

第八届湖北省高三(4月)调研模拟考试

数学试卷

2023.4

本试卷共4页,22题,全卷满分150分。考试用时120分钟。

★祝考试顺利★

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答:用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后,请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 复数 $\frac{2}{1-\sqrt{3}i}$ 与下列复数相等的是

A. $\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})$

B. $\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{4\pi}{3})$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

D. $-1 - \sqrt{3}i$

2. 已知集合 $M = \{x | x^2 - 3x < 0\}$, $N = \{x | \log_2 x < 4\}$, 且全集 $U = [-1, 20]$, 则 $U =$

A. $M \cap (\complement_U N)$

B. $N \cap (\complement_U M)$

C. $M \cup (\complement_U N)$

D. $N \cup (\complement_U M)$

3. 城市交通信号灯的配时合理与否将直接影响城市交通情况。我国采用的是红绿交通信号灯管理方法,即“红灯停、绿灯行”。不妨设某十字路口交通信号灯的变换具有周期性。在一个周期 T 内交通信号灯进行着红绿交替变换(东西向红灯的同时,南北向变为绿灯;然后东西向变为绿灯,南北向变红灯)。用 H 表示一个周期内东西方向到达该路口等待红灯的车辆数, V 表示一个周期内南北方向到达该路口等待红灯的车辆数, R 表示一个周期内东西方向开红灯的时间, S 表示一个周期内所有到达该路口的车辆等待时间的总和(不考虑黄灯时间及其它起步因素),则 S 的计算公式为

A. $\frac{(H+V)R^2}{2}$

B. $HR + V(T-R)$

C. $\frac{HR^2 + V(T-R)^2}{2}$

D. $\frac{(H+V)R}{2}$

数学试卷 第1页(共4页)

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列, 若 $a_2 + a_4 + a_6 = 5\pi$, $b_2 b_4 b_6 = 3\sqrt{3}$, 则 $\tan \frac{a_1 + a_7}{1 - b_2 b_6} =$
- A. $\sqrt{3}$ B. $-\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
5. 在 $\triangle ABC$ 中, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4$, $|\vec{BC}| = 2$, 且点 D 满足 $\vec{BD} = \vec{DC}$, 则 $|\vec{AD}| =$
- A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{6}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{3}{2}$
6. 已知 $\sin \alpha \sin(\frac{\pi}{3} - \alpha) = 3 \cos \alpha \sin(\alpha + \frac{\pi}{6})$, 则 $\cos(2\alpha + \frac{\pi}{3}) =$
- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. -1 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
7. 已知动直线 l 的方程为 $(1 - a^2)x + 2ay - 3a^2 - 3 = 0$, $a \in \mathbf{R}$, $P(\sqrt{3}, 1)$, O 为坐标原点, 过点 O 作直线 l 的垂线, 垂足为 Q , 则线段 PQ 长度的取值范围为
- A. $(0, 5]$ B. $[1, 5]$ C. $[5, +\infty)$ D. $(0, 3]$
8. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 定义域均为 \mathbf{R} , 满足 $f(\frac{3}{2} + x) - f(\frac{3}{2} - x) = 2x$, 记 $g(x) = f'(x)$, 其导函数为 $g'(x)$, 且 $g'(3 - x)$ 的图象关于原点对称, 则 $g'(9) + g(\frac{9}{2}) =$
- A. 0 B. 3 C. 4 D. 1

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 以下说法正确的有
- A. 某医院住院的 8 位新冠患者的潜伏天数分别为 10, 3, 8, 3, 2, 18, 7, 4, 则该样本数据的第 50 百分位数为 5.5
- B. 经验回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 至少经过样本点数据中的一个点
- C. 若 $P(B|A) = 0.3$, $P(B) = 0.3$, 则事件 A, B 相互独立
- D. 若随机变量 $\xi \sim B(21, \frac{1}{2})$, 则 $P(\xi = k)$ 取最大值的必要条件是 $k = 10$
10. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ (其中 $\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$), T 为 $f(x)$ 图象的最小正周期, 满足 $f(\frac{\pi}{\omega}) = f(\frac{T}{3})$, 且 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 恰有两个极值点, 则有
- A. $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ B. 函数 $y = f(x + \frac{\pi}{3\omega})$ 为奇函数
- C. $\frac{11}{6} < \omega \leq \frac{17}{6}$ D. 若 $\omega \in \mathbf{N}^*$, 则直线 $y = x - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 为 $f(x)$ 图象的一条切线

