炎德·英才大联考湖南师大附中2023届模拟试卷(三)

数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	A	A	B	D	B	A	B	ABC	ACD	BC	AB

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,有且只有一项符合题目要求;选对得5分,选错得0分.

1. C 【解析】∵集合 $A=\left\{x\left|\frac{x-1}{x-4}<0\right.\right\}=\{x|1<x<4\}$,$B=\{x|x^2-2x-3\geqslant0\}=\{x|x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant3\}$,∴$A\cap B=\{x|3\leqslant x<4\}=[3,4)$.故选:C.

2. A 【解析】$z=\frac{1-i}{1+i}+4-2i=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}+4-2i=-i+4-2i=4-3i$,$|z|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$.故选A.

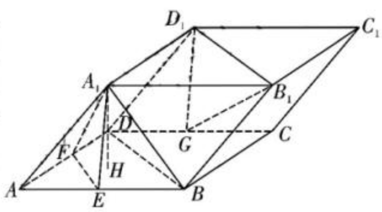
3. A 【解析】若 b 是 $1+\sqrt{3}$ 与 $1-\sqrt{3}$ 的等差中项,则 $b=\frac{1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}}{2}=1$,若 b 是 $2+\sqrt{3}$ 与 $2-\sqrt{3}$ 的等比中项,则 $b=\pm\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\pm1$,则"$b$ 是 $1+\sqrt{3}$ 与 $1-\sqrt{3}$ 的等差中项"是"b 是 $2+\sqrt{3}$ 与 $2-\sqrt{3}$ 的等比中项"的充分不必要条件,故选:A.

4. B 【解析】因为 $AB=4$,$AC=2\sqrt{2}$,$\angle BAC=135°$,所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-8$,
因为 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})-\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$,
所以 $|\overrightarrow{BM}|=\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{16}|\overrightarrow{AB}|^2-\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{16}|\overrightarrow{AC}|^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.故选B.

5. D 【解析】对于A选项:由相关系数的绝对值不超过1知,A不正确;
对于B选项:由经验回归方程知,x 每增加一个单位,y 平均减少1.25个单位,B不正确;
对于C选项:第二个样本点对应的残差 $\hat{e}_2=6-(-1.25\times6+13.75)=-0.25$,C不正确;
对于D选项:第三个样本点对应的残差 $\hat{e}_3=4.5-(-1.25\times7+13.75)=-0.5$,D正确.
故选D.

6. B 【解析】由题意可得:$x>0$,$f(x)=(\log_2x-1)(\log_2x-3)=(\log_2x)^2-4\log_2x+3$,
令 $t=\log_2x$,则 $g(t)=t^2-4t+3$,$t\in\mathbf{R}$.
∵$f(x_1)=f(x_2)$,∴$g(t_1)=g(t_2)$,∴$t_1+t_2=4$,即 $\log_2x_1+\log_2x_2=\log_2(x_1x_2)=4$,
∴$x_1x_2=16$,即 $x_1=\frac{16}{x_2}$,将其代入 $\frac{1}{x_1}+\frac{9}{x_2}$,得:$\frac{1}{x_1}+\frac{9}{x_2}=\frac{x_2}{16}+\frac{9}{x_2}\geqslant2\sqrt{\frac{x_2}{16}\cdot\frac{9}{x_2}}=\frac{3}{2}$,
当且仅当 $\frac{x_2}{16}=\frac{9}{x_2}$,即 $x_2=12$ 时,上式等号成立.故选B.

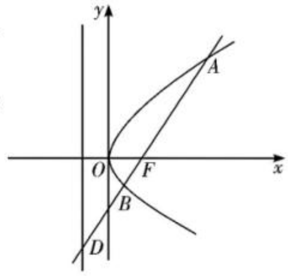
7. A 【解析】连结 B_1D_1、D_1G,易知 $B_1D_1/\!/BD/\!/EF$,$D_1G/\!/A_1E$,所以平面 $B_1GD_1/\!/$平面 A_1EF,从而 $B_1G/\!/$平面 A_1EF,选项A正确;连结 A_1B、A_1D、BD,由题设条件知四面体 A_1ABD 是棱长为2的正四面体,过 A_1 作 $A_1H\perp$平面 $ABCD$,垂足为 H,则 H 为正 $\triangle ABD$ 的中心,易知 H 不在 EF 上,故平面 A_1EF 与平面 $ABCD$ 不垂直,选项B错误;在正四面体 A_1ABD 中,易求得其高 $A_1H=\frac{2\sqrt{6}}{3}$,所以平面 $ABCD$ 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 间的距离为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$,选项C错误;直线 AA_1 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{A_1H}{AA_1}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,选项D错误.故选A.



