数学六

参考答案、提示及评分细则

1. A　由题意知 $A=\left\{x\left|\dfrac{2x-3}{x+1}\leqslant 0\right.\right\}=\left(-1,\dfrac{3}{2}\right]$，$B=\{x|y=\ln(1-x)\}=(-\infty,1)$，所以 $A\cap B=(-1,1)$．故选 A.

2. C　由题意知 $z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(2-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$，所以 $z+2\overline{z}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}+2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$，所以 $|z+2\overline{z}|=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$．故选 C.

3. B　由题意，根据正态分布的对称性，得$\dfrac{3a-3-a+1}{2}=6$，解得 $a=7$．故选 B.

4. B　设收集的 48 个准确数据为 $x_1,x_2,\cdots,x_{48}$，所以$\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{48}+34+38}{50}=36$，所以 $x_1+x_2+\cdots+x_{48}=1\,728$，所以 $\overline{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{48}+24+48}{50}=36$，又 $48=\dfrac{1}{50}[(x_1-36)^2+(x_2-36)^2+\cdots+(x_{48}-36)^2+(34-36)^2+(38-36)^2]=\dfrac{1}{50}[(x_1-36)^2+(x_2-36)^2+\cdots+(x_{48}-36)^2+8]$，$s^2=\dfrac{1}{50}[(x_1-36)^2+(x_2-36)^2+\cdots+(x_{48}-36)^2+(24-36)^2+(48-36)^2]=\dfrac{1}{50}[(x_1-36)^2+(x_2-36)^2+\cdots+(x_{48}-36)^2+288]>48$．故选 B.

5. D　令 $x=1$，得到展开式的各项系数和为 $1+a$，所以 $1+a=4$，解得 $a=3$．所以 $\left(x+\dfrac{a}{x^3}\right)\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^5=\left(x+\dfrac{3}{x^3}\right)\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^5=x\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^5+\dfrac{3}{x^3}\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^5$，$\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^5$展开式的通项为 $T_{r+1}=(-1)^r2^{5-r}\mathrm{C}_5^rx^{5-2r}$，令 $5-2r=-1$，解得 $r=3$；令 $5-2r=3$，解得 $r=1$，所以展开式中的常数项为$(-1)^3\times2^{5-3}\mathrm{C}_5^3+3\times(-1)\times2^{5-1}\mathrm{C}_5^1=-280$．故选 D.

6. B　因为$\sqrt{3}\sin B+2\cos^2\dfrac{B}{2}=3$，所以$\sqrt{3}\sin B+2\cdot\dfrac{1+\cos B}{2}=3$，所以$\sqrt{3}\sin B+\cos B=2$，即 $\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$，又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B+\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6}\right)$，所以 $B+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$．因为$\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{\cos C}{c}=\dfrac{\sin A\sin B}{6\sin C}$，由余弦定理得$\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2bac}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2cab}=\dfrac{\sin A\sin B}{6\sin C}$，即$\dfrac{a}{bc}=\dfrac{\sin A\sin B}{6\sin C}$，又 $B=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以$\dfrac{a}{bc}=\dfrac{\sqrt{3}\sin A}{12\sin C}$，由正弦定理得$\dfrac{a}{bc}=\dfrac{\sqrt{3}a}{12c}$，所以 $b=4\sqrt{3}$．设$\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 R，所以 $2R=\dfrac{b}{\sin B}=8$，解得 $R=4$，所以$\triangle ABC$ 的外接圆的面积为 $\pi R^2=16\pi$．故选 B.

