

试卷类型: A

高二数学

2021.7

本试卷共4页, 满分150分, 考试时间120分钟。

注意事项:

1. 答题前, 考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束, 考生必须将试题卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题: 本大题共8小题, 每小题5分, 共40分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. $C_6^2 + C_6^3 =$

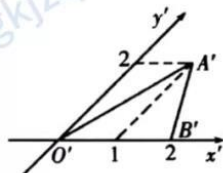
- A. 25 B. 35 C. 70 D. 90

2. 某校共有学生2500人, 为了解学生的身高情况, 用分层抽样的方法从三个年级中抽取容量为50的样本, 其中高一抽取14人, 高二抽取16人, 则该校高三学生人数为

- A. 600 B. 800 C. 1000 D. 1200

3. $\triangle AOB$ 的斜二测直观图 $\triangle A'O'B'$ 如图所示, 则 $\triangle AOB$ 的面积是

- A. $\sqrt{2}$
B. 2
C. $2\sqrt{2}$
D. 4



4. 我国古典乐器一般按“八音”分为“金, 石, 木, 革, 丝, 土, 匏(páo), 竹”, 其中“金, 石, 木, 革”为打击乐器, “丝”为弹拨乐器, “土, 匏, 竹”为吹奏乐器, 现从“金, 石, 土, 竹, 丝”中任取两种乐器, 则至少有一种为吹奏乐器的取法种数为

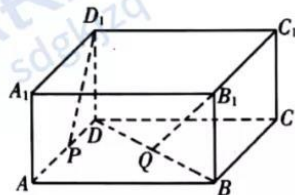
- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

5. 若一个底面半径为1的圆锥侧面展开图是一个顶角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的扇形, 则该圆锥的体积为

- A. $\frac{\sqrt{35}}{3}\pi$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ C. $\sqrt{35}\pi$ D. $2\sqrt{2}\pi$

6. 如图所示, 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 2AA_1$, P, Q 分别是 AD 和 BD 的中点, 则异面直线 D_1P 与 B_1Q 所成的角为

- A. 90° B. 60°
C. 45° D. 30°



7. 从长方体的八个顶点中任取3个点为顶点, 恰好构成直角三角形的概率为

- A. $\frac{1}{14}$ B. $\frac{1}{7}$ C. $\frac{3}{7}$ D. $\frac{6}{7}$

高二数学试题第1页(共4页)

试卷类型: A

高二数学

2021.7

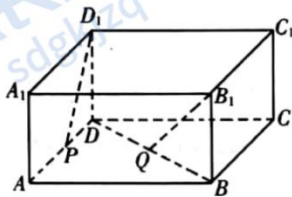
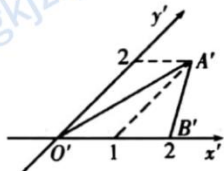
本试卷共4页, 满分150分, 考试时间120分钟。

注意事项:

1. 答题前, 考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束, 考生必须将试题卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题: 本大题共8小题, 每小题5分, 共40分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. $C_6^2 + C_6^3 =$
A. 25 B. 35 C. 70 D. 90
2. 某校共有学生2500人, 为了解学生的身高情况, 用分层抽样的方法从三个年级中抽取容量为50的样本, 其中高一抽取14人, 高二抽取16人, 则该校高三学生人数为
A. 600 B. 800 C. 1000 D. 1200
3. $\triangle AOB$ 的斜二测直观图 $\triangle A'O'B'$ 如图所示, 则 $\triangle AOB$ 的面积是
A. $\sqrt{2}$
B. 2
C. $2\sqrt{2}$
D. 4
4. 我国古典乐器一般按“八音”分为“金, 石, 木, 革, 丝, 土, 匏(páo), 竹”, 其中“金, 石, 木, 革”为打击乐器, “丝”为弹拨乐器, “土, 匏, 竹”为吹奏乐器, 现从“金, 石, 土, 竹, 丝”中任取两种乐器, 则至少有一种为吹奏乐器的取法种数为
A. 5 B. 6 C. 7 D. 8
5. 若一个底面半径为1的圆锥侧面展开图是一个顶角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的扇形, 则该圆锥的体积为
A. $\frac{\sqrt{35}}{3}\pi$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ C. $\sqrt{35}\pi$ D. $2\sqrt{2}\pi$
6. 如图所示, 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 2AA_1$, P, Q 分别是 AD 和 BD 的中点, 则异面直线 D_1P 与 B_1Q 所成的角为
A. 90°
B. 60°
C. 45°
D. 30°
7. 从长方体的八个顶点中任取3个点为顶点, 恰好构成直角三角形的概率为
A. $\frac{1}{14}$ B. $\frac{1}{7}$ C. $\frac{3}{7}$ D. $\frac{6}{7}$