8. B 【解析】∵$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 满足 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$,$f\left(\frac{5}{3}\pi\right)=0$,
∴$\frac{5}{3}\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{T}{4}+\frac{nT}{2}$,即 $T=\frac{17\pi}{3+6n}(n\in\mathbf{N})$,
∴$\omega=\frac{6+12n}{17}(n\in\mathbf{N})$,
∵$f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right)$ 上单调,
∴$\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}\leqslant\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{2\omega}$,即 $\omega\leqslant\frac{12}{7}$,
∴当 $n=1$ 时 ω 最大,最大值为 $\frac{18}{17}$,
故选:B.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. ABC 【解析】如图，$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，直线 l 的斜率为 $\sqrt{3}$，则直线方程为 $y=\sqrt{3}\left(x-\frac{p}{2}\right)$，联立



$\begin{cases} y^2=2px, \\ y=\sqrt{3}\left(x-\frac{p}{2}\right),\end{cases}$ 得 $12x^2-20px+3p^2=0$，解得：$x_A=\frac{3}{2}p$，$x_B=\frac{1}{6}p$，由 $|AF|=\frac{3}{2}p+\frac{p}{2}=2p=8$，得 $p=4$，故 A 正确；

∴抛物线方程为 $y^2=8x$，$x_B=\frac{1}{6}p=\frac{2}{3}$，则 $|BF|=\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}$，

$|BD|=\frac{|BF|}{\cos 60^\circ}$，∴$|BD|=2|BF|=\frac{16}{3}$，故 C 正确，D 错误；

$|BD|+|BF|=\frac{16}{3}+\frac{8}{3}=8$，所以 F 为 AD 中点，则 $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{FA}$，故 B 正确.

故选：ABC.

10. ACD 【解析】由 $f\left(x-\frac{3}{2}\right)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 得，$f(x)=f(x+2)$，所以 $f(x)$ 的周期是 $2k(k\neq 0, k\in\mathbf{Z})$. A 正确.

因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(x)=f(x+2)$ 就是 $f(-x)=f(x+2)$，即 $f(1-x)=f(1+x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称. B 不正确.

根据偶函数的对称性，C 显然正确.

当 $x\in[-2,-1]$ 时，$x+4\in[2,3]$，则 $f(x)=f(x+4)=x+4$，即 $f(x)=x+4$；

当 $x\in(-1,0]$ 时，$x-2\in(-3,-2]$，则 $f(x)=f(x-2)=2-x$，即 $f(x)=2-x$.

所以 D 正确. 故选：ACD.

11. BC 【解析】记"视频甲和图片乙均入选"为事件 A，"视频甲入选"为事件 B，"图片乙入选"为事件 C，

因为事件 A,B,C 是相互独立事件，由相互独立事件的概率公式可知，选项 A 错误，选项 B 正确；

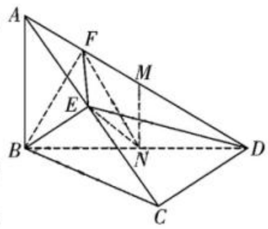
事件 $\overline{A}$ 包含"视频甲未能入选，图片乙入选"，"视频甲入选，图片乙未能入选"，"视频甲、图片乙都未入选"三种情况，

所以 $P(\overline{A})=P(\overline{B}C)+P(B\overline{C})+P(\overline{B}\,\overline{C})$，则 $P(\overline{A})>P(\overline{B}C)+P(B\overline{C})$，故选项 C 正确；

由题意可知，$P(\overline{B}C)=\left(1-\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{1}{b}=\frac{a-1}{ab}$，$P(B\overline{C})=\frac{1}{a}\cdot\left(1-\frac{1}{b}\right)=\frac{b-1}{ab}$，

因为 $a,b\in\mathbf{N}^*$，$a>b>1$，所以 $\frac{a-1}{ab}>\frac{b-1}{ab}$，即 $P(\overline{B}C)>P(B\overline{C})$，故选项 D 错误. 故选 BC.