数学试卷 第 2 页 (共 4 页)

11. 已知在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 过棱 BC, CD 的中点 E, F 作正方体的截面多边形, 则下列说法正确的有
- A. 截面多边形可能是五边形
 B. 若截面与直线 AC_1 垂直, 则该截面多边形为正六边形
 C. 若截面过 AB_1 的中点, 则该截面不可能与直线 A_1C 平行
 D. 若截面过点 A_1 , 则该截面多边形的面积为 $\frac{7\sqrt{17}}{6}$
12. 已知抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F , 过点 F 的直线 l 与抛物线交于 A, B 两点, 与其准线交于点 D, F 为 AD 的中点, 且 $|AF| = 3$, 点 M 是抛物线上 \widehat{BA} 间不同于其顶点的任意一点, 抛物线的准线与 y 轴交于点 N , 抛物线在 A, B 两点处的切线交于点 T , 则下列说法正确的有
- A. 抛物线焦点 F 的坐标为 $(0, \frac{3}{2})$
 B. 过点 N 作抛物线的切线, 则切点坐标为 $(\pm \frac{3}{2}, \frac{3}{4})$
 C. 在 $\triangle FMN$ 中, 若 $t|MN| = |MF|, t \in \mathbf{R}$, 则 t 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 D. 若抛物线在点 M 处的切线分别交 BT, AT 于 H, G 两点, 则 $|BH| \cdot |GA| = |HT| \cdot |TG|$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 在某项测量中, 其测量结果 ξ 服从正态分布 $N(3, \sigma^2) (\sigma > 0)$, 且 $P(\xi > 4) = \frac{1}{5}$, 则 $P(\xi > 2) =$ _____.
14. 若 $(ax + \frac{b}{x})^6$ 的展开式中常数项为 160, 则 $a^2 + b^2$ 的最小值为 _____.
15. 已知函数 $f(x) = \log_a x - (\sqrt{a})^x - \log_a 2 (a > 1)$ 有两个零点, 则实数 a 的取值范围为 _____.
16. 已知 X 为包含 v 个元素的集合 ($v \in \mathbf{N}^*, v \geq 3$). 设 A 为由 X 的一些三元子集 (含有三个元素的子集) 组成的集合, 使得 X 中的任意两个不同的元素, 都恰好同时包含在唯一的一个三元子集中, 则称 (X, A) 组成一个 v 阶的 Steiner 三元系. 若 (X, A) 为一个 7 阶的 Steiner 三元系, 则集合 A 中元素的个数为 _____.

四、解答题: 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 S_n 满足 $S_n + a_n = \frac{n-1}{n^2+n}, n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 证明: 数列 $\{S_n - \frac{1}{n+1}\}$ 为等比数列;

(2) 记 $\frac{1}{b_n} = \frac{1}{n+1} - S_n$, 求数列 $\{\frac{b_n}{(b_n-1)(b_{n+1}-1)}\}$ 的前 n 项和 T_n .

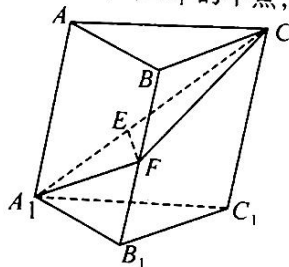
数学试卷 第 3 页 (共 4 页)

18. (12分)

如图,在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AC = \sqrt{2}$, $AB = 1$, E, F 分别为 A_1C, BB_1 的中点,且 $EF \perp$ 平面 AA_1C_1C .

