怀仁一中高三年级第三次模拟考试·数学

参考答案、提示及评分细则

1.C 设$z=a+bi$,则$2z-\bar{z}=2(a+bi)-(a-bi)=a+3bi=3+i\Rightarrow a=3,b=\frac{1}{3}$,∴$|z|=\sqrt{9+\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{82}}{3}$.

2.A 集合S的元素中,满足除以4余1的整数有5,9两个.

3.B 由题意可知,$2c=2\sqrt{5},2a=2$,所以$c=\sqrt{5},a=1$,所以$b=\sqrt{c^2-a^2}=2$,则$\frac{b}{a}=2$.

4.C 因为$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$,所以$\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha$,所以$(\sqrt{3}+1)\cos\alpha=(\sqrt{3}-1)\sin\alpha$,所以$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}$.

5.B 把甲、乙捆绑在一起,然后与余下的两个排列,再把捆绑的甲、乙和丙一起插空,所求概率为$\frac{2A_2^2A_3^2}{A_5^5}=\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$.

6.D 易知母线长为$\sqrt{(\sqrt{7})^2+(2\sqrt{2}-\sqrt{2})^2}=3$,且上底面圆周为$2\sqrt{2}\pi$,下底面圆周为$4\sqrt{2}\pi$,易知展开图为圆环的一部分,圆环所在的小圆半径为3,则大圆半径为6,所以面积$S=\frac{1}{2}\times6\times4\sqrt{2}\pi-\frac{1}{2}\times3\times2\sqrt{2}\pi=9\sqrt{2}\pi$.

7.C 设函数$f(x)=e^x+\frac{1}{e^x}$,则$f(x)$为偶函数,且当$x\geqslant0$时,$f'(x)=e^x-\frac{1}{e^x}\geqslant0$,所以$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,在$(0,+\infty)$上单调递增,因为$\sin1<\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\tan2<-1<\cos3<-\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以$-\tan2>1>-\cos3>\frac{\sqrt{3}}{2}>\sin1>0$,又$a=f(\sin1),b=f(\tan2)=f(-\tan2),c=f(\cos3)=f(-\cos3)$,所以$b>c>a$.

8.C 由题意可知点C在以线段AB为直径的圆上,设AB的中点坐标为$M(a,b)$,有$|OM|=|AM|=|BM|=1$,可得$a^2+b^2=1$,由$|MP|\leqslant|OP|+1$,$|OP|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$,有$|CP|\leqslant|MP|+1\leqslant|OP|+1+1=2+1+1=4$.当且仅当$O,M,P$三点共线时取等号.

9.ABD 取$n=1$,则$a_1=\frac{a_1^2+1}{2}$,解得$a_1=1$,即A正确;

由A可知,$S_n=\frac{n^2+n}{2}$,则$d=S_2-2a_1=3-2=1$,即B正确;

因为$S_{2n}=\frac{(2n)^2+2n}{2}=2n^2+n=2a_n^2+a_n$,即C错误;

因为$2S_n-a_n=n^2$,且$1+3+\cdots+(2n-1)=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$,即D正确.

10.BC 因为$E(X)=np,E(Y)=n(1-p)$,即A错误;

因为$D(X)=np(1-p),D(Y)=n(1-p)p$,即B正确;

因为A,B独立,所以$P(AB)=p(1-p)$,所以$E(Z)=np(1-p)=D(X)$,即C正确;

因为$n\cdot D(Z)=n^2p(1-p)[1-p(1-p)]$,$D(X)\cdot D(Y)=n^2p^2(1-p)^2$,即D错误.

11.AB 若$m=4\sqrt{2}$,则$AB\perp AC$,则$\triangle ABC$外接圆的半径$r=2\sqrt{2}$,所以球心O到平面ABC的距离$d=\sqrt{4^2-(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$,所以三棱锥高的最大值为$4+2\sqrt{2}$,所以体积的最大值为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4^2\times(4+2\sqrt{2})=\frac{32+16\sqrt{2}}{3}$,即A正确;

设BC的中点为H,易知$PH\perp BC,AH\perp BC$,所以$BC\perp$平面POA,所以平面$POA\perp$平面ABC,即B正确;

设直线OP与球的另一交点为P_0,若$OP\perp$平面ABC,则$OP_0\perp$平面ABC,即C错误;

当m最大时,O,A,B,C共面,因为$OB=OC=AB=AC=OA=4$,所以$\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$,所以$BC=m=4\sqrt{3}$,即D错误.

12.BC $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$在$[0,2\pi]$上有且仅有6个极值点,借助图象可知$f(x)$在$[0,2\pi]$上有5或6个零点,有且仅有3个极大值点.故A错误,B正确;当$x\in[0,2\pi]$时,$\omega x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},2\pi\omega+\frac{\pi}{3}\right]$,因为$f(x)$在

$[0,2\pi]$上有且仅有 6 个最高点或最低点，所以$\frac{11}{2}\pi\leqslant 2\pi\omega+\frac{\pi}{3}<\frac{13}{2}\pi$，解得$\frac{31}{12}\leqslant\omega<\frac{37}{12}$．故 C 正确，D 错误．

13．$\sqrt{5}$　易知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(k+3,2k+4)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(k-3,2k-4)$，所以$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=k^2-9+4k^2-16=0$，解得 $k=\pm\sqrt{5}$．由 $k>0$，可得 $k=\sqrt{5}$．

