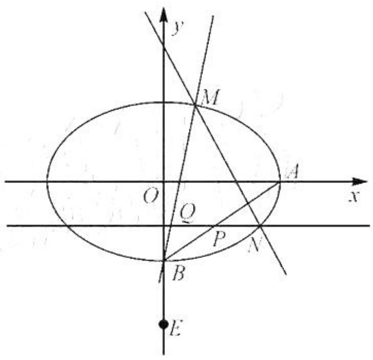
$\cos\langle\overrightarrow{BB_1},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BB_1}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{BB_1}|}=\frac{0\times1+0\times(-1)+4\times1}{\sqrt{3}\times4}=\frac{4}{4\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. … 12分



20. 解:(1)由$\begin{cases}a^2+b^2=5,\\ \frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=1\end{cases}$或$\begin{cases}a^2=\frac{5}{4},\\ b^2=\frac{15}{4}.\end{cases}$ ………………………… 2分

由 $a>b>0$ 可知 $\begin{cases}a^2=\frac{5}{4},\\ b^2=\frac{15}{4}\end{cases}$ 不合题意,故$\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=1\end{cases}$

故椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$; ………………………………………… 4分



(2)设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,$Q(x_0,y_2)$,MN 直线方程为 $y=kx+t$,

由 $k_{BM}=k_{BQ}\Rightarrow\frac{y_1+1}{x_1}=\frac{y_2+1}{x_0}\Rightarrow x_0=\frac{x_1(y_2+1)}{y_1+1}$, …………………… 6分

设 NQ 的中点为 P,$P(x',y')$,

则 $x'=\frac{x_0+x_2}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{x_1(y_2+1)}{y_1+1}+x_2\right]=\frac{2kx_1x_2+(t+1)(x_1+x_2)}{2(kx_1+t+1)}$,$y'=y_2=kx_2+t$,

将(x',y')代入直线 AB 方程:$x-2y-2=0$,

整理得$(2k-4k^2)x_1x_2-(t+1)(1-4k)(x_1+x_2)-4(t+1)^2=0(*)$.

将 $y=kx+t$ 代入$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 整理得$(1+4k^2)x^2+8ktx+4t^2-4=0$. ………………………………… 8分

$\therefore x_1x_2=\frac{4t^2-4}{1+4k^2}$,$x_1+x_2=\frac{-8kt}{1+4k^2}$,代入$(*)$式整理得$(2k-4k^2)(4t-4)+(1-4k)(-8kt)-4(t+1)(1+4k^2)=0\Rightarrow t=-2k-1$. ………………………………………………………………… 10分

故直线 l 方程为 $y=kx-2k-1$,恒过定点 $S(2,-1)$.

作 $ET\perp l$ 于 T,$|ET|\leqslant|ES|=\sqrt{5}$,当且仅当 l 斜率为 -2 时取等号. $\therefore d$ 的最大值为$\sqrt{5}$. ………… 12分

21. (1)解:令 $f'(x)=e^x-a\sin x=0\Rightarrow a=\frac{e^x}{\sin x}=g(x)$, ……………………………………… 1分

$g'(x)=\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{\sin^2 x}$,在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上,$g'(x)<0$,$g(x)$为减函数,值域为$(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}},+\infty)$. …………… 2分

在$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$上,$g'(x)>0$,$g(x)$为增函数,值域为$(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}},e^{\frac{\pi}{2}})$. ……………………………… 3分

故当$\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}<a<e^{\frac{\pi}{2}}$时,$a=\frac{e^x}{\sin x}$有两解,即原函数有两个极值点; ……………………………… 4分

(2)证明:构造函数 $h(x)=e^x-\left(\frac{x^2}{2}+x+1\right)(x>0)$,则 $h'(x)=e^x-x-1$,令 $H(x)=h'(x)$,