(1) 求棱 BC 的长度;

(2) 若 $BB_1 \perp A_1B_1$, 且 $\triangle A_1FC$ 的面积 $S_{\triangle A_1FC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
求二面角 $B_1 - A_1F - C$ 的正弦值.



19. (12分)

在 $\triangle ABC$ 中, D 为边 BC 上一点, $\angle BAD = 90^\circ$, $\angle B = \angle DAC$, $12BD = 7AC$,

(1) 求 $\tan 2B$;

(2) 若 $AB = 7$, 求 $\triangle ABC$ 内切圆的半径.

20. (12分)

高性能计算芯片是一切人工智能的基础. 国内某企业已快速启动 AI 芯片试生产, 试产期需进行产品检测, 检测包括智能检测和人工检测. 智能检测在生产线上自动完成, 包括安全检测、蓄能检测、性能检测等三项指标, 且智能检测三项指标达标的概率分别为 $\frac{49}{50}$, $\frac{48}{49}$, $\frac{47}{48}$, 人工检测仅对智能检测达标 (即三项指标均达标) 的产品进行抽样检测, 且仅设置一个综合指标. 人工检测综合指标不达标的概率为 p ($0 < p < 1$).

(1) 求每个 AI 芯片智能检测不达标的概率;

(2) 人工检测抽检 50 个 AI 芯片, 记恰有 1 个不达标的概率为 $f(p)$, 当 $p = p_0$ 时, $f(p)$ 取得最大值, 求 p_0 ;

(3) 若 AI 芯片的合格率不超过 93%, 则需对生产工序进行改良. 以 (2) 中确定的 p_0 作为 p 的值, 试判断该企业是否需对生产工序进行改良.

21. (12分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 $\sqrt{2}$, 过点 $E(1, 0)$ 的直线 l 与 C 左右两支分别交于 M, N 两个不同的点 (异于顶点).

(1) 若点 P 为线段 MN 的中点, 求直线 OP 与直线 MN 斜率之积 (O 为坐标原点);

(2) 若 A, B 为双曲线的左右顶点, 且 $|AB| = 4$, 试判断直线 AN 与直线 BM 的交点 G 是否在定直线上, 若是, 求出该定直线, 若不是, 请说明理由.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = (\cos x - 1)e^{-x}$, $g(x) = ax^2 + (1 - e^x)x$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 当 $x \in (0, \pi)$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最小值;

(2) 当 $x \in [-\frac{\pi}{2}, +\infty)$ 时, 不等式 $xf(x) \geq \frac{g(x)}{e^x}$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

数学试卷 第 4 页 (共 4 页)

2023年第八届湖北省高三(4月)调研模拟考试

数学参考答案

一、选择题. 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分.

1—4 BDBA 5-8 ACBD

二、多选题. 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

9.AC 10.BCD 11.ABD 12.BCD

三、填空题. 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $\frac{4}{5}$ 14. 4 15. $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ 16. 7

四、解答题

17. (1) $\because S_n + a_n = \frac{n-1}{n^2+n}$, 且 $a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$,1分

$\therefore 2S_n - S_{n-1} = \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n}$, $\therefore 2(S_n - \frac{1}{n+1}) = S_{n-1} - \frac{1}{n} (n \geq 2)$,4分

$\therefore \frac{S_n - \frac{1}{n+1}}{S_{n-1} - \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} (n \geq 2)$, 令 $n=1$, 可得 $S_1 = 0$, $\therefore S_1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

所以数列 $\{S_n - \frac{1}{n+1}\}$ 是首项为 $-\frac{1}{2}$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列.5分

(2) 由 (1) 可得 $S_n - \frac{1}{n+1} = (-\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^{n-1} = -(\frac{1}{2})^n$,

$\therefore \frac{1}{b_n} = -(S_n - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{2^n}$, $\therefore b_n = 2^n$ 6分