12. AB 【解析】设四面体 $ABEF$、四棱锥 $B-ECDF$、四面体 $ABCD$ 的外接球的半径分别是 R_1、R_2、R_3，因为 $BE\perp AC$，$BF\perp AD$，所以 $R_1=\frac{1}{2}AB$.



又 $AB\perp$ 面 BCD，$BC\perp CD$，所以 $AC\perp CD$，从而 $R_3=\frac{1}{2}AD$.

分别取 AD、BD 的中点 M、N，则四棱锥 $B-ECDF$ 外接球的球心在直线 MN 上，因为 $BF\perp AD$，所以 $NF=\frac{1}{2}BD=NB$，易知 $BE\perp$ 平面 ACD，所以 $BE\perp ED$，于是 $NE=\frac{1}{2}BD=NB$，故点 N 就是四棱锥 $B-ECDF$ 外接球的球心，所以 $R_2=\frac{1}{2}BD$.

设 $AD=2$，$\angle ADB=\theta$，则 $R_1=\sin\theta$，$R_2=\cos\theta$，$R_3=1$，所以 $\frac{V_1+V_2}{V_3}=\frac{R_1^3+R_2^3}{R_3^3}=\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$.

令 $t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in(1,\sqrt{2}]$，则 $\sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$，$\frac{V_1+V_2}{V_3}=\frac{R_1^3+R_2^3}{R_3^3}=t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=\frac{1}{2}(3t-t^3)$.

记 $f(t)=\frac{1}{2}(3t-t^3)$，$t\in(1,\sqrt{2}]$，

则 $f'(t)=\frac{3}{2}(1-t^2)<0$，$f(t)$ 在 $(1,\sqrt{2}]$ 上单调递减，故 $\frac{V_1+V_2}{V_3}=f(t)\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，

而 $1\notin\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，$\sqrt{2}\notin\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，$\frac{\sqrt{2}}{2}\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，$\frac{3}{4}\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，故选 AB.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. -56 【解析】由于 $f(x)=x^8=[(x+1)-1]^8$，那么其展开式通项为 $T_{r+1}=C_8^r(x+1)^{8-r}(-1)^r$，故 $r=5$，$a_3=C_8^5(-1)^5=-C_8^3=-\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=-56$. 故答案为：$-56$.

14. $-\ln 2$ 或 $\ln\frac{1}{2}$ 【解析】因为 $f(x)=e^{2x}-2e^{x}+2x$，

所以 $f'(x)=2e^{2x}-2e^{x}+2$，$f(x_0)=e^{2x_0}-2e^{x_0}+2x_0$，

所以 $g(x)=(2e^{2x_0}-2e^{x_0}+2)(x-x_0)+e^{2x_0}-2e^{x_0}+2x_0$.

令 $h(x)=f(x)-g(x)$，

则 $h(x)=e^{2x}-2e^{x}+2x-[(2e^{2x_0}-2e^{x_0}+2)(x-x_0)+e^{2x_0}-2e^{x_0}+2x_0]$，

则 $h(x_0)=0$，

$h'(x)=2e^{2x}-2e^{x}-(2e^{2x_0}-2e^{x_0})$，

令 $\varphi(x)=2e^{2x}-2e^{x}$，则 $\varphi'(x)=4e^{2x}-2e^{x}$，

令 $\varphi'(x)=0$，得 $x=-\ln 2$，

所以当 $x\in(-\infty,-\ln 2)$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减，

当 $x\in(-\ln 2,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增，

当 $x_0\in(-\ln 2,+\infty)$，$x\geqslant x_0$ 时，$\varphi(x)>\varphi(x_0)$，

则 $h'(x)=\varphi(x)-\varphi(x_0)>0$，$h(x)$ 单调递增，

$h(x)\geqslant h(x_0)=0$，即 $f(x)\geqslant g(x)$，

所以当 $x_0\in(-\ln 2,+\infty)$，$x\geqslant x_0$ 时，$(x-x_0)(f(x)-g(x))\geqslant 0$ 成立；

当 $x_0\in(-\infty,-\ln 2)$，$x<x_0$ 时，$\varphi(x)>\varphi(x_0)$，

则 $h'(x)=\varphi(x)-\varphi(x_0)>0$，$h(x)$ 单调递增，

$h(x)<h(x_0)=0$，即 $f(x)<g(x)$，

所以当 $x_0\in(-\infty,-\ln 2)$，$x<x_0$ 时，$(x-x_0)(f(x)-g(x))>0$ 成立，

综上所述 $x_0=-\ln 2$.

