江西省五市九校协作体 2023 届第一次联考数学（文科）答案

一、选择题

1-5 D D B A C　**6-10** D C D D A　**11-12** D B

二、填空题

13、5　**14、** $\frac{20}{21}$　**15、** $\frac{3\sqrt{2}}{10}$　**16、** $\frac{8}{13}$

三、解答题

17、

(1) 解：数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，当$n\geq 2$时，$(n-1)a_n^2-na_{n-1}^2=n(n-1)$，

整理得：$\frac{a_n^2}{n}-\frac{a_{n-1}^2}{n-1}=1$，

$\therefore$数列$\left\{\frac{a_n^2}{n}\right\}$是以 1 为首项，1 为公差的等差数列.。。。。。。6 分

(2) $\frac{a_n^2}{n}=1+n-1=n$，$\therefore a_n^2=n^2$，故$a_n=n$

$b_n=\frac{a_n}{2^n}=\frac{n}{2^n}$，

$\therefore T_n=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2^2}+3\times\frac{1}{2^3}+\cdots+n\cdot\frac{1}{2^n}$ ①，

则$\frac{1}{2}T_n=1\times\frac{1}{2^2}+2\times\frac{1}{2^3}+3\times\frac{1}{2^4}+\cdots+n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$ ②，

① - ②得：$\frac{1}{2}T_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)-n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}=1-\frac{n+2}{2^{n+1}}$，

$\therefore T_n=2-\frac{n+2}{2^n}$.　。。。。。。12 分

18、 由表格数据，得$\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5+6+7}{7}=4$，

$\bar{y}=\frac{9.4+9.6+9.9+10.1+10.6+11.1+11.4}{7}=10.3$，。。。。。。2 分

所以$\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=(-3)\times(-0.9)+(-2)\times(-0.7)$

$+(-1)\times(-0.4)+0\times(-0.2)+1\times0.3+2\times0.8+3\times1.1=9.7$，

$\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2=(1-4)^2+(2-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2+(6-4)^2+(7-4)^2=28$，

$\sum_{i=1}^{7}(y_i-\overline{y})^2=(9.4-10.3)^2+(9.6-10.3)^2+(9.9-10.3)^2+(10.1-10.3)^2+(10.6-10.3)^2+$

$(11.1-10.3)^2+(11.4-10.3)^2=3.44$，。。。。。。5分

所以相关系数$r=\frac{9.7}{\sqrt{28}\times\sqrt{3.44}}=\frac{97}{20\sqrt{24.08}}\approx 0.99$.

因为相关系数$r\approx 0.99$，接近1，所以y与x具有线性相关关系，且正相关性很强.。。。。。7分

因为$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})^2}=\frac{9.7}{28}\approx 0.35$，

所以$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}\approx 10.3-0.35\times 4=8.90$，

所以y关于x的线性回归方程为$\hat{y}=0.35x+8.90$.。。。。。。12分

19、

(1) 证明：取EC的中点G，连接BD交AC于N，连接GN，GF，

因为$ABCD$是菱形，所以$AC\perp BD$，且N是AC的中点，

所以$GN//AE$且$GN=\frac{1}{2}AE$，又$AE//BF$，$AE=2BF=2$，

所以$GN//BF$且$GN=BF$，所以四边形$BNGF$是平行四边形，

所以$GF//BN$，

又$EA\perp$平面$ABCD$，$BN\subset$平面$ABCD$，所以$EA\perp BN$，

又因为$AC\bigcap EA=A$，$AC,EA\subset$平面EAC，

所以$NB\perp$平面EAC，所以$GF\perp$平面EAC，

又$GF\subset$平面EFC，所以平面$EFC\perp$平面EAC；。。。。。。6分

(2) 利用$V_{B-CEF}=V_{C-BEF}$，求得点B到平面CEF的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$。。。。。。12分

20、

(1) $\because f(x)$是定义域为R的奇函数，

$\therefore f(-x)=-f(x)$，即$-\frac{1}{3}(-x)^3+a(-x)^2-bx+ab=\frac{1}{3}x^3-ax^2-bx-ab$，

故$2a(x^2+b)=0$，

$\therefore a=0$，且$f(0)=0$.

$\therefore f(x)=-\frac{1}{3}x^3+bx$

$\therefore f'(x)=-x^2+b$.

当$b\le 0$时，$f'(x)=-x^2+b\le 0$，此时$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递减，

$f(x)$在$\mathbf{R}$上只有 1 个零点，不合题意.