$\therefore \frac{b_n}{(b_n-1)(b_{n+1}-1)} = \frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)} = \frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1}$ 8分

$\therefore T_n = (\frac{1}{2^1-1} - \frac{1}{2^2-1}) + (\frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{2^3-1}) + \dots + (\frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1}) = 1 - \frac{1}{2^{n+1}-1}$

.....10分

18.(1) 取 AC 中点 D , 连接 ED , BD ,

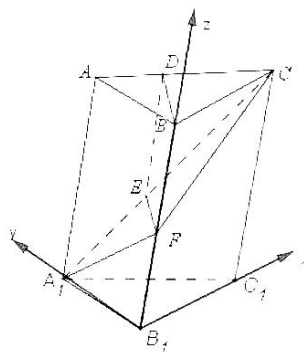
$\because ABC - A_1B_1C_1$ 为三棱柱,

$\therefore DE \parallel BF$, 且 $DE = BF$,

\therefore 四边形 $DEFB$ 为平行四边形,

$\therefore EF \parallel DB$

又 $EF \perp$ 平面 AA_1C_1C , $DB \perp$ 平面 AA_1C_1C ,



$\therefore DB \perp AC$ ，
又 D 为 AC 的中点， $\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形， $\therefore BC = AB = 1$ 4 分

(2) 由 (1) 知， $AB^2 + BC^2 = AC^2$ ， $\therefore AB \perp BC$ ， $\therefore EF = DB = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，且 $A_1B_1 \perp B_1C_1$

且 $EF \perp A_1C$ ， $\therefore S_{\triangle A_1FC} = \frac{1}{2}A_1C \cdot EF = \frac{1}{2}A_1C \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $\therefore A_1C = 2$ ，.....6 分

由 (1) 知 $DB \perp$ 平面 AA_1C_1C ， $\therefore DB \perp AA_1$ ，又三棱柱中 $AA_1 \parallel BB_1$ ， $\therefore DB \perp BB_1$

又 $BB_1 \perp A_1B_1$ ，所以 $BB_1 \perp AB$ ， $AB \cap DB = B$ ， $\therefore BB_1 \perp$ 平面 ABC ， $\therefore BB_1 \perp$ 平面

$A_1B_1C_1$ ，所以 $ABC - A_1B_1C_1$ 为直三棱柱， $\therefore \triangle AA_1C$ 为直角三角形，可求得 $AA_1 = \sqrt{2}$ ，
.....8 分

又在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AB \perp BC$ ， $\therefore A_1B_1 \perp B_1C_1$

以 B_1 为坐标原点，向量 $\overrightarrow{B_1C_1}, \overrightarrow{B_1A_1}, \overrightarrow{B_1B}$ 方向为 x 轴， y 轴， z 轴正方向建立空间直角坐标

系 $B_1 - xyz$ ， $B_1(0,0,0)$ ， $A_1(0,1,0)$ ， $C_1(1,0,0)$ ， $C(1,0,\sqrt{2})$ ， $B(0,0,\sqrt{2})$ ， $F(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ ，

所以 $\overrightarrow{A_1F} = (0, -1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ， $\overrightarrow{A_1C} = (1, -1, \sqrt{2})$ ，

设平面 A_1FC 的一个法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x, y, z)$ ，则

$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{A_1F} = 0 \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{A_1C} = 0 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -y + \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0 \\ x - y + \sqrt{2}z = 0 \end{cases}, \text{ 取 } \mathbf{n}_1 = (-1, 1, \sqrt{2}), \quad \text{.....10 分}$$

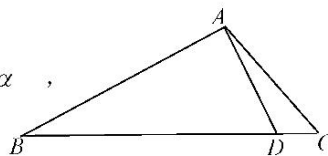
易知平面 B_1A_1F 的一个法向量为 $\mathbf{n}_2 = (1, 0, 0)$ ，

设二面角 $B_1 - A_1F - C$ 的平面角为 θ ，

$$\therefore |\cos \theta| = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{1}{2}, \quad \therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \text{.....12 分}$$