7. B　显然，直线 l 的斜率不为 0，设直线 l 的方程为 $x=my+5$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由$\begin{cases}x=my+5,\\y^2=4x\end{cases}$得 $y^2-4my-20=0$，所以 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-20$，所以 $y_2=-\dfrac{20}{y_1}$，所以 $S_1=\dfrac{5}{2}|y_1-y_2|=\dfrac{5}{2}\left|y_1+\dfrac{20}{y_1}\right|$，$S_2=\dfrac{1}{2}|y_1|$，所以 $S_1+3S_2=\dfrac{5}{2}\left|y_1+\dfrac{20}{y_1}\right|+\dfrac{3}{2}|y_1|=4|y_1|+\dfrac{50}{|y_1|}\geqslant2\sqrt{4|y_1|\cdot\dfrac{50}{|y_1|}}=20\sqrt{2}$，当且仅当 $4|y_1|=\dfrac{50}{|y_1|}$，即$|y_1|=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$时等号成立，所以 S_1+3S_2 的最小值为 $20\sqrt{2}$．故选 B.

8. D　令 $f(x)=\sin x-x\cos x$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $f'(x)=\cos x-(\cos x-x\sin x)=x\sin x>0$，所以$f(x)$在

$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,所以 $f\left(\frac{1}{5}\right)>f(0)=0$,即 $\sin\frac{1}{5}>\frac{1}{5}\cos\frac{1}{5}$,即 $a>b$. 令 $g(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$,$x>0$,所以 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}\geqslant0$,所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,且 $g(1)=0$,所以当$x>1$时,$g(x)>0$,即 $g\left(\frac{11}{9}\right)=\ln\frac{11}{9}-\frac{2\left(\frac{11}{9}-1\right)}{\frac{11}{9}+1}>0$,即 $\ln\frac{11}{9}>\frac{1}{5}$. 令 $h(x)=x-\sin x$,$x>0$,所以$h'(x)=1-\cos x\geqslant0$,所以 $h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,所以 $h\left(\frac{1}{5}\right)>h(0)$,即$\frac{1}{5}>\sin\frac{1}{5}$,所以 $\ln\frac{11}{9}>\sin\frac{1}{5}$,即 $c>a$. 综上,$c>a>b$. 故选 D.

9. ABC　若 $m\perp\alpha$,$\alpha\perp\beta$,则 $m/\!/\beta$ 或$m\subset\beta$,故 A 错误;若 $m/\!/\alpha$,$\alpha/\!/\beta$,则 $m/\!/\beta$ 或$m\subset\beta$,故 B 错误;若 $m\subset\alpha$,$n\subset\alpha$,$m/\!/\beta$,$n/\!/\beta$,则 α 与 β 相交或 $\alpha/\!/\beta$,故 C 错误;由于 $m\perp\alpha$,$n\perp\alpha$,所以 $m/\!/n$,又 $m\perp\beta$,所以$n\perp\beta$,故 D 正确. 故选 ABC.

10. AC　由向量 $\boldsymbol{a}=(\sin\omega x,\cos\omega x)$,$\boldsymbol{b}=\left(1-\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{2}\right),1+\cos\omega x\right)(\omega>0)$,所以 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-1=\sin\omega x\left[1-\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{2}\right)\right]+\cos\omega x(1+\cos\omega x)-1=\sin\omega x+\sin^2\omega x+\cos\omega x+\cos^2\omega x-1=\sqrt{2}\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$.

对于选项 A,$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,解得 $\omega=2$,令 $2x+\frac{\pi}{4}=k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,所以 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$,$k\in\mathbf{Z}$,则 $f(x)$的图象关于点$\left(-\frac{5\pi}{8},0\right)$对称,故 A 正确;

对于选项 B,令 $\omega x+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}$,则 $x=\frac{\pi}{3}$为方程的解,即 $\omega=3k+\frac{3}{4}$,$k\in\mathbf{Z}$,所以 ω 不可能为$\frac{5}{4}$,故 B 错误;

