2024 届广东省四校高三第一次联考

高三 数学

一．选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知集合 $M=\left\{y\left|y=\ln\left(1-x^2\right)\right.\right\}$，$N=\{x|-1<x<1\}$，则（　　）

A．$M=N$　　B．$M\cap N=[-1,0]$　　C．$M\cap N=(-1,0)$　　D．$(\complement_{R}M)\cup N=(-1,+\infty)$

2．已知 $(1-i)z=1$（i 为虚数单位），则 z 在复平面上对应的点在第（　　）象限

A．一　　B．二　　C．三　　D．四

3．“$m<1$”是“$x^2-mx+1>0$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上恒成立”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件　　C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．在等腰直角三角形 $\triangle ABC$ 中，$C=90^\circ$，其面积为 1，则下列结论错误的是（　　）

A．$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$　　B．$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$　　C．$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=2$　　D．$\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos B=\left|\overrightarrow{BC}\right|$

5．第十四届全国人民代表大会第一次会议于 2023 年 3 月 5 日在北京召开，3 月 6 日各代表团分组审议政府工作报告．某媒体 4 名记者到甲、乙、丙 3 个小组进行宣传报道，每个小组至少一名记者，则记者 A 被安排到甲组的概率为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{1}{6}$

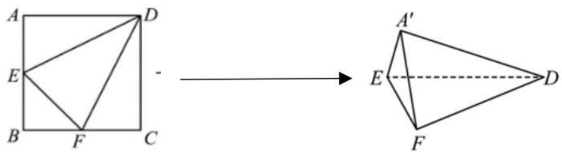
6．已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$），斜率为 $-\sqrt{3}$ 的直线 l 过原点 O 且与双曲线 C 交于 P,Q 两点，且以 PQ 为直径的圆经过双曲线的一个焦点，则双曲线 C 的离心率为（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$　　B．$\sqrt{3}+1$　　C．$2\sqrt{3}-1$　　D．$2\sqrt{3}-2$

7．如图，在边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中，E,F 分别是 AB,BC 的中点，将 $\triangle AED,\triangle BEF,\triangle DCF$ 分别沿 DE,EF,DF 折起，使得 A,B,C 三点重合于点 A'，若三棱锥 $A'-EFD$ 的所有顶点均在球 O 的球面上，则球 O 的表面积为（　　）

A．2π　　B．3π

C．6π　　D．8π



8. 已知 $f\left(x\right)=2\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\left(a-1\right)\sin\omega x(a>0,\omega>0)$ 在 $\left(0,\pi\right)$ 上存在唯一实数 x_0 使 $f\left(x_0\right)=-\sqrt{3}$，又 $\varphi\left(x\right)=f\left(x\right)-2\sqrt{3}$，任意的 x_1,x_2 均有 $\varphi(x_1)\le-\varphi\left(x_2\right)$ 成立，则实数 ω 的取值范围是（　）

A. $1<\omega\le\dfrac{5}{3}$　　B. $1\le\omega<\dfrac{5}{3}$　　C. $\dfrac{5}{6}<\omega<\dfrac{3}{2}$　　D. $\dfrac{5}{6}<\omega\le\dfrac{3}{2}$

二．选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 下列命题中，正确的命题的是（　）

A．将一组数据中的每个数据都加上同一个常数后，方差恒不变

B．已知随机变量 $X\sim B(n,p)$，若 $E(X)=30$，$D(X)=20$，则 $p=\dfrac{2}{3}$

C．设随机变量 $\xi\sim N(0,1)$，若 $P(\xi>1)=p$，则 $P(-1<\xi\le0)=\dfrac{1}{2}-p$

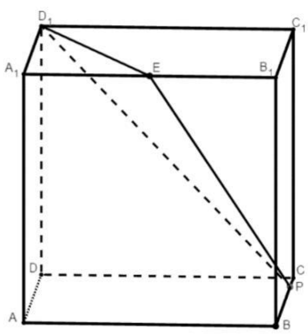
D．某人在 10 次射击中，击中目标的次数为 X，设 $X\sim B(10,0.8)$，则当 $X=8$ 时概率最大

10. 对于数列 $\{a_n\}$，若存在正数 M，使得对一切正整数 n，都有 $|a_n|\le M$，则称数列 $\{a_n\}$ 是有界的.若这样的正数 M 不存在，则称数列 $\{a_n\}$ 是无界的.记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，下列结论正确的是（　）

A．若 $a_n=\dfrac{1}{n}$，则数列 $\{a_n\}$ 是无界的　　B．若 $a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\sin n$，则数列 $\{S_n\}$ 是有界的

C．若 $a_n=\left(-1\right)^n$，则数列 $\{S_n\}$ 是有界的　　D．若 $a_n=2+\dfrac{1}{n^2}$，则数列 $\{S_n\}$ 是有界的

11. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 A_1B_1 的中点，P 为棱 BC 上的动点，则下列结论正确的是（　）



A 存在点 P，使 $AC_1\perp$ 平面 D_1EP

B 存在点 P，使 $PE=PD_1$

C 四面体 EPC_1D_1 的体积为定值

D 二面角 $P-D_1E-C_1$ 的余弦值取值范围是 $\left[\dfrac{\sqrt{5}}{5},\dfrac{2}{3}\right]$

12. 已知 $f\left(x\right)=xe^x$，$g\left(x\right)=x\ln x$.若存在 $x_1\in\mathbf{R}$，$x_2\in\left(0,+\infty\right)$，使得 $f\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)=t$ 成立，则下列结论中正确的是（　）

A.当$t>0$时， $x_1x_2=t$

B.当$t>0$时， $e\ln t\le x_1x_2$

C.不存在t使得$f'(x_1)=g'(x_2)$成立

D. $f(x)>g(x)+mx$恒成立，则$m\le 2$

三．填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $(x-y)^6$的展开式中xy^5的系数为_________.