高二数学试题第1页(共4页)

8. 抛掷两枚质地均匀的硬币, 设事件 E = “第一枚硬币正面朝上”, 事件 F = “第二枚硬币反面朝上”, 则下列结论中正确的是

A. E 与 F 相互独立 B. E 与 F 互斥 C. E 与 F 相等 D. $P(E \cup F) = \frac{1}{2}$

- 二、多项选择题: 本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 选对但不全的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 设 a, b 为两条不重合的直线, α 为一个平面, 则下列说法正确的是

A. 若 $a \perp b, b \subset \alpha$, 则 $a \perp \alpha$ B. 若 $a \perp \alpha, a \parallel b$, 则 $b \perp \alpha$
C. 若 $a \parallel \alpha, b \subset \alpha$, 则 $a \parallel b$ D. 若 $a \parallel \alpha, b \perp \alpha$, 则 $a \perp b$

10. 袋子中有 3 个黑球, 2 个白球, 现从袋子中有放回地随机取球 4 次, 取到白球记 1 分, 黑球记 0 分, 记 4 次取球的总分为 X , 则

A. $X \sim B(4, \frac{2}{5})$ B. $P(X=2) = \frac{144}{625}$
C. X 的期望 $E(X) = \frac{12}{5}$ D. X 的方差 $D(X) = \frac{24}{25}$

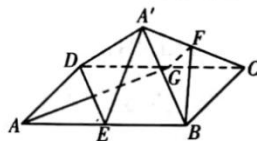
11. 有 3 台车床加工同一型号零件, 第 1 台次品率为 6%, 第 2, 3 台次品率为 5%, 加工的零件混在一起, 已知第 1, 2, 3 台车床加工的零件分别占总数的 25%, 30%, 45%, 记事件 B = “任取一个零件为次品”, 事件 A_i = “零件为第 i 台车床加工” ($i=1, 2, 3$), 则

A. $P(B|A_1) = 0.06$ B. $P(A_2B) = 0.015$
C. $P(B) = 0.0525$ D. $P(A_1|B) = \frac{3}{7}$

12. 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=2, AD=1, E$ 为 AB 中点, 沿 DE 将 $\triangle ADE$ 折起到 $A'DE$ 位置 (A' 不在平面 $ABCD$ 内), F, G 分别为 CA' 与 CD 的中点, 在翻折过程中, 下列结论正确的是

A. $FG \parallel$ 平面 $A'DE$
B. $DE \perp$ 平面 $A'AG$
C. 存在某位置, 使得 $A'B \perp AG$

D. 设直线 BF 与平面 $DEBC$ 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta$ 的最大值是 $\frac{\sqrt{10}}{10}$



- 三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 某地区为调查该地的居民月用水量, 调查了本地的 10 户居民的月平均用水量为: 2.0, 3.2, 4.5, 5.3, 6.0, 7.6, 8.0, 9.2, 10.0, 11.6, 这组数据的 80% 分位数为 _____.

14. 随机变量 ξ 的分布列是

ξ	2	4
P	a	b

若 $E(\xi) = \frac{8}{3}$, 则 $D(\xi) =$ _____.

15. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=AA_1=2$, 点 D 满足 $\vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AA_1})$, 则 $|\vec{CD}| =$ _____.

16. 三棱锥 $S-ABC$ 的顶点均在半径为 4 的球面上, $\triangle ABC$ 为等边三角形且外接圆半径为 2, 平面 $SAB \perp$ 平面 ABC , 则三棱锥 $S-ABC$ 体积的最大值是 _____.

