

绝密★启用前

高三数学考试(理科)

(考试时间:120分钟 试卷满分:150分)

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 2\}$, $B = \{x | x^2 < 4x\}$, 则 $A \cup B =$

- A. $(-1, 2)$ B. $(-1, 4)$ C. $(-1, 0)$ D. $(0, 2)$

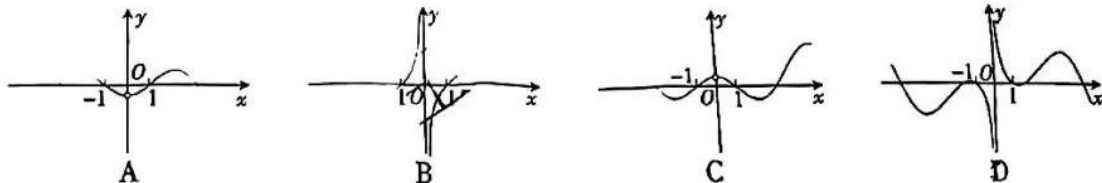
2. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, $(1+2i)a = 1+bi$, 则 $|a-bi| =$

- A. 5 B. $2\sqrt{5}$ C. 3 D. $\sqrt{5}$

3. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $A+B = \frac{5\pi}{6}$, $a-3c = 2$, 则 $\sin A =$

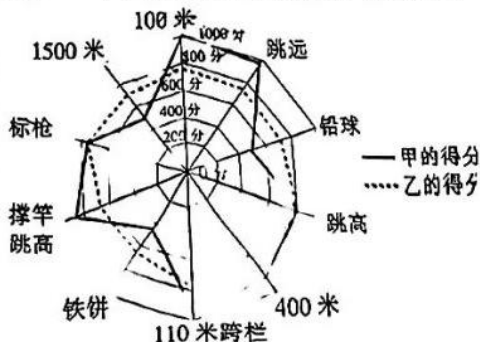
- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{2}{3}$

4. 函数 $f(x) = (x - \frac{1}{x})\sin x$ 的图象可能为



5. 十项全能是田径运动中全能项目的一种,是由跑、跳、投等 10 个田径项目组成的综合性男子比赛项目,比赛成绩是按照国际田径联合会制定的专门田径运动会全能评分表将各个单项成绩所得的评分加起来计算的,总分多者为优胜者。如图,这是某次十项全能比赛中甲、乙两名运动员的各个单项得分的雷达图,则下列说法正确的是

- A. 在 400 米跑项目中,甲的得分比乙的得分低
- B. 甲的各项得分比乙的各项得分更均衡
- C. 在跳高和铁饼项目中,甲、乙水平相当
- D. 甲的各项得分的极差比乙的各项得分的极差大



6. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y-1 \leq 0, \\ 3x+y+1 \geq 0, \\ y \leq 2, \end{cases}$ 则 $\frac{y+2}{x+3}$ 的取值范围为

- A. $[\frac{1}{3}, 3]$ B. $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ C. $[\frac{2}{3}, 2]$ D. $[\frac{1}{3}, 2]$

7. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=2, AA_1=3$, 以 C_1 为球心, $\frac{\sqrt{39}}{3}$ 为半径的球面与侧面 ABB_1A_1 的交线长为

- A. $\frac{2\sqrt{2}\pi}{9}$ B. $\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}$ C. $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$ D. $\frac{8\sqrt{3}\pi}{9}$

8. 甲、乙、丙三人玩传球游戏, 每个人都等可能地把球传给另一人, 由甲开始传球, 作为第一次传球, 经过 3 次传球后, 球回到甲手中的概率为

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{5}{16}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

9. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) - \sqrt{3}$ ($\omega > 0$) 在 $[0, \frac{3\pi}{4}]$ 内有且仅有两个零点, 则 ω 的取值范围是

- A. $(\frac{7}{9}, \frac{5}{3}]$ B. $[\frac{7}{9}, \frac{5}{3})$ C. $[\frac{10}{9}, \frac{10}{3})$ D. $(\frac{10}{9}, \frac{10}{3}]$

10. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , P 是双曲线 E 上一点,

$PF_2 \perp F_1F_2$, $\angle F_1PF_2$ 的平分线与 x 轴交于点 Q , $\frac{S_{\triangle PF_1Q}}{S_{\triangle PF_2Q}} = \frac{5}{3}$, 则双曲线 E 的离心率为

- A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\sqrt{3}$

11. 古希腊数学家普洛克拉斯指出:“哪里有数, 哪里就有美.”“对称美”是数学美的重要组成部分, 在数学史上, 人类一直在思考和探索数学的对称问题, 图形中的对称性本质就是点的对称、线的对称. 如正方形既是轴对称图形, 又是中心对称图形, 对称性也是函数一个非常重要的性质. 如果一个函数的图象经过某个正方形的中心并且能够将它的周长和面积同时平分, 那么称这个函数为这个正方形的“优美函数”. 下列关于“优美函数”的说法中正确的有

- ① 函数 $f(x) = \frac{x}{2^x+2}$ ($-1 \leq x \leq 1$) 可以是某个正方形的“优美函数”;
② 函数 $f(x) = 4\cos(2x - \frac{\pi}{6}) + 3$ 只能是边长不超过 $\frac{\pi}{2}$ 的正方形的“优美函数”;
③ 函数 $f(x) = \ln(\sqrt{4x^2+1} - 2x) - 1$ 可以是无数个正方形的“优美函数”;
④ 若函数 $y = f(x)$ 是“优美函数”, 则 $y = f(x)$ 的图象一定是中心对称图形.
- A. ①② B. ①③ C. ②③ D. ②④

