

绝密★启用前

厦门外国语学校 2023 届高三上期末学科限时训练 数学试题

本试卷分选择题和非选择题两部分，共 4 页，满分为 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：1. 答卷前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和准考证号填写在答题卡相应的位置上，用 2B 铅笔将自己的准考证号填涂在答题卡上。
2. 选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案；在试卷上做答无效。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔在答题卡上作答，答案必须写在答题卡上各题目指定区域内的相应位置上，超出指定区域的答案无效；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用涂改液。不按以上要求

一、单项选择题：本题共 8 小题，共 40 分

1. 已知集合 $A = \{x | x > -7\}$, $B = \{x | (x+8)(x-3) < 0\}$, 则 $A \cup B =$ ()
A. $\{x | x > -7\}$ B. $\{x | -7 < x < 3\}$ C. $\{x | x > -8\}$ D. $\{x | -7 < x < 8\}$
2. 已知复数 $z = (a-2i)(1+3i)$ ($a \in R$) 的实部与虚部的和为 12, 则 $|z-5| =$ ()
A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
3. 已知角 $\alpha + \frac{9}{4}\pi$ 的终边经过点 $(-2, 6)$, 则 $3\sin^2 \alpha - \sin(\pi + \alpha)\cos \alpha =$ ()
A. -2 B. $\frac{14}{5}$ C. 3 D. 9
4. 长郡中学体育节中，羽毛球单打 12 强中有 3 个种子选手，将这 12 人任意分成 3 个组（每组 4 个人），则 3 个种子选手恰好被分在同一组的概率为 ()
A. $\frac{3}{55}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$
5. 已知函数 $f(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + 1$, 若 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上的值域是 $\left[1, \frac{5}{2}\right]$, 则实数 a 的取值范围为 ()
A. $\left(0, \frac{4}{3}\pi\right]$ B. $\left[\frac{2}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\right]$ C. $\left[\frac{2}{3}\pi, +\infty\right)$ D. $\left[\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right]$
6. 南宋数学家在《详解九章算法》和《算法通变本末》中提出了一些新的垛积公式，所讨论的高阶等差数列与一般等差数列不同，高阶等差数列中前后两项之差并不相等，但是逐项差数之差或者高次差成等差数列。现有高阶等差数列，其前 7 项分别为 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 则该数列的第 50 项为 ()
A. 1224 B. 1225 C. 1226 D. 1227
7. 已知定义在 R 上的可导函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 满足 $f'(x) < f(x)$ 且 $f(x+3)$ 为偶函数, $f(x+1)$ 为奇函数, 若 $f(9) + f(8) = 1$, 则不等式 $f(x) > e^x$ 的解集为 ()
A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(6, +\infty)$

8. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0)$ 和 $F_2(c, 0)$, $M\left(x_1, \frac{\sqrt{2}b}{c}\right)$ 为 C

上一点, 且 $\triangle MF_1F_2$ 的内心为 $I(x_2, 1)$, 则椭圆 C 的离心率为 ()

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 共 20 分

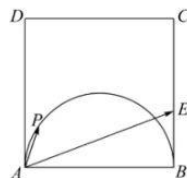
9. 给出下列说法, 其中正确的是 ()

- A. 若数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的方差 S^2 为 0, 则此组数据的众数唯一
B. 已知一组数据 2, 3, 5, 7, 8, 9, 9, 11, 则该组数据的第 40 百分位数为 6
C. 一组样本数据的频率分布直方图是单峰的且形状是对称的, 则该组数据的平均数和中位数近似相等
D. 经验回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 恒过样本点的中心 $(\bar{x}, \bar{y})$, 且在回归直线上的样本点越多, 拟合效果一定越好

10. 正方形 $ABCD$ 的边长为 2, E 是 BC 中点, 如图, 点 P 是以 AB 为直径的半圆上任意点, $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AD} + \mu \overrightarrow{AE}$,

则 ()

- A. λ 最大值为 $\frac{1}{2}$ B. μ 最大值为 1
C. $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AD}$ 最大值是 2 D. $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AE}$ 最大值是 $\sqrt{5} + 2$



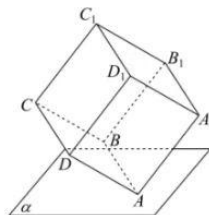
11. 已知函数 $f(x) = ax^3 - 3ax^2 + b$, 其中实数 $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $f(x)$ 必有两个极值点
B. $y = f(x)$ 有且仅有 3 个零点时, b 的范围是 $(0, 4a)$
C. 当 $b = 2a$ 时, 点 $(\frac{1}{2}, 0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称中心
D. 当 $5a < b < 6a$ 时, 过点 $A(2, a)$ 可以作曲线 $y = f(x)$ 的 3 条切线

12. 如图, 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 顶点 A 在平面 α 内, 其余顶点在 α 的同侧, 顶

点 A_1, B, C 到 α 的距离分别为 $\sqrt{6}, 1, 2$, 则 ()

- A. $BC \parallel$ 平面 α B. 平面 $A_1AC \perp$ 平面 α
C. 直线 AB_1 与 α 所成角比直线 AA_1 与 α 所成角小 D. 正方体的棱长为 $2\sqrt{2}$



三、填空题: 本题共 4 小题, 共 20 分

13. 在 $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中, 只有第 5 项的二项式系数最大, 则展开式中含 x^2 项的系数为_____.