对于选项 C,令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\omega x+\frac{\pi}{4}\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,解得 $f(x)$的单调递增区间为$\left[\frac{2k\pi-\frac{3\pi}{4}}{\omega},\frac{2k\pi+\frac{\pi}{4}}{\omega}\right]$($k\in\mathbf{Z}$),又 $f(x)$在$\left[-\frac{2\pi}{5},\frac{\pi}{6}\right]$上单调递增,则$\left[-\frac{2\pi}{5},\frac{\pi}{6}\right]\subseteq\left[\frac{-\frac{3\pi}{4}}{\omega},\frac{\frac{\pi}{4}}{\omega}\right]$,即$\begin{cases}-\frac{2\pi}{5}\geqslant-\frac{3}{4\omega},\\ \frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{4\omega},\end{cases}$即 $\omega\in\left(0,\frac{3}{2}\right]$,故 C 正确;

对于选项 D,将 $f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度后得到的图象对应解析式为 $y=\sqrt{2}\sin\left(\omega x+\frac{\pi\omega}{12}+\frac{\pi}{4}\right)$,由 $y=\sqrt{2}\sin\left(\omega x+\frac{\pi\omega}{12}+\frac{\pi}{4}\right)$为偶函数,则$\frac{\omega\pi}{12}+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,即 $\omega=12k+3$,$k\in\mathbf{Z}$,则 ω 的最小值为 3,故 D 错误. 故选 AC.

11. ABD　设 $P(x,y)$,由$\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{1}{2}$,得$\frac{\sqrt{(x+2)^2+y^2}}{\sqrt{(x-4)^2+y^2}}=\frac{1}{2}$,化简得$(x+4)^2+y^2=16$,故 A 正确;

当 A,B,P 三点不共线时,$\frac{|OA|}{|OB|}=\frac{1}{2}=\frac{|PA|}{|PB|}$,所以 PO 是$\angle APB$ 的角平分线,所以$\angle APO=\angle BPO$,故 B 正确;

设 $M(x,y)$,则 $\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{(x+2)^2+y^2}$,化简得$\left(x+\frac{8}{3}\right)^2+y^2=\frac{16}{9}$,因为$\sqrt{\left(-4+\frac{8}{3}\right)^2+(0-0)^2}=\frac{4}{3}<4-\frac{4}{3}$,所以在 C 上不存在点 M,使得$|MO|=2|MA|$,故 C 错误;

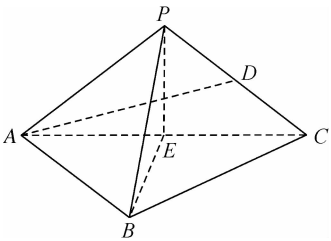
因为$\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{1}{2}$,所以$|PB|=2|PA|$,所以$|PB|+2|PD|=2|PA|+2|PD|\geqslant2|AD|=4\sqrt{5}$,当且仅当 P 在线段 AD 上时,等号成立,故 D 正确. 故选 ABD.

12. BD　因为 $f(x)-4x^2$ 是奇函数，$f(x)+x$ 是偶函数，所以 $\begin{cases} f(-x)-4x^2=-f(x)+4x^2, \\ f(-x)-x=f(x)+x, \end{cases}$ 所以 $f(x)=4x^2-x$. 任取 $x\in[1,2)$，则 $x-1\in[0,1)$，所以 $g(x)=2g(x-1)=2[4(x-1)^2-(x-1)]=8x^2-18x+10$. 故 A 错误；任取 $x\in[2,3)$，则 $x-1\in[1,2)$，$x-2\in[0,1)$，所以 $g(x)=2g(x-1)=4g(x-2)=4[4(x-2)^2-(x-2)]=16x^2-68x+72$，故 B 正确；$g\left(\frac{2k+1}{2}\right)=g\left(k+\frac{1}{2}\right)=2^{k-1}$，$g\left(\frac{2k-1}{2}\right)=g\left(k-\frac{1}{2}\right)=2^{k-2}$，所以 $\dfrac{g\left(\frac{2k+1}{2}\right)}{g\left(\frac{2k-1}{2}\right)}=2(k\in\mathbf{N}^*)$. 故 C 错误；由 C 的结论，$g\left(\frac{2k-1}{2}\right)=2^{k-2}$，则 $\sum\limits_{k=1}^{n}g\left(\frac{2k-1}{2}\right)=\frac{1}{2}+1+2+\cdots+2^{n-2}=\dfrac{\frac{1}{2}(1-2^n)}{1-2}=\dfrac{2^n-1}{2}$. 故 D 正确. 故选 BD.