14. 已知$f(x)=\sin x+\dfrac{1}{x}-4$，（$a,b\in\mathbf{R}$），若$f(-3)=2$，则$f(3)=$_________

15. 对于二元函数$z=f(x,y)$，若$\lim\limits_{\triangle x\to 0}\dfrac{f(x_0+\triangle x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$存在，则称$\lim\limits_{\triangle x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\triangle x}$为$f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处对$x$的偏导数，记为$f_x'(x_0,y_0)$；若$\lim\limits_{\triangle y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\triangle y)-f(x_0,y_0)}{\triangle y}$存在，则称$\lim\limits_{\triangle y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\triangle y)-f(x_0,y_0)}{\triangle y}$为$f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处对$y$的偏导数，记为$f_y'(x_0,y_0)$．已知二元函数$z=f(x,y)=x^2-2xy+y^3(x>0,y>0)$，则$f_x'(x_0,y_0)+f_y'(x_0,y_0)$的最小值为___________.

16. 过$P(m,-2)$向抛物线$x^2=4y$引两条切线PQ,PR，切点分别为R,Q.又点$A(0,4)$在直线QR上的射影为H，则焦点F与H连线的斜率取值范围是__________.

四．解答题：本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤.

17. 已知等差数列$\{a_n\}$前三项的和为-3，前三项的积为8

（1）求等差数列$\{a_n\}$的通项公式；

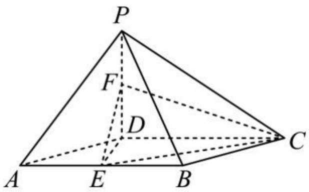
（2）若a_2,a_3,a_1成等比数列，求数列$\{|a_n|\}$的前10项和T_{10}.

18. 在$\triangle ABC$中，内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，设$\sqrt{3}\sin B+\cos B=\dfrac{b+c}{a}$，

（1）求角A；

（2）若$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$，且$AD=2$，求$\triangle ABC$面积的最大值.

19．如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PD\perp$平面$ABCD$，底面$ABCD$为菱形，E,F分别为AB，PD的中点.



（1）求证：$EF//$平面PBC；

（2）已知$AD=2\sqrt{3}$，$DE\perp PC$，又二面角$E-FC-D$的大小为45°，求PD的长.

20．某校组织综合学科知识竞赛，规定：参赛同学每答对一题得 2 分，答错得 1 分．已知张晓能正确回答每题的概率都为$\frac{1}{2}$，且每次回答问题是相互独立的.

(1)记张晓得n分的概率为$p(n)$，$n\in\mathbf{N}^{*}$，求$p(2),p(3)$的值；

(2)记张晓回答n次得分X_n，求X_n的分布列及数学期望.

21．过原点O的直线交椭圆$E:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$于$A,B$两点，$R(2,0)$，$\triangle ABR$面积的最大值为$2\sqrt{5}$.

（1）求椭圆E的方程；

（2）连AR交椭圆于另一个交点C，又$P\left(\frac{9}{2},m\right)(m\neq 0)$，分别记$PA,PR,PC$的斜率为$k_1,k_2,k_3$，求$\frac{k_2}{k_1+k_3}$的值.

22．已知曲线$C:f(x)=\sin^2x+ae^x-x(a\in\mathbf{R})$.

（1）若曲线C过点$P(0,-1)$，求曲线C在点P处的切线方程；

（2）当$a=-1$时，求$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的值域；

（3）若$0<a\leq 1$，讨论$g(x)=f(x)+\frac{1}{2}\cos 2x-a-\frac{1}{2}$的零点个数.

参考答案：

1．D

【解析】由题意，$y=\ln(1-x^2)\le\ln1=0$，故 $M=(-\infty,0]$，故 $(\complement_R M)\cup N=(0,+\infty)\cup(-1,1)=(-1,+\infty)$

2．A

【解析】由复数 $(1-i)z=1$，可得 $z=\dfrac{1}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$，对应的点为 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，在第一象限.

故选：A.

3．A

【分析】先由不等式恒成立求出 m 的取值范围，再根据充分条件和必要条件的定义分析判断.

【详解】由 $x^2-mx+1>0$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上恒成立，得

$m<x+\dfrac{1}{x}$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上恒成立，

令 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$，由对勾函数的性质可知 $f(x)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)>f(1)=2$，

所以 $m\le2$，

所以"$x^2-mx+1>0$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上恒成立"的充要条件为 $m\le2$，

所以"$m<1$"是"$x^2-mx+1>0$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上恒成立"的充分不必要条件，

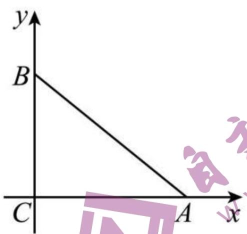
故选：A

4．C

【分析】建立平面直角坐标系，利用数量积及模的坐标运算求解即可.