14. 已知抛物线 $C_1: y^2 = 8x$, 圆 $C_2: x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$, 点 $M(3, 1)$, 若 A, B 分别是 C_1, C_2 上的动

点, 则 $|AM| + |AB|$ 的最小值为_____.

15. 已知函数 $f(x) = x(e^x + 1)$, $g(x) = (x+1)\ln x$, 若 $f(x_1) = g(x_2) = m (m > 1)$, 则 $\frac{x_1 + x_1 x_2}{\ln m}$ 的最小值为_____.

16. 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AD=9$, $AA_1=10$, 过点 A 且与直线 CD 平行的平面 α 将长方体分成两部分, 且分别与棱 DD_1 , CC_1 交于点 H , M .

(1) 若 $DH=DC=9$, 则三棱柱 $ADH-BCM$ 外接球的表面积为_____;

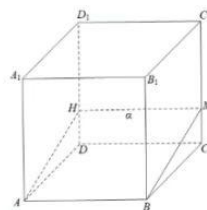
(2) 现同时将两个球分别放入被平面 α 分成的两部分几何体内. 在平面 α 变化过程中, 这两个球半径之和的最大值为_____.

四. 解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分

17. T_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积, 且 $\frac{2}{a_n} + \frac{1}{T_n} = 1$.

(1) 证明: 数列 $\{T_n + 1\}$ 是等比数列;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.



18. 记锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\frac{\sin(A-B)}{\cos B} = \frac{\sin(A-C)}{\cos C}$.

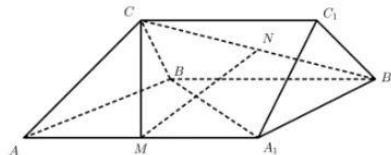
(1) 求证: $B = C$;

(2) 若 $a \sin C = 2$, 求 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 的最大值.

19. 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 底面 ABC 是等边三角形, 侧面 BCC_1B_1 是矩形, $AB=A_1B$, N 是 B_1C 的中点, M 是棱 AA_1 上的中点, 且 $AA_1 \perp CM$.

(1) 证明: $MN \parallel$ 平面 ABC ;

(2) 若 $AB \perp A_1B$, 求二面角 $A-CM-N$ 的余弦值.



20. 冬奥会的成功举办极大鼓舞了人们体育强国的热情,掀起了青少年锻炼身体的热潮.某校为了解全校学生“体能达标”的情况,从高三年级 1000 名学生中随机选出 40 名学生参加“体能达标”测试,并且规定“体能达标”预测成绩小于 60 分的为“不合格”,否则为合格.若高三年级“不合格”的人数不超过总人数的 5%,则该年级体能达标为“合格”;否则该年级体能达标为“不合格”,需要重新对高三年级学生加强训练.现将这 40 名学生随机分成甲、乙两个组,其中甲组有 24 名学生,乙组有 16 名学生.经过预测后,两组各自将预测成绩统计分析如下:甲组的平均成绩为 70,标准差为 4;乙组的平均成绩为 80,标准差为 6.(数据的最后结果都精确到整数)

(1) 求这 40 名学生测试成绩的平均分 $\bar{x}$ 和标准差 s ;

(2) 假设高三学生 体能达标预测成绩服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 用样本平均数 $\bar{x}$ 作为 μ 的估计值 $\bar{\mu}$,

用样本标准差 s 作为 σ 的估计值 $\bar{\sigma}$.利用估计值估计,高三学生体能达标预测是否“合格”;

(3) 为增强趣味性,在体能达标的跳绳测试项目中,同学们可以向体育特长班的强手发起挑战.每场挑战赛都采取七局四胜制.积分规则如下:以 4:0 或 4:1 获胜队员积 4 分,落败队员积 0 分;以 4:2 或 4:3 获胜队员积 3 分,落败队员积 1 分.假设体育生王强每局比赛获胜的概率均为 $\frac{2}{3}$,求王强在这轮比赛中所得积分为 3 分的条件下,他前 3 局比赛都获胜的概率.

附:若随机变量 $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < Z < \mu + \sigma) = 0.6826$, $P(\mu - 2\sigma < Z < \mu + 2\sigma) = 0.9544$,

$P(\mu - 3\sigma < Z < \mu + 3\sigma) = 0.9974$.

21. 抛物线 $C_1: x^2 = 4y$, 双曲线 $C_2: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ 且离心率 $e = \sqrt{5}$, 过曲线 C_2 下支上的一点 $M(\frac{3}{4}, m)$ 作 C_1 的切线, 其斜率为 $-\frac{1}{2}$.

(1) 求 C_2 的标准方程;

(2) 直线 l 与 C_2 交于不同的两点 P, Q , 以 PQ 为直径的圆过点 $N(0, \frac{1}{2})$, 过点 N 作直线 l 的垂线, 垂足为 H , 则平面内是否存在定点 D , 使得 DH 为定值, 若存在, 求出定值和定点 D 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

22. 已知函数 $f(x) = (x^2 - x - b)e^x$

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 > x_2)$, 且 $\frac{f(x_2)}{f(x_1)} \geq \frac{3}{e}$, 求 b 的取值范围

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线