13. 120°　因为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是夹角为 60° 的两个单位向量，所以 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=|\boldsymbol{e}_1|\cdot|\boldsymbol{e}_2|\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_1+\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1-\frac{3}{4}\boldsymbol{e}_2\right)=\frac{1}{6}\boldsymbol{e}_1^2+\frac{1}{12}\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2^2=-\frac{7}{24}$，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_1+\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_2\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}\boldsymbol{e}_1^2+\frac{4}{9}\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+\frac{4}{9}\boldsymbol{e}_2^2}=\frac{\sqrt{7}}{3}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1-\frac{3}{4}\boldsymbol{e}_2\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}\boldsymbol{e}_1^2-\frac{3}{4}\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+\frac{9}{16}\boldsymbol{e}_2^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=-\frac{1}{2}$，又 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0^\circ,180^\circ]$，所以 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=120^\circ$，即 $\boldsymbol{a}=\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_1+\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1-\frac{3}{4}\boldsymbol{e}_2$ 的夹角大小为 120°.

14. $1-\log_3 2$　因为 $f(x+1)$ 是偶函数，所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(-x)=f(2+x)$，因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(2+x)=-f(x)$，所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以 $f\left(\frac{163}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}+4\times20\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=-f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\log_3\frac{3}{2}=1-\log_3 2$.

15. $\dfrac{(32-16\sqrt{3})\pi}{3}$　如图，取 AC 的中点 E，连接 PE,BE.



因为三棱锥 P-ABC 为正三棱锥，所以 $PA=PC,BA=BC$，又 E 是 AC 的中点，所以 $PE\perp AC,BE\perp AC$，又 $PE\cap BE=E$，PE、$BE\subset$ 平面 PBE，所以 $AC\perp$ 平面 PBE，又 $PB\subset$ 平面 PBE，所以 $AC\perp PB$，又 $AD\perp PB$，$AC\cap AD=A$，AC、$AD\subset$ 平面 PAC，所以 $PB\perp$ 平面 PAC，又 PA、$PC\subset$ 平面 PAC，所以 $PB\perp PA,PB\perp PC$，又 $AB=4$，$PB=PA$，所以 $PC=PB=PA=2\sqrt{2}$，所以 $AC^2=PA^2+PC^2$，所以 $PA\perp PC$. 设正三棱锥 P-ABC 的内切球的半径为 R，所以 $\frac{1}{3}S_{\triangle PAC}\cdot PB=\frac{1}{3}(S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle ABC})R$，即 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}+\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}+\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}+\frac{1}{2}\times4\times4\sin\frac{\pi}{3}\right)R$，解得 $R=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}$，所以该三棱锥内切球的表面积 $S=4\pi R^2=\dfrac{(32-16\sqrt{3})\pi}{3}$.

16. $\frac{9}{2}$　$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PM}\cdot(\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PF_2})$，取线段 PF_1 的中点 G，则 $MG\perp PF_1$，所以 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PF_1}=\overrightarrow{PF_1}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{GM}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{PF_1}^2$，同理 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PF_2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PF_2}^2$，所以 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PO}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{PF_1}^2+\overrightarrow{PF_2}^2)\geqslant\frac{1}{4}\cdot\dfrac{(|\overrightarrow{PF_1}|+|\overrightarrow{PF_2}|)^2}{2}=\frac{9}{2}$，当且仅当 $|\overrightarrow{PF_1}|=|\overrightarrow{PF_2}|=3$ 时，等号成立，即 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PO}$ 的最小值为 $\frac{9}{2}$.