故答案为：$-\ln 2$.

15. $\sqrt{5}$ 【解析】由双曲线的定义得 $|NF_2|-|NF_1|=2a$，所以 $|NF_2|=2a+|NF_1|$，

于是 $|MN|+|NF_2|=|MN|+|NF_1|+2a$.

当 M、N、F_1 三点共线，且 F_1M 与点 M 所在的渐近线垂直时，$|MN|+|NF_1|$ 取得最小值，其最小值就是 F_1 到渐近线的距离 d，

又 C 的渐近线方程为 $bx\pm ay=0$，所以 $d=\frac{|-bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}=b$，故 $|MN|+|NF_1|$ 的最小值为 b，从而 $|MN|+|NF_2|$ 的最小值为 $b+2a$，由题设知 $b+2a=4a$，所以 $b=2a$，$e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{5}$.

16. $\ln 2-2$ 或 $-2+\ln 2$ 【解析】设 $f(x)=5e^{8x}-4(2x-a)^5+48$，$x\geqslant 0$，$-2<a<1$，由题可得 $f(x)_{\min}\geqslant 0$.

$f'(x)=40[e^{4x}+(2x-a)^2](e^{2x}+2x-a)\cdot(e^{2x}-2x+a)$，

当 $x\geqslant 0$ 时，$e^{2x}+2x-a\geqslant 1-a>0$.

设 $h(x)=e^{2x}-2x+a$，$x\geqslant 0$，则 $h'(x)=2e^{2x}-2\geqslant 0$ 且不恒为零，

即 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，故 $h(x)\geqslant h(0)=a+1$.

当 $-1\leqslant a<1$ 时，$h(x)\geqslant 0$，即 $f'(x)\geqslant 0$ 且不恒为零，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

故 $f(x)\geqslant f(0)=53+4a^5>0$，满足题意.

当 $-2<a<-1$ 时，$h(0)=1+a<0$，$h(1)=e^2-2+a>e^2-4>0$，

则 $\exists x_0\in(0,1)$，使 $h(x_0)=0$，即 $e^{2x_0}-2x_0+a=0$.

当 $x\in[0,x_0)$ 时，$h(x)<0$，即 $f'(x)<0$；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h(x)>0$，即 $f'(x)>0$，

故 $f(x)$ 在 $[0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

则 $f(x)_{\min}=f(x_0)=5e^{8x_0}-4e^{10x_0}+48$.

记 $t=e^{2x_0}(1<t<e^2)$，令 $f(x_0)=g(t)=5t^4-4t^5+48$，

$g'(t)=20t^3(1-t)<0$，则 $g(t)$ 在 $(1,e^2)$ 上单调递减，

由 $g(t)\geqslant 0$ 且 $g(2)=0$，知 $1<t\leqslant 2$，即 $1<e^{2x_0}\leqslant 2$，故 $0<x_0\leqslant\frac{1}{2}\ln 2$.

设 $P(x)=2x-e^{2x}$，$x\geqslant 0$，则 $P'(x)=2(1-e^{2x})\leqslant 0$，

故 $P(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，故 $a=P(x_0)\geqslant P\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)=\ln 2-2$，

因此实数 a 的最小值是 $\ln 2-2$.

故答案为：$\ln 2-2$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【解析】(1) 因为 $\sin\dfrac{A+C}{2}=\sin\dfrac{\pi-B}{2}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{B}{2}\right)=\cos\dfrac{B}{2}$， …… 1 分

所以由 $\cos B+\sin\dfrac{A+C}{2}=0$ 得 $\cos B+\cos\dfrac{B}{2}=0$， …… 2 分

所以 $2\cos^2\dfrac{B}{2}+\cos\dfrac{B}{2}-1=0$，解得 $\cos\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{2}$ 或 $\cos\dfrac{B}{2}=-1$， …… 3 分

因为 $0<B<\pi$，所以 $0<\dfrac{B}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，则 $\cos\dfrac{B}{2}>0$，故 $\cos\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{2}$， …… 4 分