【详解】由题意 $CA=CB$，$C=90^\circ$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}CB\times CA=1$，所以 $CA=CB=\sqrt{2}$，

如图，以 C 为原点，CA 为 x 轴，CB 为 y 轴，建立平面直角坐标系，



则 $C(0,0),A(\sqrt{2},0),B(0,\sqrt{2})$，所以 $\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AC}=(-\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{BC}=(0,-\sqrt{2})$，

所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{2})\times0+0\times(-\sqrt{2})=0$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-\sqrt{2})\times(-\sqrt{2})+\sqrt{2}\times0=2$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{2})\times0+\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=-2$，$\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos B=2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{2}$，

所以$\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos B=\left|\overrightarrow{BC}\right|$，所以选项 ABD 正确，C 错误.

故选：C

5. B

【解析】4 名记者到甲、乙、丙 3 个小组进行宣传报道，每个小组至少一名记者，共有$C_4^2A_3^3=36$种不同情况，记者 A 被安排到甲组有$A_3^3+C_3^2A_2^2=12$种，所求概率为$P=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$，故选:B.

6. B

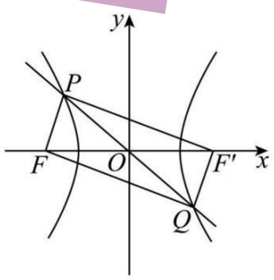
【解析】记双曲线 C 的右焦点为F'，P 为第二象限上的点，连接 PF，PF'，QF，QF'，

根据双曲线的性质和直线 l 的对称性知，四边形$PFQF'$为平行四边形.

因为$|PQ|=2|FO|$，所以四边形$PFQF'$为矩形，而直线 l 的斜率为$-\sqrt{3}$，所以$|PF|=c$，$|PF'|=\sqrt{3}c$，

又$|PF'|-|PF|=2a$，所以$\sqrt{3}c-c=2a$，则$e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$.

故选：B.

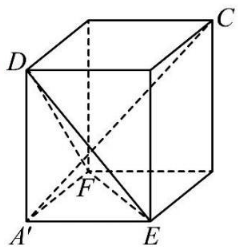


7. C

【解析】根据题意，可得$A'D\perp A'E, A'D\perp A'F, A'E\perp A'F$，且$A'E=1, A'F=1, A'D=2$，

所以三棱锥$D-A'EF$可补成一个长方体，则三棱锥$D-A'EF$的外接球即为长方体的外接球，如图所示，

设长方体的外接球的半径为R，可得$2R=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$，所以$R=\frac{\sqrt{6}}{2}$，



所以外接球的表面积为$S=4\pi R^2=4\pi\cdot(\frac{\sqrt{6}}{2})^2=6\pi$.

故选：C.

8. A

【解析】$f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)+(a-1)sin\omega x=asin\omega x+\sqrt{3}cos\omega x=\sqrt{a^2+3}\sin(\omega x+\varphi)$，其中$\varphi$满足

$tan\varphi=\frac{\sqrt{3}}{a}$.又由任意的$x_1$，$x_2$均有$\varphi(x_1)\le-\varphi(x_2)$成立即$f(x_1)+f(x_1)\le4\sqrt{3}$成立可知$f(x)$最大值为$2\sqrt{3}$.

$\therefore\sqrt{a^2+3}=2\sqrt{3}$，又$a>0$，$\therefore a=3$，$\therefore f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，又$0<x<\pi$知$\frac{\pi}{6}<\omega x+\frac{\pi}{6}\le\omega\pi+\frac{\pi}{6}$，又$f(x)$在$(0,\pi)$上存在唯一实数$x_0$使$f(x_0)=-\sqrt{3}$即$\sin\left(\omega x_0+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$，$\therefore\frac{7\pi}{6}<\omega x+\frac{\pi}{6}\le\frac{11\pi}{6}$，$\therefore 1<\omega\le\frac{5}{3}$.

选 A.

9. 【答案】ACD

【详解】对选项 A：将一组数据中的每个数据都加上同一个常数后，方差不变，正确；

对选项 B：$E(x)=np=30$，$D(x)=np(1-p)=20$，解得$p=\frac{1}{3}$，错误；

对选项 C：根据正态分布的对称性知，$P(\xi>0)=\frac{1}{2}$，$P(\xi>1)=p$，则$P(-1<\xi\le 0)=P(0<\xi\le 1)=\frac{1}{2}-p$，正确；

对选项 D：$X\sim B(10,0.8)$，故$p(X=n)=C_{10}^{n}\cdot 0.8^{n}\cdot(1-0.8)^{10-n}$，

$\begin{cases}p(X=n)\ge p(X=n-1)\\ p(X=n)\ge p(X=n+1)\end{cases}$，即$\begin{cases}C_{10}^{n}\cdot 0.8^{n}\cdot 0.2^{10-n}\ge C_{10}^{n-1}\cdot 0.8^{n-1}\cdot 0.2^{11-n}\\ C_{10}^{n}\cdot 0.8^{n}\cdot 0.2^{10-n}\ge C_{10}^{n+1}\cdot 0.8^{n+1}\cdot 0.2^{9-n}\end{cases}$，解得$\frac{39}{5}\le n\le\frac{44}{5}$，故$n=8$，D 正确.