由 $H'(x)=e^x-1>0\Rightarrow h'(x)$ 为增函数，故 $h'(x)>h'(0)=0$，

∴当 $x>0$ 时，$h(x)$ 为增函数，$h(x)>h(0)=0$，当 $x>0$ 时，$e^x>\frac{x^2}{2}+x+1$， ………………………… 6 分

故在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上，$e^x+a\cos x>\frac{x^2}{2}+x+1+\cos x$，只须证：$\frac{x^2}{2}+x+1+\cos x>2+x$，

即证：$\cos x-1+\frac{x^2}{2}>0$，令 $p(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$，则 $p'(x)=-\sin x+x$，令 $m(x)=p'(x)$，

$m'(x)=1-\cos x>0$，故 $p'(x)$ 为增函数，$p'(x)>p'(0)=0\Rightarrow p(x)$ 为增函数，$p(x)>p(0)=0$，

即 $\cos x-1+\frac{x^2}{2}>0$， ……………………………………………………………………… 8 分

在 $\left(\frac{\pi}{2},+\infty\right)$ 上，$e^x+a\cos x\geqslant e^x-a\geqslant e^x-e^{\frac{\pi}{2}}+2+\frac{\pi}{2}$，

故只须证：$e^x-e^{\frac{\pi}{2}}+2+\frac{\pi}{2}>2+x$，即证：$e^x-x-e^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}>0$， ………………………… 10 分

令 $g(x)=e^x-x-e^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}$，$g'(x)=e^x-1>0$，

故 $g(x)>g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，故原不等式得证。 ……………………………………………… 12 分

22. 解：(1)∵曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=1+\sin t,\end{cases}$ $\sin t=y-1$，$\cos^2 t+\sin^2 t=1$，

∴$x^2+(y-1)^2=1$， ………………………………………………………………………… 3 分

由 $\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)+2m=0$，可得 $\rho\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)+2m=0$，

$\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y+2m=0$，$\sqrt{3}x+y+4m=0$， ……………………………………………… 5 分

故曲线 C 的普通方程为 $(x-1)^2+y^2=1$，直线 l 的直角坐标方程为 $\sqrt{3}x+y+4m=0$； ………… 6 分

(2)由①得：曲线 C 是以 $(0,1)$ 为圆心，1 为半径的圆，

曲线 C 与直线 l 无公共点，则圆心到直线 l 的距离大于半径，

则 $d=\frac{|1+4m|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}>1$，$|1+4m|>2$， ……………………………………………… 8 分

解得 $m>\frac{1}{4}$ 或 $m<-\frac{3}{4}$，故 m 的取值范围为 $\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$。 ………………… 10 分

23. 解：(1)由已知可得 $f(x)=\begin{cases}4,x\geqslant 1,\\ 2x+2,-3<x<1,\\ -4,x\leqslant -3,\end{cases}$ ……………………………………… 2 分

当 $x\leqslant -3$ 时，$-4\leqslant 1$ 成立，

当 $-3<x<1$ 时，$2x+2\leqslant 1$，即 $x\leqslant -\frac{1}{2}$， ……………………………………………… 4 分

综上所述，$f(x)\leqslant 1$ 的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x\leqslant -\frac{1}{2}\right\}$； ……………………………………… 5 分

(2)由(1)得 $f(x)$ 的最大值为 4，∴$n=4$， ………………………………………………… 6 分

∴$a+2b=4ab$，变形得 $\frac{1}{4b}+\frac{1}{2a}=1$， ……………………………………………………… 7 分

∵$a>0$，$b>0$，

∴$a+2b=(a+2b)\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{4b}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{a}{4b}+\frac{b}{a}\geqslant 1+2\sqrt{\frac{a}{4b}\times\frac{b}{a}}=2$ $\left(当且仅当 \frac{a}{4b}=\frac{b}{a}，即 a=2b，b=\frac{1}{2}，a=1 时取“=”号\right)$，

∴$a+2b$ 的最小值为 2。 ………………………………………………………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。