则 $\dfrac{B}{2}=\dfrac{\pi}{3}$，故 $B=\dfrac{2\pi}{3}$. …… 5 分

(2) 因为 $c:a=5:3$，令 $c=5m(m>0)$，则 $a=3m$， …… 6 分

由三角形面积公式可得 $\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}b\times\dfrac{15\sqrt{3}}{14}$，则 $15b=7ac=7\times15m^2$，故 $b=7m^2$， …… 8 分

由余弦定理可得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，则 $49m^4=49m^2$，解得 $m=1$， …… 9 分

从而 $a=3,c=5,b=7$，故 $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=15$. …… 10 分

18.【解析】(1) 由 $S_{n+1}=2S_n+2(n\in\mathbf{N}^*)$ 可得 $S_n=2S_{n-1}+2(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$， …… 1 分

两式相减得 $a_{n+1}=2a_n(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$. …… 2 分

又 $S_2=2S_1+2=6$，则 $a_2=4$，$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{4}{2}=2$. …… 3 分

所以 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2(n\in\mathbf{N}^*)$， …… 4 分

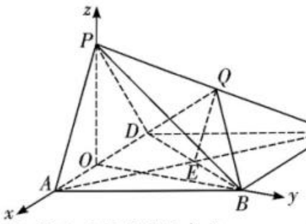
所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列，故 $a_n=2^n$. …… 5 分

(2) 由(1)可得 $b_n=\dfrac{2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=\dfrac{1}{2^n+1}-\dfrac{1}{2^{n+1}+1}$， …… 8 分

故其前 n 项和 $T_n=\left(\dfrac{1}{2^1+1}-\dfrac{1}{2^2+1}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2+1}-\dfrac{1}{2^3+1}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n+1}-\dfrac{1}{2^{n+1}+1}\right)$， …… 10 分

化简可得 $T_n=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2^{n+1}+1}$. …… 12 分

19.【解析】(1) 取 AD 的中点 O，连结 OP，OB.



因为 $\triangle PAD$ 是边长为 2 的正三角形，所以 $OP=\sqrt{3}$，$OP\perp AD$，① …… 2 分

又 $AB=BD=\sqrt{7}$，所以 $OB\perp AD$，且 $OB=\sqrt{AB^2-OA^2}=\sqrt{6}$， …… 3 分

于是 $OB^2+OP^2=9=PB^2$，从而 $OP\perp OB$，② …… 4 分

由①②得 $OP\perp$ 平面 $ABCD$， …… 5 分

而 $OP\subset$ 平面 PAD，所以平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$. …… 6 分

(2) 连接 AC，设 $AC\cap BD=E$，则 E 为 AC 的中点，连结 EQ，当 $PA\parallel$ 平面 BDQ 时，$PA\parallel EQ$，所以 Q 是 PC 的中点. …… 7 分

由(1)知，OA、OB、OP 两两垂直，分别以 OA、OB、OP 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系如图，则 $B(0,\sqrt{6},0)$、$C(-2,\sqrt{6},0)$、$D(-1,0,0)$、$P(0,0,\sqrt{3})$，由 P、C 坐标得 $Q\left(-1,\dfrac{\sqrt{6}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，从而 $\overrightarrow{DB}=(1,\sqrt{6},0)$，$\overrightarrow{DQ}=\left(0,\dfrac{\sqrt{6}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. …… 8 分

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 BDQ 的法向量，则由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DQ}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x+\sqrt{6}y=0,\\ \dfrac{\sqrt{6}}{2}y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z=0,\end{cases}$ 取 $y=1$，得 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{6},1,-\sqrt{2})$. …… 9 分

易知平面 ABD 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}_1=(0,0,1)$， …… 10 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}_1\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_1}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{n}_1|}=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$， …… 11 分

由图可知，二面角 $A-BD-Q$ 的平面角为钝角，故所求余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. …… 12 分

20.【解析】(1) 设椭圆 E 的焦距为 $2c$，由题设知 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且当点 M 在椭圆 E 的短轴端点处时 $\triangle MAB$ 的面积最大，所以 $\dfrac{1}{2}\cdot2a\cdot b=2\sqrt{2}$， …… 2 分

即 $ab=2\sqrt{2}$，又 $a^2=b^2+c^2$，从而解得 $a=2,b=c=\sqrt{2}$， …… 3 分

故椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$. …… 4 分

(2) 由(1)知，$A(-2,0)$，$B(2,0)$，由题意可设直线 l 的方程为 $x=ty+1$，

因为点 $D(1,0)$ 在椭圆 E 内，直线 l 与 E 总相交，

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1,\\ x=ty+1\end{cases}$得 $(t^2+2)y^2+2ty-3=0$，…… 5 分