故选：ACD

10. 【答案】BC

【解析】对于 A，$\because|a_n|=\left|\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}\le 1$恒成立，$\therefore$存在正数$M=1$，使得$|a_n|\le M$恒成立，

$\therefore$数列$\{a_n\}$是有界的，A 错误；

对于 B，$\because -1\le\sin n\le 1$ $\therefore -\left(\frac{1}{2}\right)^n\le a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\sin n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$，

$\therefore S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n<\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n<1$，

$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n>-\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=-1+\left(\frac{1}{2}\right)^n>-1$，

所以存在正数$M=1$，使得$|S_n|\le M$恒成立，$\therefore$则数列$\{S_n\}$是有界的，B 正确；

对于 C，当n为偶数时，$S_n=0$；当n为奇数时，$S_n=-1$；

$\therefore|S_n|\le 1$，$\therefore$存在正数$M=1$，使得$|S_n|\le M$恒成立，

$\therefore$数列$\{S_n\}$是有界的，C 正确；

对于 D，$\frac{1}{n^2}=\frac{4}{4n^2}<\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}=4\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

$\therefore S_n = 2n+1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} \le 2n+4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=2n+4\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=2n+\frac{8n}{2n+1}=2\left(n-\frac{2}{2n+1}+2\right)$；

$\because y=x-\frac{2}{2x+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore n-\frac{2}{2n+1}\in\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$，

$\therefore$ 不存在正数 M，使得 $|S_n|\le M$ 恒成立，$\therefore$ 数列 $\{S_n\}$ 是无界的，D 错误.

故选：BC.

11. 【解析】（向量法）为简化运算，建立空间直角坐标系如图，设正方体棱长为 2，

$CP=2(0\le a\le 2)$，则 $P(a,2,2)$，$E(2,1,0)$.

$\overrightarrow{AC_1}=(-2,2,-2)$，$\overrightarrow{DE_1}\cdot\overrightarrow{AC_1}=-2\ne 0$，故 AC_1 与 D_1E 不垂直，故 A 错误.

由 $PE=PD_1$ 知 $\sqrt{a^2+2^2+2^2}=\sqrt{(a-2)^2+1^2+2^2}\Longrightarrow a=\frac{1}{4}\in[0,2]$，故 B 正确.

$V_{E-PC_1D_1}=V_{P-C_1D_1E}=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot S_{\triangle C_1D_1E}=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=\frac{4}{3}$，为定值.故 C 正确.

又 $\overrightarrow{D_1E}=(2,1,0)$，$\overrightarrow{D_1P}=(a,2,2)$，设平面 D_1EP 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{D_1E}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\\ \overrightarrow{D_1P}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}2x+y=0\\ ax+2y+2z=0\end{cases}$，

令 $x=2$ 则 $y=-4$，$z=4-a$，$\therefore\overrightarrow{n_1}=(2,-4,4-a)$，

又平面 D_1EC_1 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(0,0,1)$，

$\therefore|cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>|=\frac{|4-a|}{\sqrt{2^2+(-4)^2+(4-a)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{20}{(4-a)^2}}}$，

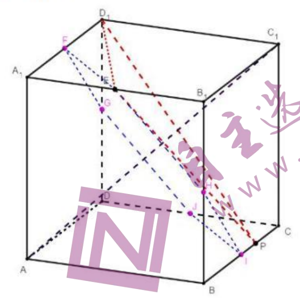
又 $0\le a\le 2$，$\therefore 4\le(4-a)^2\le 16$，$\therefore|cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>|\in\left[\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{2}{3}\right]$.

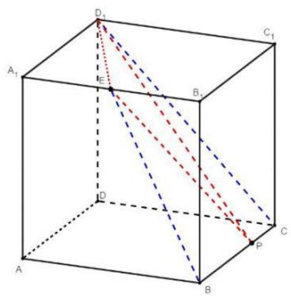
故 D 错误.

（几何法）记棱 A_1D_1，D_1D，DC，CB，BB_1 中点分别为 F，G，J，I，H，易知 $AC_1\perp$ 平面 $EFGJIH$，

则 $AC_1\perp EF$，若 $AC_1\perp$ 平面 D_1EP，则 $AC_1\perp D_1E$，所以 $AC_1\perp$ 平面 D_1EF，矛盾，故 AC_1 不垂直于平面 D_1EP.

故 A 错误.



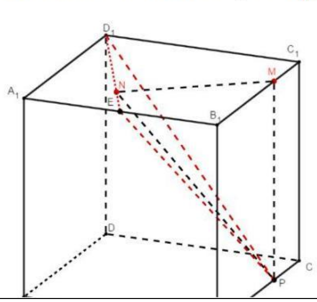


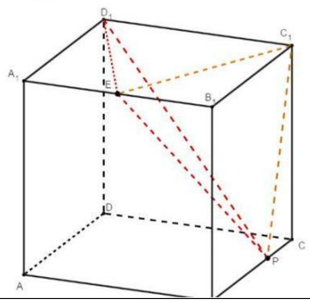
连接 EB，D_1C，易知 $BC\perp EB$，$BC\perp D_1C$，设正方体棱长为 2，知 $EB=\sqrt{5}$，$D_1C=2\sqrt{2}$，

记 $BP=m(0\le m\le 2)$，

则 $EP=\sqrt{m^2+5}$，$D_1P=\sqrt{(2-m)^2+8}$，

由 $\sqrt{m^2+5}=\sqrt{(2-m)^2+8}$，



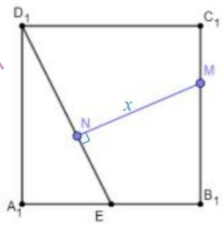


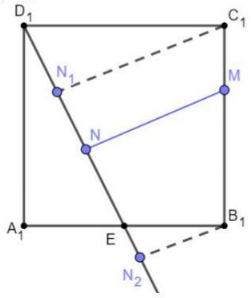
得$m=\frac{7}{4}\in[0,2]$.故B正确.