19.(1) 设 $\angle B = \angle DAC = \alpha$ ， $\therefore \angle ADC = 90^\circ + \alpha$ ，

$\angle C = 90^\circ - 2\alpha$ ，



在 $\triangle ADC$ 中, 由正弦定理可得 $\frac{AD}{\sin(90^\circ - 2\alpha)} = \frac{AC}{\sin(90^\circ + \alpha)}$,

在 $\triangle ABD$ 中, $AD = BD \sin \alpha$, 又 $AC = \frac{12}{7} BD$,

所以 $\frac{BD \sin \alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\frac{12}{7} BD}{\cos \alpha}$, $\therefore \sin \alpha \cos \alpha = \frac{12}{7} \cos 2\alpha$, $\therefore \frac{1}{2} \sin 2\alpha = \frac{12}{7} \cos 2\alpha$,
 $\therefore \tan 2\alpha = \frac{24}{7}$ 6分

(2) $\therefore \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{24}{7}$, $\therefore (3 \tan \alpha + 4)(4 \tan \alpha - 3) = 0$,

又易知 α 为锐角, $\therefore \tan \alpha = \frac{3}{4}$, $\therefore \sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$,

$\therefore AB = 7$, $\therefore BD = \frac{35}{4}$, $\therefore \triangle ABD$ 中, $AC = 15$,8分

又 $\cos \angle BAC = \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha = -\frac{3}{5}$,

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理可得, $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \angle BAC = 400$

$\therefore BC = 20$ 10分

设 $\triangle ABD$ 的内切圆半径为 r , 则

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \angle BAC = \frac{1}{2} (AB + AC + BC) r,$$

则 $r = 2$ 12分

20.(1)记事件 A ="每个AI芯片智能检测不达标", 则

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{49}{50} \times \frac{48}{49} \times \frac{47}{48} = \frac{3}{50} \quad \text{.....4分}$$

(1)由题意 $f(p) = C_{50}^1 p(1-p)^{49}$,

$$\therefore f'(p) = 50[(1-p)^{49} + p \times 49(1-p)^{48} \times (-1)] \quad \text{.....5分}$$

$$= 50(1-p)^{48}(1-50p)$$

令 $f'(p) = 0$, 则 $p = \frac{1}{50}$,

当 $0 < p < \frac{1}{50}$, $f'(p) > 0$,

当 $p > \frac{1}{50}$, $f'(p) < 0$,

所以 $f(p)$ 的最大值点 $p_0 = \frac{1}{50}$8分

(2) 记事件 $B =$ “人工检测达标”, 则

$$P(B|\bar{A}) = 1 - \frac{1}{50} = \frac{49}{50}, \text{ 又 } P(\bar{A}) = 1 - \frac{3}{50} = \frac{47}{50}$$

$$\text{所以 } P(\bar{A} \cdot B) = P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = \frac{47}{50} \times \frac{49}{50} = 92.12\% < 93\%,$$

所以需要对生产工序进行改良.12分

21.(1) 由题意得 $\begin{cases} e = \frac{c}{a} = \sqrt{2} \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$, 所以 $a = b$,1分

设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, $P(x_0, y_0)$, 则

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \end{cases} \quad \text{作差得 } \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} \quad \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$$\text{又 } MN \text{ 的斜率 } k_{MN} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}, \quad k_{OP} = \frac{y_0}{x_0},$$

$$\text{所以 } k_{MN} k_{OP} = \frac{b^2}{a^2} = 1 \quad \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