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=-\dfrac{2t}{t^2+2}$，$y_1y_2=-\dfrac{3}{t^2+2}$，…… 6 分

(ⅰ)由 P、A、M 共线，得$\dfrac{n}{m+2}=\dfrac{y_1}{x_1+2}$，①

由 P、B、N 共线，得$\dfrac{n}{m-2}=\dfrac{y_2}{x_2-2}$，② …… 7 分

则由①÷②得$\dfrac{m-2}{m+2}=\dfrac{y_1}{x_1+2}\cdot\dfrac{x_2-2}{y_2}$，③

又$\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{2}=1$，所以$\dfrac{y_1}{x_1+2}=\dfrac{2-x_1}{2y_1}$，④

将④代入③，得$\dfrac{m-2}{m+2}=-\dfrac{(x_1-2)(x_2-2)}{2y_1y_2}=-\dfrac{(ty_1-1)(ty_2-1)}{2y_1y_2}=-\dfrac{t^2y_1y_2-t(y_1+y_2)+1}{2y_1y_2}=-\dfrac{\frac{-3t^2}{t^2+2}+\frac{2t^2}{t^2+2}+1}{\frac{-6}{t^2+2}}=\dfrac{1}{3}$，

所以 $m=4$. …… 8 分

(ⅱ)点 B 一定在以 MN 为直径的圆内，证明如下：

点 B 在以线段 MN 为直径的圆内$\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BN}<0\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BP}>0$，⑤ …… 9 分

因为$\overrightarrow{BM}=(x_1-2,y_1)$，$\overrightarrow{BP}=(2,n)$，所以$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BP}=2(x_1-2)+ny_1$，…… 10 分

由①、④，有 $ny_1=3(2-x_1)$，故$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BP}=2(x_1-2)+ny_1=2-x_1$，而$-2<x_1<2$，

从而$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BP}>0$，即⑤成立，所以点 B 一定在以线段 MN 为直径的圆内. …… 12 分

21.【解析】(1)当 $n=0$ 时，赌徒已经输光了，因此 $P(0)=1$. …… 1 分

当 $n=B$ 时，赌徒到了终止赌博的条件，不再赌了，因此输光的概率 $P(B)=0$. …… 2 分

(2)记 M：赌徒有 n 元最后输光的事件，N：赌徒有 n 元上一场赢的事件，…… 3 分

$P(M)=P(N)P(M|N)+P(\bar{N})P(M|\bar{N})$，…… 4 分

即 $P(n)=\dfrac{1}{2}P(n-1)+\dfrac{1}{2}P(n+1)$，…… 5 分

所以 $P(n)-P(n-1)=P(n+1)-P(n)$，

所以$\{P(n)\}$是一个等差数列，…… 6 分

设 $P(n)-P(n-1)=d$，则 $P(n-1)-P(n-2)=d$，…，$P(1)-P(0)=d$，…… 7 分

累加得 $P(n)-P(0)=nd$，故 $P(B)-P(0)=Bd$，得 $d=-\dfrac{1}{B}$. …… 8 分

(3)$A=100$，由 $P(n)-P(0)=nd$ 得 $P(A)-P(0)=Ad$，即 $P(A)=1-\dfrac{A}{B}$，…… 9 分

当 $B=200$ 时，$P(A)=50\%$，…… 10 分

当 $B=1000$ 时，$P(A)=90\%$，…… 11 分

当 $B\to\infty$ 时，$P(A)\to1$，因此可知久赌无赢家，

即便是一个这样看似公平的游戏，

只要赌徒一直玩下去就会 100%的概率输光. …… 12 分

22.【解析】(1)由 $f(x)=e^x-\dfrac{a}{x}=0$，得 $xe^x=a$，$(x\neq0)$，

设 $h(x)=xe^x$，则 $h'(x)=(x+1)e^x$，…… 1 分

当 $x<-1$ 时，$h'(x)<0$，当$-1<x<0$，$x>0$ 时，$h'(x)>0$，

所以 $h(x)=xe^x$ 在$(-1,0)$，$(0,+\infty)$上单调递增；在$(-\infty,-1)$上单调递减，…… 2 分

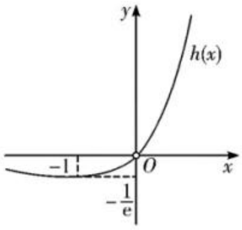
所以 $h(x)_{\min}=h(-1)=-\dfrac{1}{e}$，且 $x\to-\infty$时，$h(x)<0$，…… 3 分