$V_{E-PC_1D_1}=V_{P-C_1D_1E}=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot S_{\triangle C_1D_1E}=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=\frac{4}{3}$，为定值.故$C$正确.

过点P作$PM\perp B_1C_1$于点M，易知$PM\perp D_1E$，过点M作$MN\perp D_1E$于点N，知$D_1E\perp$平面PMN，所以$PN\perp D_1E$，则二面角$P-D_1E-C_1$的平面角为$\angle PNM$，现在$\triangle PNM$中求解$cos\angle PNM$.

设正方体棱长为2，$NM=x$，则$NP=\sqrt{x^2+4}$，$\therefore cos\angle PNM=\frac{NM}{NP}=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$，只需求$x$取值范围即可.





记$BP=m(0\le m\le 2)$，则$B_1M=BP=m$，

分析易知M在C_1时x取到最大值，此时$x=C_1N_1$

M在B_1时x取到最小值，此时$x=B_1N_2$，

又$\frac{C_1N_1}{C_1D_1}=\frac{D_1A_1}{D_1E}$即$C_1N_1=2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，

$\frac{B_1N_2}{D_1A_1}=\frac{B_1E}{D_1E}$即$B_1N_2=2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以$\frac{2\sqrt{5}}{5}\le x\le\frac{4\sqrt{5}}{5}$即$\frac{4}{5}\le x^2\le\frac{16}{5}$，

$\therefore cos\angle PNM=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}=\sqrt{1-\frac{4}{x^2+4}}\in\left[\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{2}{3}\right]$.

故D错误.

12.【解析】法1：$t=x_1e^{x_1}=x_2lnx_2=lnx_2e^{lnx_2}$，又$f'(x)=e^x(x+1)$，知$f(x)$在$(-\infty,-1)$上递减，在$(-1,+\infty)$上递增，又当$x<0$时，$f(x)<0$；当$x>0$时，$f(x)>0$，$\therefore f(x)$最小值$=f(-1)=-\frac{1}{e}$，由图可知：当$t>0$时，$f(x)=t$有唯一解，故$x_1=lnx_2$，且$x_1>0$，$\therefore x_1x_2=x_2lnx_2=t$，故$A$正确；

从而$\frac{lnt}{x_1x_2}=\frac{lnt}{t}(t>0)$，设$\varphi(t)=\frac{lnt}{t}$，则$\varphi'(t)=\frac{1-lnt}{t^2}$，令$\varphi'(t)=0\Rightarrow t=e$，易知$\varphi(t)$在$(0,e]$上单调递增，在$[e,+\infty)$上单调递减，$\therefore\varphi(t)\le\varphi(e)=\frac{1}{e}$，$\therefore\frac{lnt}{x_1x_2}\le\frac{1}{e}$，$\therefore elnt\le x_1x_2$，故$B$正确；

$g'(x)=lnx+1=0\Rightarrow x=\frac{1}{e}$，$\therefore x=\frac{1}{e}$，易知$g(x)$在$(0,\frac{1}{e})$上递减，在$(\frac{1}{e},+\infty)$上递增，$\therefore g(x)_{min}=g\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$，

$\therefore$存在$t=-\frac{1}{e}$，使$f'(-1)=g\left(\frac{1}{e}\right)=0$，故$C$错误；

令$f(x)-g(x)=x(e^x-lnx)$，令$r(x)=e^x-lnx$，则$r'(x)=e^x-\frac{1}{x}$，易知$r'(x)$在$(0,+\infty)$上递增，又$r'\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$，$r'(1)=e-1>0$，$\therefore$存在$x_0\in(\frac{1}{2},1)$，使$r'(x_0)=0$，$\therefore r(x)$在$(0,x_0)$上递减，在$(x_0,+\infty)$上递增（其中$x_0$满足$e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，即$x_0=-lnx_0$）.$\therefore r(x)\ge r(x_0)=e^{x_0}-lnx_0=x_0+\frac{1}{x_0}>2$，

$\therefore f(x)-g(x)=x\cdot r(x)>2x$，$\therefore f(x)-g(x)>mx$，$\therefore m\le 2$，故$D$正确.

故选ABD.

法 2：对于选项AB可以采用如下方法，

由$x_1e^{x_1}=t$，$x_2lnx_2=t$得$e^{x_1}=\frac{t}{x_1}$，$lnx_2=\frac{t}{x_2}$，故x_1，x_2分别为函数$y=e^x$，$y=lnx$与$y=\frac{t}{x}(t>0)$的两个交点的横坐标，由对称性可知点B坐标为(x_2,x_1)，$\therefore\frac{t}{x_2}=lnx_2=x_1$，从而$x_1x_2=t$，$x_1=lnx_2$，$\therefore\frac{lnt}{x_1x_2}=\frac{lnt}{t}$，以下同解法 1 .

13. -6

【详解】二项式$(x-y)^6$的展开式通项公式为$T_{r+1}=C_6^rx^{6-r}(-y)^r$，$r\le 6$，$r\in N^*$，

当$r=5$时，$T_6=C_6^5x^{6-5}(-y)^5=-6xy^5$，所以所求系数为$-6$.

故答案为：-6

14. -10

【解析】$\because f(x)=sinx+\frac{1}{x}-4$，$\therefore f(-x)=\sin(-x)+\frac{1}{-x}-4=-sinx-\frac{1}{x}-4$，

$\therefore f(x)+f(-x)=-8$，又$f(-3)=2$，则$f(3)=-8-2=-10$，故答案为：-10.