17.(1)解：由$\frac{a_n}{S_n}=\frac{n+1}{2n}$，得到$S_n=\frac{2na_n}{n+1}$. ………………………………………………… 1分

当$n\geqslant 2$时，$S_{n-1}=\frac{2(n-1)a_{n-1}}{n}$，两式相减，得$a_n=\frac{2na_n}{n+1}-\frac{2(n-1)a_{n-1}}{n}$，所以$\frac{2(n-1)a_{n-1}}{n}=\frac{(n-1)a_n}{n+1}$，

由于$n\geqslant 2$，所以$\frac{a_n}{n+1}=2\cdot\frac{a_{n-1}}{n}$， ………………………………………………… 3分

因为$\frac{a_1}{2}=2$，所以$\left\{\frac{a_n}{n+1}\right\}$是以2为首项，2为公比的等比数列，…………………………… 4分

所以$\frac{a_n}{n+1}=2\times 2^{n-1}$，所以$a_n=(n+1)\cdot 2^n$. ……………………………………… 5分

(2)证明：由(1)知$b_n=\frac{2^n}{(n+3)a_n}=\frac{1}{(n+1)(n+3)}$， ……………………………………… 6分

所以$T_n=\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{4\times 6}+\frac{1}{5\times 7}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+3)}$

$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$. ………………………………………………… 8分

因为$n\in\mathbf{N}^*$，所以$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{12}$，

所以$T_n<\frac{5}{12}$. ………………………………………………………………………… 10分

18.解：(1)因为$\frac{2\cos C}{a}=\frac{2}{b}+\frac{\sin C}{b\sin A}$，由正弦定理得$\frac{2\cos C}{a}=\frac{2}{b}+\frac{c}{ba}$，所以$2b\cos C=2a+c$，…………… 2分

由余弦定理得$2b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=2a+c$，

即$a^2+c^2-b^2=-ac$，…………………………………………………………………… 3分

所以$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{-ac}{2ac}=-\frac{1}{2}$， ……………………………………………… 4分

又$B\in(0,\pi)$，所以$B=\frac{2\pi}{3}$. ……………………………………………………………… 5分

(2)因为$b=8$，D为边AC的中点，所以$AD=CD=4$，且$BD=\frac{8}{3}$，

在$\triangle ABD$中，由余弦定理得，$\cos\angle BDA=\frac{BD^2+AD^2-AB^2}{2BD\cdot AD}=\frac{\frac{64}{9}+16-c^2}{2\times\frac{8}{3}\times 4}$，…………………… 6分

同理，在$\triangle BDC$中，$\cos\angle BDC=\frac{\frac{64}{9}+16-a^2}{2\times\frac{8}{3}\times 4}$. ……………………………………………… 7分

因为$\angle ADB+\angle BDC=\pi$，所以$\cos\angle ADB+\cos\angle BDC=0$，可得$a^2+c^2=\frac{416}{9}$，…………………… 9分

在$\triangle ABC$中，由余弦定理$b^2=c^2+a^2-2ac\cos B$，得$64=c^2+a^2+ac$，所以$ac=\frac{160}{9}$， ………………… 11分

所以$\triangle ABC$的面积$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\frac{160}{9}\times\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{40\sqrt{3}}{9}$. ………………………………… 12分

19.(1)证明：在$\triangle PAB$中，$PA=2\sqrt{2}$，$PB=\sqrt{2}$，$AB=\sqrt{6}$，所以$PA^2=PB^2+AB^2$，所以$PB\perp AB$，………… 1分

又平面$PAB\perp$平面ABC，平面$PAB\cap$平面$ABC=AB$，$PB\subset$平面PAB，所以$PB\perp$平面ABC，……… 3分

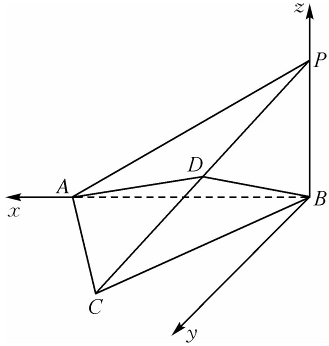
又$AC\subset$平面ABC，所以$PB\perp AC$， ………………………………………………………… 4分