据此可画出 $h(x)=xe^x$ 的大致图象如图，

所以(ⅰ)当 $a<-\dfrac{1}{e}$或 $a=0$ 时，$f(x)$无零点；

(ⅱ)当 $a=-\dfrac{1}{e}$或 $a>0$ 时，$f(x)$有一个零点；

(ⅲ)当$-\dfrac{1}{e}<a<0$ 时，$f(x)$有两个零点；…… 4 分



(2)①当 $a=0$ 时，$|f(x)|>a\ln x-a$ 即 $e^x>0$ 恒成立，符合题意；…………………………… 5 分

②当 $a<0$ 时，由 $|f(x)|>a\ln x-a$ 可得 $x>0$，则 $e^x-\frac{a}{x}>0$，

则 $e^x-\frac{a}{x}>a\ln x-a$，即 $e^x>\left(\frac{1}{x}+\ln x-1\right)a$，…………………………………………………… 6 分

设 $m(x)=\frac{1}{x}+\ln x-1$，则 $m'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}$，

当 $0<x<1$ 时，$m'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$m'(x)>0$，

所以 $m(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，…………………………………………………………………… 7 分

所以 $m(x)\geqslant m(1)=0$，

所以，当 $a<0$ 时，$e^x>0\geqslant\left(\frac{1}{x}+\ln x-1\right)a$，

即 $|f(x)|>a\ln x-a$ 恒成立，即 $a<0$ 符合题意；…………………………………………………………………………… 8 分

③当 $a>0$ 时，由(1)可知，$h(x)-a=xe^x-a$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

又 $h(0)-a=-a<0$，$h(a)-a=a(e^a-1)>0$，

所以 $\exists x_0\in(0,a)$，使 $h(x_0)-a=x_0e^{x_0}-a=0$. …………………………………………………………………… 9 分

ⅰ)当 $x\in(0,x_0)$ 时，$xe^x-a<0$，即 $e^x-\frac{a}{x}<0$，

设 $g(x)=\frac{a}{x}-e^x-a\ln x+a>0$，

则 $g'(x)=-\frac{a}{x^2}-e^x-\frac{a}{x}<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，

所以 $x\in(0,x_0)$ 时，$g(x)>g(x_0)=-a\ln x_0+a$； ……………………………………………………………………… 10 分

ⅱ)当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$xe^x-a>0$，即 $e^x-\frac{a}{x}>0$，

设 $t(x)=e^x-\frac{a}{x}-a\ln x+a>0$，

因为 $t'(x)=e^x+\frac{a}{x^2}-\frac{a}{x}=\frac{x^2e^x+a-ax}{x^2}$，

令 $p(x)=x^2e^x+a-ax$，$x\in(x_0,+\infty)$，则 $p'(x)=(x^2+2x)e^x-a$，

又令 $n(x)=(x^2+2x)e^x-a$，$x\in(x_0,+\infty)$，

则 $n'(x)=(x^2+4x+2)e^x>0$，得 $n(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

有 $p'(x)=n(x)\geqslant n(x_0)=(x_0^2+2x_0)e^{x_0}-a=ax_0+a>0$.

得 $p(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，有 $p(x)\geqslant p(x_0)=x_0^2e^{x_0}+a-ax_0=a>0$，

则 $t'(x)=\frac{p(x)}{x^2}>0$，得 $t(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增.

则 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$t(x)\geqslant t(x_0)=-a\ln x_0+a$，

又 $x\in(0,x_0)$ 时，$g(x)>g(x_0)=-a\ln x_0+a$， ………………………………………………………………………… 11 分

得当 $a>0$ 时，$|f(x)|>a\ln x-a$ 时，$-a\ln x_0+a>0\Rightarrow 0<x_0<e$，

由上可知 $a=x_0e^{x_0}$，$h(x)=xe^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则此时 $0<a<e^{e+1}$，

综上可知，a 的范围是 $(-\infty,e^{e+1})$. …………………………………………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。