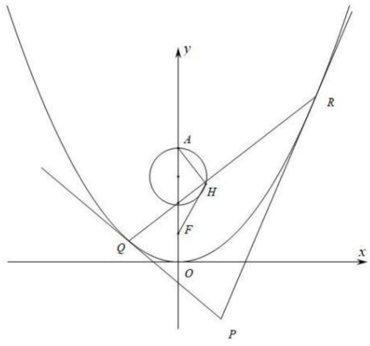
15. $-\frac{1}{3}$

根据偏导数的定义，在求对x偏导数时，$f(x,y)$中y可作为常数，即函数可看作是x的一元函数求导，同理在求对y偏导数时，$f(x,y)$中x可作为常数，即函数可看作是y的一元函数求导，

所以$f_x'(x,y)=2x-2y$，$f_y'(x,y)=-2x+3y^2$，

$f_x'(x_0,y_0)+f_y'(x_0,y_0)=2x_0-2y_0-2x_0+3y_0^2=3y_0^2-2y_0=3(y_0-\frac{1}{3})^2-\frac{1}{3}$，最小值是$-\frac{1}{3}$.

16. 【解析】易知RQ的方程为$mx=2(y-2)$，从而直线RQ过定点$B(0,2)$，从而A在直线RQ上的射影H的轨迹就是$\odot D$：$x^2+(y-3)^2=1$，当FH与$\odot D$相切时，斜率分别为$\sqrt{3}$，$-\sqrt{3}$，由图可知$k\in(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty)$.



17.

【详解】解：（1）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$a_2=a_1+d$，$a_3=a_1+2d$，…………1 分

由题意得$\begin{cases}3a_1+3d=-3\\a_1(a_1+d)(a_1+2d)=8\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=2\\d=-3\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=-4\\d=3\end{cases}$，..............................3 分

所以由等差数列通项公式可得$a_n=2-3(n-1)=-3n+5$或$a_n=-4+3(n-1)=3n-7$.

故$a_n=-3n+5$或$a_n=3n-7$；..............................5 分

（2）当$a_n=-3n+5$时，a_2,a_3,a_1分别为-1，-4，2，不成等比数列；............6 分

当$a_n=3n-7$时，a_2,a_3,a_1分别为-1，2，-4成等比数列，满足条件.

故$|a_n|=|3n-7|=\begin{cases}-3n+7, & n=1,2\\3n-7, & n\geq 3\end{cases}$，..7 分

记数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$S_n=\dfrac{n(3n-11)}{2}$..8 分

$T_{20}=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{20}|=-(a_1+a_2)+(a_3+\cdots+a_{10})=S_{10}-2S_2=105$..................10 分

18.【详解】（1）$2a\sin B=\sqrt{3}b$，由正弦定理，$\sqrt{3}\sin B+\cos B=\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{\sin B+\sin C}{\sin A}$，……1 分

于是$\sqrt{3}\sin B\sin A+\cos B\sin A=\sin B+\sin C=\sin B+\sin(A+B)$，............2 分，即

$\sqrt{3}\sin B\sin A+\cos B\sin A=\sin B+\sin A\cos B+\sin B\cos A$，

得$\sqrt{3}\sin B\sin A=\sin B+\sin B\cos A$，..................3 分

由$B\in(0,\pi)$，则$\sin B\neq 0$，.........4 分

得到$\sqrt{3}\sin A=1+\cos A$，

根据辅助角公式可得，$\sin\left(A-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$，结合$A\in(0,\pi)\Leftrightarrow A-\dfrac{\pi}{6}\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right)$，故$A-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$，可得

$A=\dfrac{\pi}{3}$………………6 分

（2）法一：在$\triangle ABC$中，由余弦定理得：$\cos A=\dfrac{1}{2}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，

得$b^2+c^2-a^2=bc$，①......................7 分

又因为$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$，所以$BD=DC=\dfrac{a}{2}$，且$\angle ADB+\angle ADC=\pi$，

即$\cos\angle ADB+\cos\angle ADC=0$，..................8 分

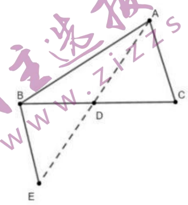
$\triangle ADB$和$\triangle ADC$中，由余弦定理得$b^2+c^2=8+\dfrac{1}{2}a^2$，②........................10 分

联立①②消去a^2得$b^2+c^2=16-bc\geq 2bc\Rightarrow bc\leq\dfrac{16}{3}$..................11 分

（当且仅 $b=c=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立），

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc\le\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

所以 ABC 面积最大值为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ ……………………12 分



法二：延长AD至E，使$AD=DE$，连BE，则$\angle ABE=120^{\circ}$.

$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}b\cdot c\cdot\sin120^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{4}bc$，…………………8 分

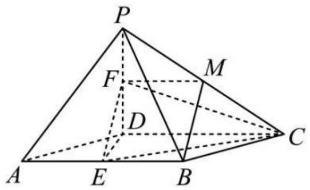
在$\triangle ABC$中，$AB^2+BE^2-2AB\cdot BE\cdot\sin\angle ABE=AE^2$即$c^2+b^2+bc\ge 2bc+bc=3bc$，$\therefore bc\le\frac{16}{3}$，

当且仅当$b=c$时" = "成立，…………………10 分

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}bc\le\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{16}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，当且仅当$b=c$时，$\triangle ABC$的面积最大值为$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$…………12 分

19.

【详解】（1）取 PC 中点 M，连接 FM,BM.



在 $\triangle PCD$ 中，M,F 分别为 PC,PD 的中点，所以 $MF//DC,MF=\dfrac{1}{2}DC$.