当$b>0$时，令$f'(x)=-x^2+b>0$，解得$-\sqrt{b}<x<\sqrt{b}$，

令$f'(x)=-x^2+b<0$，解得$x>\sqrt{b}$或$x<-\sqrt{b}$，

\ $f(x)$在$(-\infty,-\sqrt{b})$，$(\sqrt{b}+\infty)$上单调递减，在$(-\sqrt{b},\sqrt{b})$上单调递增.

$\because f(x)$在$\mathbf{R}$上有 3 个零点，

$\therefore f(\sqrt{b})>0$且$f(-\sqrt{b})<0$，

由函数为奇函数，故只需$f(\sqrt{b})=-\frac{1}{3}(\sqrt{b})^3+b\sqrt{b}>0$，

即$\frac{2b}{3}\sqrt{b}>0$，$\therefore b>0$.

$\therefore$实数b的取值范围是$(0,+\infty)$.。。。。。。6 分

(2) $f'(x)=-x^2+2ax+b$，

由已知可得$f'(1)=-1+2a+b=0$，且$f(1)=-\frac{1}{3}+a+b+ab=-\frac{22}{3}$，

解得$\begin{cases}a=2\\b=-3\end{cases}$或$\begin{cases}a=-2\\b=5\end{cases}$，

当$a=2$，$b=-3$时，$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x-6$，$f'(x)=-x^2+4x-3$.

令$f'(x)\ge 0$，即$-x^2+4x-3\ge 0$，解得$1\le x\le 3$，

易知$x=1$是$f(x)$的极小值点，与题意不符；

当$a=-2$，$b=5$时，$f(x)=-\frac{1}{3}x^3-2x^2+5x-10$，$f'(x)=-x^2-4x+5$.

令$f'(x)\geq 0$，即$-x^2-4x+5\geq 0$，解得$-5\leq x\leq 1$，

易知$x=1$是$f(x)$的极大值点，符合题意，故$a=-2$，$b=5$.

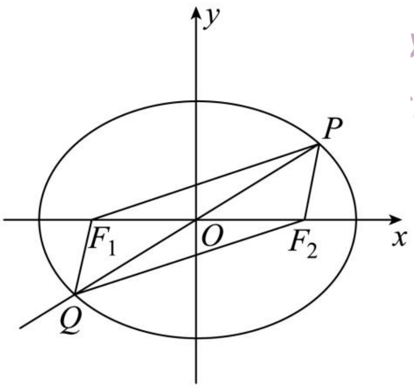
$\because x\in[-1,2]$，

\ $f(x)$在$[-1,1]$上单调递增，在$[1,3]$上单调递减.

又$f(-1)=-\dfrac{50}{3}$，$f(1)=-\dfrac{22}{3}$，$f(3)=-22$.

\ $f(x)$在$[-1,2]$上的值域为$\left[-22,-\dfrac{22}{3}\right]$。。。。。。。12 分

21、



(1)

设椭圆C的右焦点为F_2，连接PF_2，QF_2

根据椭圆的对称性可知$|QF_1|=|PF_2|$，四边形PF_1QF_2为平行四边形.

又$|PF_1|=3|QF_1|$，所以$|PF_1|=3|PF_2|$

而$|PF_1|+|PF_2|=2a$，所以$|PF_1|=\dfrac{3a}{2}$，$|PF_2|=\dfrac{a}{2}$

在四边形PF_1QF_2中，$\cos\angle PF_1Q=-\dfrac{1}{3}$，

所以$\cos\angle F_1PF_2=\cos(\pi-\angle PF_1Q)=-\cos\angle PF_1Q=\dfrac{1}{3}$，

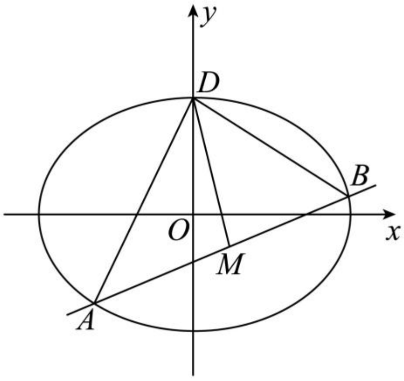
在$\triangle PF_1F_2$中，根据余弦定理得

$$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cdot\cos\angle F_1PF_2$$

即$(2c)^2=\left(\dfrac{3a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2-2\cdot\dfrac{3a}{2}\cdot\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{1}{3}$

化简得$a^2=2c^2$.