高二数学试题第 2 页 (共 4 页)

四、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

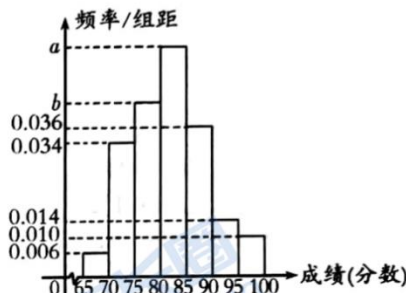
已知 $(3x - \frac{1}{x})^n$ 的展开式中各项系数之和为 32.

(1) 求 n 的值;

(2) 求 $(x + \frac{1}{x})(3x - \frac{1}{x})^n$ 展开式中的常数项.

18. (12 分)

某校为推进科技进校园活动,组织了一次科技知识问答竞赛,组委会抽取了 100 名学生参加,得到的竞赛成绩作出如图所示频率分布直方图.已知成绩在 $[75, 80)$ 的学生有 20 人.

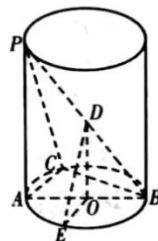


(1) 求 a, b 的值,并估计本次竞赛学生成绩的中位数(结果保留一位小数);

(2) 从成绩在 $[65, 70)$ 与 $[95, 100)$ 学生中任取 3 人进行问卷调查.记这 3 名学生成绩在 $[95, 100)$ 内的人数为 X ,求 X 的分布列与期望.

19. (12 分)

如图, PA 是圆柱的母线,点 C 在以 AB 为直径的底面 $\odot O$ 上,点 D 是 PB 的中点,点 E 在 $\widehat{AB}$ 上,且 $OE \parallel AC$.



(1) 求证: $DE \parallel$ 平面 PAC ;

(2) 求证: 平面 $DOE \perp$ 平面 PBC .

20. (12 分)

共享单车作为一种既环保又便捷的绿色交通出行工具,不仅方便市民短途出行,还可以缓解城市交通压力. A 市从 2016 年开始将其投入运营,下表是该市年份代码 x 与共享单车数 y (单位:万辆)的统计数据:

年份	2016	2017	2018	2019	2020
x	1	2	3	4	5
共享单车数 y (万辆)	10	14	18	23	26

(1) 经分析, y 与 x 存在显著的线性相关性,求 y 关于 x 的线性回归方程,并预测 2021 年的共享单车数;

高二数学试题第 3 页(共 4 页)

(2) 根据往年统计数据, 可知 2021 年每辆车的各项支出费用大致符合正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, $\mu = 800$, $\sigma^2 = 10000$, 支出费用在 1000 元及以上的单车没有利润, 支出费用在 $[800, 1000)$ 的单车每辆车年平均利润为 10 元, 支出费用低于 800 元的单车每辆车年平均利润为 20 元, 请预测 2021 年总利润.

参考公式和数据:
$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x},$$

若随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6826$,

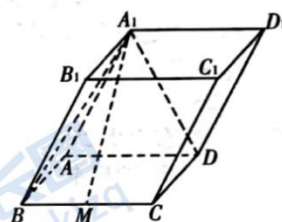
$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9544$, $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9974$.

21. (12 分)

如图, 四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 为矩形, $AD = 2AB$, M 为 BC 中点, 平面 $A_1D_1DA \perp$ 平面 $ABCD$, $AA_1 \perp A_1D$ 且 $A_1A = A_1D$.

(1) 证明: $\angle B_1A_1D = 90^\circ$;

(2) 若此四棱柱的体积为 2, 求二面角 $A - A_1B - M$ 的正弦值.