(2) $\because 2a = 4 \therefore a = b = 2, A(-2, 0) \quad B(3, 0)$ 5分

直线 $l: x = 1 + ty, t \neq 0$, 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x = 1 + ty (t \neq 0) \\ x^2 - y^2 = 4 \end{cases} \text{ 得 } (t^2 - 1)y^2 + 2ty - 3 = 0,$$

$$\text{所以 } \begin{cases} \Delta = 16t^2 - 12 > 0 \\ t^2 - 1 \neq 0, t \neq 0 \\ y_1 + y_2 = \frac{-2t}{t^2 - 1}, \text{ 所以 } ty_1 y_2 = \frac{3(y_1 + y_2)}{2} \\ y_1 y_2 = \frac{-3}{t^2 - 1} \end{cases} \quad \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

$$\text{设直线 } AN: y = \frac{y_2}{x_2 + 2}(x + 2), \quad BM: y = \frac{y_1}{x_1 - 2}(x - 2)$$

$$\text{所以 } \frac{x+2}{x-2} = \frac{y_1}{x_1-2} = \frac{(x_2+2)}{y_2} = \frac{y_1(y_2+3)}{(y_1-1)y_2} = \frac{y_1y_2+3y_1}{y_1y_2-y_2} = \frac{\frac{9}{2}y_1 + \frac{3}{2}y_2}{\frac{3}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2} = 3$$

.....10分

所以 $x=4$.故存在定直线 $x=4$, 使直线 AN 与直线 BM 的交点 G 在定直线上.
.....12分

22.(1) $f'(x) = \frac{1-\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}{e^x}, x \in (0, \pi)$ 令 $f'(x) = 0$, 则 $x = \frac{\pi}{2}$, 2分

当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)_{\min} = f(\frac{\pi}{2}) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$4分

(2) $xf(x) \geq \frac{g(x)}{e^x} \Leftrightarrow x(\cos x - 1)e^{-x} \geq e^{-x}(ax^2 + (1-e^x)x)$
 $\Leftrightarrow x \cos x - x \geq ax^2 + (1-e^x)x \Leftrightarrow x(e^x + \cos x - ax - 2) \geq 0$

记 $h(x) = e^x + \cos x - ax - 2$, 即 $xh(x) \geq 0$ 恒成立, $h'(x) = e^x - \sin x - a$
5分

①当 $a > 1$ 时, 当 $x \in [0, +\infty)$, $h''(x) = e^x - \cos x \geq 0$, 所以 $h'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增, 且 $h'(0) = 1 - a < 0$, $h'(1+a) = e^{1+a} - \sin(1+a) - a \geq e^{1+a} - 1 - a > 0$,
 故存在唯一的 $x_0 \in (0, +\infty)$, 使得 $h'(x_0) = 0$,
 当 $x \in (0, x_0)$, $h'(x) < 0$, 所以 $h(x) < h(0) = 0$, 此时 $xh(x) < 0$, 不合题意.

.....7分

②当 $a \leq 1$ 时,

(i) 若 $x > 0$, 则 $h'(x) > 1 + x - \sin x - a > 1 - a \geq 0$,

所以 $h(x) > h(0) = 0$ 恒成立, 即 $xh(x) > 0$ 成立, 符合题意.8分

(ii) $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$, $h''(x) = e^x + \sin x$ 单调递增, 且 $h''(0) = 1$, $h''(-\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}} - 1 < 0$,

所以存在唯一 $x_1 \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ 使 $h'''(x_1) = 0$,

当 $x \in (-\frac{\pi}{2}, x_1)$ 时, $h'''(x) < 0$, 当 $x \in (x_1, 0)$, $h'''(x) > 0$

又 $h''(-\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}} > 0$, $h''(0) = 0$, 故存在唯一 $x_2 \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, 使 $h''(x_2) = 0$

故 $x \in (-\frac{\pi}{2}, x_2)$, $h''(x_2) > 0$, $x \in (x_2, 0)$, $h''(x_2) < 0$,

又 $h'(-\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} + 1 - a > 0$, $h'(0) = 1 - a \geq 0$,

所以 $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ 时, $h'(x) \geq 0$, $h(x) \leq h(0) = 0$, 即 $xh(x) \geq 0$ 恒成立.

综上, $a \leq 1$

……………12分



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 ([网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主选拔在线**官方微信号: **zizzsw**。