所以椭圆C的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$；。。。。。。5 分



(2)

因为椭圆C的上顶点为$D(0,2)$，所以$b=2$，所以$a^2=b^2+c^2=4+c^2$，

又由（1）知$2c^2=a^2$，解得$a^2=8$，

所以椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

在$\triangle ABD$中，$\angle AMD=2\angle ABD$，$\angle AMD=\angle ABD+\angle BDM$，

所以$\angle ABD=\angle BDM$，从而$|DM|=|BM|$，

又M为线段AB的中点，即$|BM|=\frac{1}{2}|AB|$，所以$|DM|=\frac{1}{2}|AB|$，

因此$\angle ADB=90°$，从而$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=0$，

根据题意可知直线l的斜率一定存在，设它的方程为$y=kx+m$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$消去$y$得$(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-8=0$ ①，

$\Delta=(4km)^2-4(2m^2-8)(2k^2+1)>0$，

根据韦达定理可得$x_1+x_2=-\frac{4km}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-8}{2k^2+1}$，

所以$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=(x_1,y_1-2)\cdot(x_2,y_2-2)=(1+k^2)x_1x_2+k(m-2)(x_1+x_2)+(m-2)^2$

$=(1+k^2)\frac{2m^2-8}{2k^2+1}+k(m-2)\left(-\frac{4km}{2k^2+1}\right)+(m-2)^2$

所以$(1+k^2)\frac{2m^2-8}{2k^2+1}+k(m-2)\left(-\frac{4km}{2k^2+1}\right)+(m-2)^2=0$，

整理得$(m-2)(3m+2)=0$，解得$m=2$或$m=-\frac{2}{3}$.

又直线l不经过点$(0,2)$，所以$m=2$舍去，

于是直线l的方程为$y=kx-\frac{2}{3}$，恒过定点$\left(0,-\frac{2}{3}\right)$，

该点在椭圆C内，满足关于x的方程①有两个不相等的解，

所以直线l恒过定点，定点坐标为$\left(0,-\frac{2}{3}\right)$.。。。。。。12 分

22、

(1) 对点$P\left(2,-\frac{\pi}{6}\right)$，设其直角坐标为$(x,y)$，则$x=2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3},y=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-1$，即其直角坐标为$\left(\sqrt{3},-1\right)$，

故$\overset{\frown}{OQ}$在直角坐标系下的方程为：$\left(x-\sqrt{3}\right)^2+\left(y+1\right)^2=4,x\in\left[0,\sqrt{3}\right],y\in\left[0,1\right]$，

由$x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$可得：$\rho=2\sqrt{3}\cos\theta-2\sin\theta=-4\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$，

故$\overset{\frown}{OQ}$的极坐标方程为：$\rho=-4\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right),\theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$.。。。。。。5 分

(2) 由题可得曲线C的普通方程为：$y=-\sqrt{3}x+2$，联立$\left(x-\sqrt{3}\right)^2+\left(y+1\right)^2=4$，

可得$x^2-2\sqrt{3}x+2=0$，解得$x=\sqrt{3}+1$或$\sqrt{3}-1$，又$x\in\left[0,\sqrt{3}\right]$，故$x=\sqrt{3}-1$，则$y=\sqrt{3}-1$，

即曲线 C与$\overset{\frown}{OQ}$交点的直角坐标为$\left(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}-1\right)$，设其极坐标为$(\rho,\theta)$，

则$\rho=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，$\theta=\frac{\pi}{4}$，

即曲线 C与$\overset{\frown}{OQ}$交点的极坐标为$\left(\sqrt{6}-\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$.。。。。。。10 分

23、

(1) 当 $a=3$ 时，$f(x)\le 2$即为$|x-1|+|2x-3|\le 2$，

等价于$\begin{cases}x\ge\frac{3}{2}\\x-1+2x-3\le 2\end{cases}$或$\begin{cases}1<x<\frac{3}{2}\\x-1+3-2x\le 2\end{cases}$或$\begin{cases}x\le 1\\1-x+3-2x\le 2\end{cases}$，

解得$\frac{3}{2}\le x\le 2$或$1<x<\frac{3}{2}$或$\frac{2}{3}\le x\le 1$，

则原不等式的解集为$[\frac{2}{3},2]$；。。。。。。。5 分

(2) 不等式$|x-1|+f(x)<3$的解集非空等价于$|2x-2|+|2x-a|<3$有解.

由$|2x-2|+|2x-a|\ge|2x-2+a-2x|=|a-2|$，

（当且仅当$(2x-2)(2x-a)\le 0$时取得等号），

所以$|a-2|<3$，解得$-1<a<5$，故 a 的取值范围是$(-1,5)$．。。。。。。10 分