22. (12 分)

一疫苗生产单位通过验血方法检验某种疫苗产生抗体情况, 需要检验血液是否有抗体. 现有 $n (n \in \mathbb{N}^*)$ 份血液样本, 每份样本取到的可能性均等. 有以下两种检验方式: (1) 逐份检验, 则需要检验 n 次; (2) 混合检验, 将其中 $k (k \in \mathbb{N}^* \text{ 且 } k \geq 2)$ 份血液样本分别取样混合在一起检验. 若检验结果无抗体, 则这 k 份的血液全无抗体, 因而这 k 份血液样本只需检验一次就够了, 若检验结果有抗体, 为了明确这 k 份血液究竟哪几份有抗体, 就要对这 k 份再逐份检验, 此时这 k 份血液的检验总次数为 $k + 1$ 次. 假设在接受检验的血液样本中, 每份样本的检验结果有无抗体都是相互独立的, 且每份样本有抗体的概率均为 $p (0 < p < 1)$.

(1) 假设有 5 份血液样本, 其中只有 2 份血液样本有抗体, 若采用逐份检验方式, 求恰好经过 3 次检验就能把有抗体的血液样本全部检验出来的概率;

(2) 现取其中 $k (k \in \mathbb{N}^* \text{ 且 } k \geq 2)$ 份血液样本, 记采用逐份检验方式, 样本需要检验的总次数为 ξ_1 , 采用混合检验方式, 样本需要检验的总次数为 ξ_2 . 若 $E(\xi_1) = E(\xi_2)$, 求 p 关于 k 的函数关系式 $p = f(k)$, 并证明 $p < 1 - e^{-\frac{1}{k}}$.

高二数学参考答案及评分标准

2021. 7

一、单项选择题(每小题 5 分,共 40 分)

1-4 BCDC 5-8 BADA

二、多项选择题(每小题 5 分,共 20 分)

9. BD 10. AD 11. ABC 12. ABD

三、填空题(每小题 5 分,共 20 分)

13. 9.6 14. $\frac{8}{9}$ 15. 2 16. $6+3\sqrt{5}$

四、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分)

17. 解:(1)由题意,令 $x=1$ 得 $(3-1)^n=2^n=32$, 2 分
解得 $n=5$ 4 分

(2)因为二项式 $(3x-\frac{1}{x})^5$ 的通项为 $T_{r+1}=C_5^r(3x)^{5-r}\cdot(-\frac{1}{x})^r$
 $=C_5^r(-1)^r\cdot 3^{5-r}\cdot x^{5-2r}$, 6 分

所以 $(x+\frac{1}{x})(3x-\frac{1}{x})^5$ 展开式中的常数项为

$$\begin{aligned} & x\cdot C_5^3\cdot(-1)^3\cdot 3^{5-3}\cdot x^{-1}+\frac{1}{x}C_5^2\cdot(-1)^2\cdot 3^{5-2}\cdot x \\ &= -9C_5^3+27C_5^2 \\ &= 18C_5^2 \\ &= 180. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

18. 解:(1)已知成绩在 $[75,80)$ 的学生有 20 人,故其频率为 $\frac{20}{100}=0.2$,

所以 $b=\frac{0.2}{5}=0.040$, 2 分

所以 $(0.006+0.034+0.040+a+0.036+0.014+0.010)\times 5=1$,

得 $a=0.060$, 3 分

由题得左边第一个矩形的面积为 0.03,第二个矩形的面积为 0.17,第三个矩形的面积为 0.2,第四个矩形的面积为 0.3,所以中位数在第四个矩形里面,设中位数为 x ,

则 $0.03+0.17+0.2+(x-80)\times 0.06=0.5$,

所以 $x\approx 81.7$,所以中位数为 81.7; 5 分

(2)由题意知,成绩在 $[65,70)$ 的学生人数为 3 人,成绩在 $[95,100)$ 的学生人数为 5 人,

X 所有可能的取值为 0,1,2,3, 6 分

高二数学答案第 1 页(共 4 页)

$$P(X=0) = \frac{C_3^3 C_5^0}{C_8^3} = \frac{1}{56},$$

$$P(X=1) = \frac{C_3^2 C_5^1}{C_8^3} = \frac{15}{56},$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^1 C_5^2}{C_8^3} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28},$$