在菱形 $ABCD$ 中，因为 $AB//DC,BE=\dfrac{1}{2}DC$，

所以 $BE//MF,BE=MF$.

所以四边形 $BEMF$ 为平行四边形，所以 $EF//BM$.

又因为 $EF\not\subset$ 平面 $PBC,BM\subset$ 平面 PBC，

所以 EF // 平面 PBC.（判定定理 3 条，证明线线平行 2 分，其余两条 1 分）……………………4 分

（2）因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD,DB,DC,DE\subset$ 平面 $ABCD$，

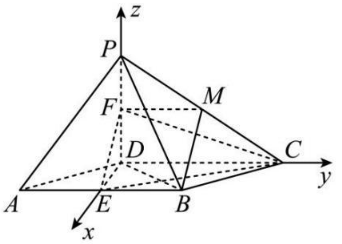
所以 $PD\perp DB,PD\perp DC,PD\perp DE$.

连接 BD，因为 $PB^2=PD^2+BD^2,PC^2=PD^2+DC^2$，且 $PB=PC$，

所以 $BD=DC$，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=BD=AD$，即 $\triangle ADB$ 为正三角形.

又因为 E 为 AB 中点，所以 $DE\perp DC$，………………………………6 分

以 D 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$.



又因为 $AB \mathbin{/\mkern-5mu/} DC, DE \perp AB$.

因为 $\triangle ADB$ 为正三角形且 $AD=2\sqrt{3}$，所以 $DE=3$.

设 $F(0,0,t)(t>0), E(3,0,0), C(0,2\sqrt{3},0)$，……………………7 分

则 $\overrightarrow{EF}=(-3,0,t), \overrightarrow{EC}=(-3,2\sqrt{3},0)$，

根据条件，可得平面 FCD 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(1,0,0)$ ……………………8 分

设平面 EFC 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{EF}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{EC}=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}-3x+tz=0\\ -3x+2\sqrt{3}y=0\end{cases}$，

取 $x=2t$，则 $y=\sqrt{3}t, z=6$，所以 $\overrightarrow{n_2}=(2t,\sqrt{3}t,6)$， ……………10 分

由题意，二面角 $E-FC-D$ 的大小为 45°，

所以 $\left|\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}\right|=\left|\dfrac{2t}{\sqrt{3t^2+4t^2+36}}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $t=\pm 6$（舍负）…………11 分

因为 F 是 PD 的中点，所以 PD 的长为 12…………12 分

经检验符合题意.

20. 【解析】（1）得 2 分即回答 1 题正确或者回答 2 题都错误，所以 $p(2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$， ……1 分

得 3 分即回答 2 题 1 题正确，1 题错误或者回答 3 题都错误，

所以 $p(3)=C_2^1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$； ………………3 分

（2）**方法 1：**由题意可知，X_n 的所有可能取值为 $n,n+1,n+2,\cdots,n+k,\cdots,2n$ …………4 分

$$p(X_n=n+k)=C_n^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k}=C_n^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \left(0\le k\le n, n\in \mathrm{N}^*\right) \quad …………5 分$$

故 X_n 的分布列如下

X_n	n	$n+1$	$\cdots$	$n+k$	$\cdots$	$2n$
P	$C_n^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$C_n^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$\cdots$	$C_n^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$\cdots$	$C_n^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$

所以 $E(X_n)=nC_n^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+(n+1)C_n^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots+(n+k)C_n^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots+2nC_n^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ……8 分

$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\left[n\left(C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^k+\cdots+C_n^n\right)+C_n^1+2C_n^2+\cdots+kC_n^k+\cdots+nC_n^n\right]$ ………9 分

又由 $kC_n^k=k\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}=nC_{n-1}^{k-1}$ ……………10 分

$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^k+\cdots+C_n^n=2^n$，$C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+\cdots+C_{n-1}^k+\cdots+C_{n-1}^{n-1}=2^{n-1}$ ………11 分

$\therefore E(X_n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\left[n\cdot 2^n+n\left(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+\cdots+C_{n-1}^{n-1}\right)\right]=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\left[n\cdot 2^n+n\cdot 2^{n-1}\right]=\frac{3n}{2}$ ………12 分

方法 2：设回答n次，其中正确回答次数为ξ，由于正确回答每题的概率都为$\frac{1}{2}$，且每次回答问题是相互独立的，故$\xi\sim B(n,\frac{1}{2})$，………5 分

又由 $X_n=2\xi+(n-\xi)=n+\xi$ ………7 分

从而 X_n 的分布列及数学期望分别如下

$P(X_n=n+k)=P(\xi=k)=C_n^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k}=C_n^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\ \left(0\le k\le n,n\in\mathrm{N}^*\right)$ ……10 分

$E(X_n)=E(n+\xi)=n+E(\xi)=n+n\cdot\frac{1}{2}=\frac{3n}{2}$ ………12 分

21. 【解析】(1) 易知$S_{\triangle ABR}=S_{\triangle OAR}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot|OR|\cdot|y_A|=2|y_A|\le 2|b|=2b=2\sqrt{5}$，

$\therefore b=\sqrt{5}$，故椭圆的方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.…………4 分

(2) 法 1：设AC的方程为$x=2+ty$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由

$\begin{cases}x=2+ty\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1\end{cases}$，$\Rightarrow(5t^2+9)y^2+20ty-25=0$，…………5 分