又$AC\perp PC$，$PB\cap PC=P$，PB，$PC\subset$平面PBC，所以$AC\perp$平面PBC， ……………………… 5分

又 $BC\subset$平面 PBC，所以 $BC\perp AC$. ………………………………………… 6 分

(2)解：在$\triangle ABC$ 中，$BC\perp AC$，$AC=\sqrt{3}$，$AB=\sqrt{6}$，

所以 $BC=\sqrt{3}$，$\angle ABC=\frac{\pi}{4}$.



以 B 为坐标原点，直线 BA，BP 分别为 x，z 轴，在平面 ABC 内过点 B 与 AB 垂直的直线为 y 轴建立空间直角坐标系，如图所示.

所以 $B(0,0,0)$，$A(\sqrt{6},0,0)$，$C\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2},0\right)$，$P(0,0,\sqrt{2})$，所以

$D\left(\frac{\sqrt{6}}{4},\frac{\sqrt{6}}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BD}=\left(\frac{\sqrt{6}}{4},\frac{\sqrt{6}}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BA}=(\sqrt{6},0,0)$，$\overrightarrow{BC}=\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2},0\right)$.

设平面 ADB 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

所以$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{\sqrt{6}}{4}x+\frac{\sqrt{6}}{4}y+\frac{\sqrt{2}}{2}z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA}=\sqrt{6}x=0,\end{cases}$

令 $y=2$，解得 $x=0$，$z=-\sqrt{3}$，所以平面 ADB 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}=(0,2,-\sqrt{3})$. ………………… 9 分

设直线 BC 与平面 ADB 所成的角为 θ，

所以 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{BC},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{BC}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}\times\sqrt{4+3}}=\frac{\sqrt{14}}{7}$，

即直线 BC 与平面 ADB 所成角的正弦值是$\frac{\sqrt{14}}{7}$. ………………………………………… 12 分

20. 解：(1)记“小陈同学有机会答题”为事件 A，

所以 $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{15}{16}$，

所以小陈同学有机会答题的概率是$\frac{15}{16}$. ………………………………………… 4 分

(2)X 的所有可能取值为 0,5,10,15,20，………………………………………… 5 分

所以 $P(X=0)=\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{16}$，

$P(X=5)=C_2^1\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{24}$，

$P(X=10)=C_2^1\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(1-\frac{3}{4}\right)\times C_2^1\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(1-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{11}{48}$，

$P(X=15)=C_2^1\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2\times C_2^1\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{12}$，

$P(X=20)=\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{4}$，………………………………………… 9 分

所以 X 的分布列为：

X	0	5	10	15	20
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{11}{48}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$

………………………………………… 10 分

所以 $EX=0\times\frac{1}{16}+5\times\frac{1}{24}+10\times\frac{11}{48}+15\times\frac{5}{12}+20\times\frac{1}{4}=\frac{55}{4}$. ………………… 12 分

21. 解：(1)设 E 的半焦距为 $c(c>0)$，由题意知 $A(-a,0)$，E 的一条渐近线方程为 $y=\frac{b}{a}x$，即 $bx-ay=0$，所以

$\frac{|-ab|}{\sqrt{b^2+(-a)^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，………………………………………… 2 分

又$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，解得 $a=2,b=1,c=\sqrt{5}$，…………………………………………………… 3 分

所以 E 的方程为$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$. …………………………………………………………………… 4 分

(2)设直线 $l:x=my+4,-2<m<2,B(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$，由$\begin{cases}x=my+4,\\ \dfrac{x^2}{4}-y^2=1,\end{cases}$得$(m^2-4)y^2+8my+12=0$，