$$P(X=3) = \frac{C_3^0 C_5^3}{C_8^3} = \frac{10}{56} = \frac{5}{28},$$

故 X 的发布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{28}$

..... 10 分

X 服从超几何分布, 所以 X 的期望为 $E(X) = 3 \times \frac{5}{8} = \frac{15}{8}$ 12 分

19. 证明: (1) 因为点 D 为线段 PB 的中点, O 为线段 AB 的中点,

所以 $OD \parallel PA$, 2 分

又因为 $OE \parallel AC$, $OE \cap OD = O$, $PA \cap AC = A$,

所以平面 DOE $\parallel$ 平面 PAC, 4 分

又因为 $DE \subset$ 平面 DOE, 所以 $DE \parallel$ 平面 PAC. 6 分

(2) 因为点 C 在以 AB 为直径的底面 $\odot O$ 上, 所以 $\angle ACB = 90^\circ$, $BC \perp AC$,

又因为 $OE \parallel AC$, 所以 $BC \perp OE$, 8 分

因为 PA 是圆柱的母线, 所以 $PA \perp$ 底面 $\odot O$, 因为 $OD \parallel PA$, 所以 $OD \perp$ 底面 $\odot O$,

所以 $OD \perp BC$, 10 分

又因为 $OE \subset$ 平面 ODE, $OD \subset$ 平面 ODE, 且 $OD \cap OE = O$,

所以 $BC \perp$ 平面 ODE,

又因为 $BC \subset$ 平面 PBC, 所以平面 DOE $\perp$ 平面 PBC. 12 分

20. (1) 解: 由条件 $\bar{x} = 3$, $\bar{y} = 18.2$,

$$\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5 \bar{x} \bar{y} = 41, \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 55,$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5 \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5 \bar{x}^2} = \frac{41}{10} = 4.1, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x} = 18.2 - 4.1 \times 3 = 5.9,$$

所以 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y} = 4.1x + 5.9$, 5 分

$$x = 6 \text{ 时}, \hat{y} = 4.1 \times 6 + 5.9 = 30.5,$$

预测 2021 年共享单车数为 30.5 万辆. 6 分

高二数学答案第 2 页(共 4 页)

(2) 由题意支出费用 X 服从正态分布, 即 $X \sim N(800, 100^2)$,
 $P(800 \leq X < 1000) = P(800 \leq X < 800 + 2 \times 100) = 0.4772$, 8 分
 所以支出费用在 $[800, 1000)$ 的单车总利润为 $30.5 \times 0.4772 \times 10 = 145.546$ 万元,
 9 分

$$P(X < 800) = \frac{1}{2},$$

所以支出费用在 800 元以下的单车总利润为 $30.5 \times 0.5 \times 20 = 305$ 万元, 11 分
 所以预测 2021 年总利润为 $145.546 + 305 = 450.546$ 万元. 12 分

21. (1) 证明: 因为平面 $A_1D_1DA \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $A_1D_1DA \cap$ 平面 $ABCD = AD$,

$AB \subset$ 平面 $ABCD$, $AB \perp AD$,

所以 $AB \perp$ 平面 A_1D_1DA , 2 分

因为 $AB \parallel A_1B_1$,

所以 $A_1B_1 \perp$ 平面 A_1D_1DA ,

又因为 $A_1D \subset$ 平面 A_1D_1DA ,

所以 $A_1B_1 \perp A_1D$, 即 $\angle B_1A_1D = 90^\circ$ 4 分

(2) 连接 A_1O , 因为 $A_1A = A_1D$, 所以 $A_1O \perp AD$,

又因为平面 $A_1D_1DA \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $A_1D_1DA \cap$ 平面 $ABCD = AD$,

所以 $A_1O \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 A_1O 为四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的高, 6 分

设 $AB = a$, 则 $AD = 2a$, $OA_1 = a$,

所以四棱柱的体积 $V = S_{\square ABCD} \times OA_1 = a \times 2a \times a = 2a^3 = 2$,

解得 $a = 1$, 7 分

以 O 为坐标原点, $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA_1}$ 为 x, y, z 轴的正方向建立空间直角坐标系,

则 $A(0, -1, 0), B(1, -1, 0), C(1, 1, 0), D(0, 1, 0), A_1(0, 0, 1), M(1, 0, 0)$,

$\overrightarrow{A_1D} = (0, 1, -1), \overrightarrow{BM} = (0, 1, 0), \overrightarrow{A_1M} = (1, 0, -1)$, 8 分