$\therefore y_1+y_2=-\frac{20t}{5t^2+9}$，$y_1\cdot y_2=-\frac{25}{5t^2+9}$，$\therefore\frac{y_1+y_2}{y_1\cdot y_2}=\frac{4t}{5}$，…………6 分

设$P(\frac{9}{2},m)$，则$k_2=\frac{2m}{5}$，$k_1+k_3=\frac{m-y_1}{\frac{5}{2}-ty_1}+\frac{m-y_2}{\frac{5}{2}-ty_2}$，…………8 分

$$\therefore \frac{k_2}{k_1+k_3}=\frac{2m}{5}\cdot\frac{25-10t(y_1+y_2)+4t^2y_1\cdot y_2}{2[10m-(2mt+5)(y_1+y_2)+4ty_1\cdot y_2]}$$

$$=\frac{m}{5}\cdot\frac{25-10t\cdot\left(-\frac{20t}{5t^2+9}\right)+4t^2\cdot\left(-\frac{25}{5t^2+9}\right)}{10m-(2mt+5)\cdot\left(-\frac{20t}{5t^2+9}\right)+4t\cdot\left(-\frac{25}{5t^2+9}\right)}$$

$$=\frac{m}{5}\cdot\frac{25\left[(5t^2+9)+4t^2\right]}{10m\left[(5t^2+9)+4t^2\right]}$$

$$=\frac{m}{5}\cdot\frac{5}{2m}=\frac{1}{2}.$$

…………12 分

法 2：设AC的方程为$x=2+ty$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由

$\begin{cases}x=2+ty\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1\end{cases}$，$\Rightarrow(5t^2+9)y^2+20ty-25=0$，…………5 分

$\therefore y_1+y_2=-\frac{20t}{5t^2+9}$，$y_1\cdot y_2=-\frac{25}{5t^2+9}$，………………6 分

$\therefore \frac{y_1+y_2}{y_1\cdot y_2}=\frac{4t}{5}$，即$y_1+y_2=\frac{4t}{5}y_1\cdot y_2$，…………………7 分

设$P(\frac{9}{2},m)$，则

$$k_1+k_3=\frac{m-y_1}{\frac{5}{2}-ty_1}+\frac{m-y_2}{\frac{5}{2}-ty_2}=\frac{5m-\left(mt+\frac{5}{2}\right)(y_1+y_2)+2ty_1\cdot y_2}{\frac{25}{4}-\frac{5t}{2}(y_1+y_2)+t^2y_1\cdot y_2}$$

$$=\frac{5m-\left(mt+\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{4t}{5}y_1\cdot y_2+2ty_1\cdot y_2}{\frac{25}{4}-\frac{5t}{2}\frac{4t}{5}y_1\cdot y_2+t^2y_1\cdot y_2}=\frac{5m-\frac{4m}{5}t^2y_1\cdot y_2}{\frac{25}{4}-t^2y_1\cdot y_2}$$

$$=\frac{4m}{5}=2\cdot k_2，$$ ……………………11 分

$\therefore \frac{k_2}{k_1+k_3}=\frac{1}{2}$.…………12 分

22. 【解析】

（1）依题意得，$f(0)=-1=a$，此时$f(x)=\sin^2x-e^x-x$，$f'(x)=\sin 2x-e^x-1$，……1 分

则切线斜率为$f'(0)=-2$，…………2 分

故切线方程：$y+1=-2(x-0)$，即$y=-2x-1$…………3 分

（2）时$a=-1$，$f(x)=sin^2x-e^x-x$，则$f'(x)=sin2x-e^x-1$，

$\therefore f'(x)=sin2x-e^x-1\le-e^x<0$，……4 分

$\therefore f'(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减，…………5 分

又$f(0)=-1$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}$，$\therefore f(x)$值域为$\left[1-e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2},-1\right]$.…………6 分

（3）$g(x)=f(x)+\frac{1}{2}cos2x-a-\frac{1}{2}=ae^{x}-x-a(0<a\leq 1)$，

$g'(x)=ae^{x}-1=0\Rightarrow x=-lna$，

$g'(x)>0\Rightarrow x>-lna$；$g'(x)<0\Rightarrow x<-lna$. $g(x)$减区间为$(-\infty,-lna)$，增区间为$(-lna,+\infty)$，……7 分

$\therefore g(x)\geq g(-lna)=1+lna-a$.

当$a=1$时，$1+lna-a=0$，$\therefore g(x)\geq 0$，$\therefore g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有且仅有一个零点；……8 分

当$0<a<1$时，令$r(a)=1+lna-a(0<a<1)$，$r'(a)=\frac{1}{a}-1=\frac{1-a}{a}>0$，$\therefore r(a)$在$(0,1)$上单调递增，

$\therefore r(a)<r(1)=0$，…………9 分

又$g(0)=0$，$\therefore g(x)$在$(-\infty,-lna)$上有一个零点，又$g(-2lna)=\frac{1}{a}+2lna-a$，…………11 分

令$\varphi(a)=\frac{1}{a}-a+2lna(0<a<1)$，则$\varphi'(a)=-\frac{(a-1)^2}{a}<0$，$\therefore \varphi(a)$在$(0,1)$上单调递减，

$\therefore \varphi(a)>\varphi(1)=0$，$\therefore g(-2lna)>0$，$\therefore g(x)$在$(-lna,-2lna)$上有一个零点.……12 分

综上所述，$a=1$时，$g(x)$有一个零点，$0<a<1$时，$g(x)$有 2 个零点.

注：若用无穷远代替$x=-2\ln a$，该 2 分不给