所以 $y_1+y_2=-\dfrac{8m}{m^2-4},y_1y_2=\dfrac{12}{m^2-4}$. ………………………………………………………… 6 分

因为直线 AB 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，所以 M 的坐标为$\left(0,\dfrac{2y_1}{x_1+2}\right)$，…………………………… 7 分

同理可得 N 的坐标为$\left(0,\dfrac{2y_2}{x_2+2}\right)$. ………………………………………………………………… 8 分

因为 $k_1=\dfrac{\frac{2y_1}{x_1+2}}{-4}=-\dfrac{y_1}{2(x_1+2)},k_2=\dfrac{\frac{2y_2}{x_2+2}}{-4}=-\dfrac{y_2}{2(x_2+2)}$，……………………………………… 9 分

所以 $k_1k_2=\dfrac{y_1y_2}{4(x_1+2)(x_2+2)}=\dfrac{y_1y_2}{4(my_1+6)(my_2+6)}=\dfrac{y_1y_2}{4[m^2y_1y_2+6m(y_1+y_2)+36]}$

$=\dfrac{\frac{12}{m^2-4}}{4\left(\frac{12m^2}{m^2-4}-\frac{48m^2}{m^2-4}+36\right)}=\dfrac{3}{12m^2-48m^2+36m^2-144}=-\dfrac{1}{48}$，即 k_1k_2 为定值$-\dfrac{1}{48}$. ………… 12 分

22.(1)解：若 $a=0,f(x)=\mathrm{e}^x-\ln(x+1)$，所以 $f'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x+1},x>-1$，………………………………… 1 分

令 $h(x)=f'(x)$，所以 $h'(x)=\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$ 在 $x\in(-1,+\infty)$上恒成立，所以 $h(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增，即 $f'(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增. ……………………………………………………………… 2 分

又 $f'(0)=0$，所以当$-1<x<0$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$在$(-1,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增. ……………………………………………… 4 分

(2)证明：$f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$，$f'(x)=\mathrm{e}^{x+a}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{(x+1)\mathrm{e}^{x+a}-1}{x+1}$，

令 $g(x)=(x+1)\mathrm{e}^{x+a}-1,x\geqslant-1$，所以 $g'(x)=(x+1)\mathrm{e}^{x+a}+\mathrm{e}^{x+a}=(x+2)\mathrm{e}^{x+a}>0$ 在 $x\in[-1,+\infty)$上恒成立，所以 $g(x)$在$[-1,+\infty)$上单调递增，………………………………………… 6 分

又 $g(-1)=-1<0,g\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^a}\right)=\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^a}+1\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}^a}+a}-1=(1+\mathrm{e}^a)\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}^a}}-1>0$，

所以存在唯一的 $x_0\in\left(-1,\dfrac{1}{\mathrm{e}^a}\right)$，使得 $g(x_0)=0$，………………………………………………… 8 分

且当$-1<x<x_0$ 时，$g(x)<0$，当 $x>x_0$ 时，$g(x)>0$，又$\dfrac{1}{x+1}>0$，所以当$-1<x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$在$(-1,x_0)$上单调递减，在$(x_0,+\infty)$上单调递增，所以 $f(x)$有唯一的极小值点 x_0. ……………………………………………………………………………………………… 9 分

因为 $g(x_0)=0$，所以 $\mathrm{e}^{x_0+a}=\dfrac{1}{x_0+1},\ln(x_0+1)=-x_0-a$，……………………………………………… 10 分

所以 $f(x)\geqslant f(x_0)=\mathrm{e}^{x_0+a}-\ln(x_0+1)-a=\dfrac{1}{x_0+1}+x_0+a-a=\dfrac{1}{x_0+1}+x_0+1-1\geqslant2-1=1$，

当且仅当$\dfrac{1}{x_0+1}=x_0+1$，即 $x_0=0$ 时等号成立.

所以 $f(x)$有唯一极值点 x_0，且 $f(x)\geqslant1$. ……………………………………………………………… 12 分