因为 $AB \perp$ 平面 AA_1D_1D , 所以 $AB \perp A_1D$, 又 $A_1D \perp A_1A, A_1A \cap AB = A$,

所以 $A_1D \perp$ 平面 A_1B_1BA , 所以平面 AA_1B 的一个法向量 $\mathbf{n}_1 = \overrightarrow{A_1D} = (0, 1, -1)$,

设平面 A_1BM 的一个法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{BM} = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{A_1M} = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} y = 0, \\ x - z = 0, \end{cases}$

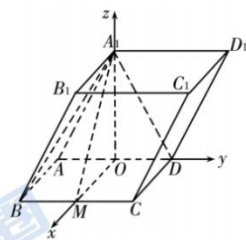
令 $x = 1$, 则 $\mathbf{n}_2 = (1, 0, 1)$ 10 分

设二面角 $A - A_1B - M$ 的平面角为 θ ,

$$\text{则 } |\cos \theta| = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \text{ 11 分}$$

$$\text{所以 } \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

即二面角 $A - A_1B - M$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 12 分



22. 解: (1) 设恰好经过 3 次检验能把有抗体血液样本全部检验出来为事件 A ,

$$\text{所以 } P(A) = \frac{C_2^1 C_2^1 A_3^3 + A_3^3 A_2^2}{A_5^5} = \frac{3}{10},$$

所以恰好经过 3 次检验就能把有抗体的血液样本全部检验出来的概率为 $\frac{3}{10}$ 4 分

(2) 由已知得 $E(\xi_1) = k$,

ξ_2 的所有可能取值为 $1, k+1$.

$$\text{所以 } P(\xi_2 = 1) = (1-p)^k, P(\xi_2 = k+1) = 1 - (1-p)^k,$$

$$\text{所以 } E(\xi_2) = (1-p)^k + (k+1)[1 - (1-p)^k] = k+1 - k(1-p)^k, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{若 } E(\xi_1) = E(\xi_2), \text{ 则 } k = k+1 - k(1-p)^k,$$

$$\text{所以 } k(1-p)^k = 1, (1-p)^k = \frac{1}{k},$$

$$\text{所以 } 1-p = \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}, \text{ 即 } p = 1 - \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}},$$

$$\text{所以 } p \text{ 关于 } k \text{ 的函数关系式为 } p = f(k) = 1 - \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} (k \in \mathbf{N}^*, \text{ 且 } k \geq 2). \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{证明: 令 } t = \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} (k \geq 2 \text{ 且 } k \in \mathbf{N}^*)$$

$$\text{所以 } \ln t = \frac{1}{k} \ln \frac{1}{k} = -\frac{\ln k}{k}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{令 } g(x) = -\frac{\ln x}{x} (x \geq 2),$$

$$g'(x) = \frac{\ln x - 1}{x},$$

$$\text{所以 } g'(x) = 0 \text{ 得 } x = e, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

所以 $x \in (2, e), g'(x) < 0, g(x)$ 单调递减,

$x \in (e, +\infty), g'(x) > 0, g(x)$ 单调递增, ... 10 分

$$\text{所以 } g(x)_{\min} = g(e) = -\frac{1}{e}, \text{ 所以 } -\frac{\ln x}{x} \geq -\frac{1}{e},$$

因为 $k \geq 2$ 且 $k \in \mathbf{N}^*$,

$$\text{所以 } -\frac{\ln k}{k} > -\frac{1}{e}, \text{ 即 } \frac{1}{k} \ln \frac{1}{k} > -\frac{1}{e}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } e^{\frac{1}{k} \ln \frac{1}{k}} > e^{-\frac{1}{e}},$$

$$\text{即 } \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} > e^{-\frac{1}{e}},$$

$$\text{所以 } p = 1 - \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} < 1 - e^{-\frac{1}{e}}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

高二数学答案第 4 页(共 4 页)

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。



微信搜一搜

Q 齐鲁家长圈

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索