12. 对 20 不断进行“乘以 2”或“减去 3”的运算, 每进行一次记作一次运算, 若运算 n 次得到的结果为 23, 则 n 的最小值为

- A. 7 B. 8 D. 10

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知向量 $a = (m-6, 5), b = (3, -2)$, 且 $(a+b) \perp b$, 则 $m = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

14. 设 E, F 分别在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 C_1D_1, A_1B_1 上, 且 $D_1E = \frac{1}{3}D_1C_1, B_1F =$

$\frac{1}{3}B_1A_1$, 则直线 DE 与 BF 所成角的余弦值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F , 过 F 且被 C 截得的弦长为 4 的直线有且仅有两条, 写出一个满足条件的抛物线 C 的方程: $\underline{\hspace{2cm}}$, 此时该弦的中点到 x 轴的距离为 $\underline{\hspace{2cm}}$. (本题第一空 2 分, 第二空 3 分)

16. 已知正数 x, y 满足 $x^2 = y^3 < 1$, 给出以下结论: ① $0 < x < y < 1$, ② $x > y > 1$, ③ $|y - x| \leq \frac{4}{27}$, ④ $|y^2 - x^2| \leq \frac{4}{27}$. 其中正确的是 $\underline{\hspace{2cm}}$ (请写出所有正确结论的序号)

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分,

17. (12 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 = 4, 2a_4 - a_5 = 7$, 公比不为 -1 的等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_3 = 4, b_4 + b_5 = 8, b_1 + b_2$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式;

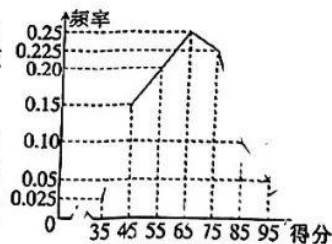
(2) 设 $c_n = \frac{3}{a_n a_{n+1}} + b_n$, 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (12 分)

2023 年, 全国政协十四届一次会议于 3 月 4 日下午 3 时在人民大会堂开幕, 3 月 11 日下午闭幕, 会期 7 天半; 十四届全国人大一次会议于 3 月 5 日上午开幕, 13 日上午闭幕, 会期 8 天半. 为调查学生对两会相关知识的了解情况, 某高中学校开展了两会知识问答活动, 现从全校参与该活动的学生中随机抽取 320 名学生, 他们的得分 ξ (满分 100 分) 的频率分布折线图如下.

(1) 若此次知识问答的得分 $X \sim N(\quad)$, 用样本来估计总体, 设 μ, σ 分别为被抽取的 320 名学生得分的平均数和标准差, 求 $P(50.5 < X \leq 94)$ 的值.

(2) 学校对这些被抽取的 320 名学生进行奖励, 奖励方案如下: 用频率估计概率, 得分小于或等于 55 的学生获得 1 次抽奖机会, 得分高于 55 的学生获得 2 次抽奖机会. 假定每次抽奖抽到价值 10 元的学习用品的概率为 $\frac{3}{4}$, 抽到价值 20 元



的学习用品的概率为 $\frac{1}{4}$. 从这 320 名学生中任取一位, 记该同学在抽奖活动中获得学习用品的价值总额为 ξ 元, 求 ξ 的分布列和数学期望 (用分数表示), 并估算此次抽奖要准备的学习用品的价值总额.

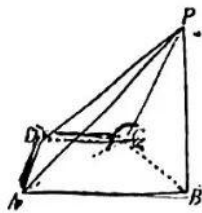
参考数据: $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827, P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545, P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973, \sqrt{210} \approx 14.5, 0.375 = \frac{3}{8}$.

19. (12分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 为等腰梯形, $AB \parallel CD$, $AD=DC=1$, $AB=2$, $AC \perp PC$.

(1) 证明: 平面 $ABCD \perp$ 平面 PBC .

(2) 若 $PB \perp BC$, $PB=2\sqrt{3}$, 求直线 PA 与平面 PCD 所成角的正弦值.



20. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 且椭圆 C 经过点 $(\sqrt{3}, 1)$, 过右焦点 F 的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设 O 为坐标原点, 求 $\triangle OAB$ 面积的最大值以及此时直线 l 的方程.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = e^x + \cos x - \sin x$ (x) 为 $f(x)$ 的导函数.

(1) 证明: 当 $x \geq 0$ 时, $f'(x) \geq 0$.

(2) 判断函数 $g(x) = e^{2x} - \frac{1}{2} [f(x) + f(2x) - e^{2x}] - 1$ 的零点个数.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

在直角坐标系 xOy 中, 圆 C 的方程为 $(x+5)^2 + y^2 = 24$.

(1) 以坐标原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求 C 的极坐标方程;

(2) 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = t \cos \alpha \\ y = 2t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数), l 与 C 的交点为 A, B , 且 $|AB| = 4$, 求 l 的斜率.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10分)

已知函数 $f(x) = |x-1| + |x+2|$.

(1) 解不等式 $f(x) \leq 7$;

(2) 若 t 是 $f(x)$ 的最小值, 且 $a+2b+3c=t$, 求 $a^2+2b^2+3c^2$ 的最小值.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