14．$\frac{2x}{x^2+1}$或$\begin{cases}x,x\in[-1,1],\\ \frac{1}{x},x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\end{cases}$（答案不唯一）　由题意可知，$f(x)$仅有一个零点 $x=0$，结合单调性，可知 $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$或 $f(x)=\begin{cases}x,x\in[-1,1],\\ \frac{1}{x},x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty).\end{cases}$

15．$\frac{3}{10}$　因为$(x_0-\sqrt{10})^2+(y_0-\sqrt{10})^2=8$，所以 $x_0^2+y_0^2-2\sqrt{10}(x_0+y_0)+12=0$，因为 $y_0^2=2p_1x_0$，$x_0^2=2p_2y_0$，所以 $x_0y_0=4p_1p_2$，当 OP 与圆相切时，$|OP|^2=x_0^2+y_0^2=|OC|^2-8=12$，所以 $x_0+y_0=\frac{12}{\sqrt{10}}$，所以 $2x_0y_0=(x_0+y_0)^2-(x_0^2+y_0^2)=\frac{12}{5}$，所以 $p_1p_2=\frac{x_0y_0}{4}=\frac{3}{10}$．

16．70　540　$f'(x)=3x^2-12x+12$，则 $f(1)=7$，$f'(1)=3$，所以曲线 $y=f(x)$在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=3x+4$，且易知 $f(x)\leqslant 3x+4(x\leqslant 2)$，所以 $f(a_n)\leqslant 3a_n+4$，所以 $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{10})\leqslant 3(a_1+a_2+\cdots+a_{10})+40=70$，当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_{10}=1$ 时，等号成立；曲线 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的切线为 $y=(3x_0^2-12x_0+12)(x-x_0)+x_0^3-6x_0^2+12x_0$，因为 $b_n\geqslant 0$，则令此切线过原点，解得 $x_0=3$ 或 $x_0=0$，所以曲线 $y=f(x)$在 $x=3$ 处的切线方程为 $y=3x$，且 $f(x)\geqslant 3x(x\geqslant 0)$，所以 $f(b_1)+f(b_2)+\cdots+f(b_{100})\geqslant 3(b_1+b_2+\cdots+b_{100})=540$，当且仅当 $b_n=0$ 或 $b_n=3$ 时，等号成立，取 $b_1=b_2=\cdots=b_{60}=3$，$b_{61}=b_{62}=\cdots=b_{100}=0$，即$\{b_n\}$的前 100 项中有 60 项为 3，40 项为 0 时，等号成立．

17．解：(1)证明：由$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\frac{1}{a_{n+1}}-1}{\frac{1}{a_n}-1}=\frac{\frac{2-a_n}{a_n}-1}{\frac{1}{a_n}-1}=\frac{2-2a_n}{1-a_n}=2$ ………… 3 分

故数列$\{b_n\}$是公比为 2 的等比数列 ………… 4 分

(2)由 $b_1=\frac{1}{a_1}-1=2$ 及(1)有 $b_n=2^n$ ………… 5 分

可得$\frac{1}{a_n}-1=2^n$，可得 $a_n=\frac{1}{2^n+1}$ ………… 6 分

(3)由 $c_n=\frac{2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=\frac{(2^{n+1}+1)-(2^n+1)}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}$ ………… 8 分

$S_n=\left(\frac{1}{2^1+1}-\frac{1}{2^2+1}\right)+\left(\frac{1}{2^2+1}-\frac{1}{2^3+1}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}-\frac{1}{2^n+1}\right)+\left(\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}\right)$

$S_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{2^{n+1}+1}$. ………… 10 分

18．解：(1)由余弦定理有 $a^2+b^2-c^2=a^2\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+ac\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$， ………… 2 分

可得 $a^2+b^2-c^2=\frac{a(a^2+b^2-c^2)}{2b}+\frac{a(b^2+c^2-a^2)}{2b}$， ………… 3 分

可得 $a^2+b^2-c^2=\frac{2ab^2}{2b}$，………… 4 分

有 $a^2+b^2-c^2=ab$，

有 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$，………… 5 分

又由 $0<C<\pi$，可得 $C=\frac{\pi}{3}$； ………… 6 分

(2)设 $CD=m$，$CE=n$，

由$\triangle CDE$ 的面积为$\sqrt{3}$，有$\frac{1}{2}mn\times\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，可得 $mn=4$，………… 7 分

由余弦定理有 $DE=\sqrt{m^2+n^2-mn}=\sqrt{(m+n)^2-3mn}=\sqrt{(m+n)^2-12}$，………… 8 分

由$\triangle CDE$ 的周长为 6，有 $m+n+\sqrt{(m+n)^2-12}=6$，解得 $m+n=4$， ………… 10 分

联立方程$\begin{cases}m+n=4,\\ mn=4,\end{cases}$解得 $m=n=2$， ………… 11 分

又由$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{DA}$,$E$ 为 BC 的中点,可得 $AC=3$,$BC=4$,

由余弦定理可得 $AB=\sqrt{3^2+4^2-2\times3\times4\times\frac{1}{2}}=\sqrt{13}$. …………………………………………… 12 分

19. 解:(1)X 的取值为 1 和 $n+1$, ………………………………………………………………………… 1 分

$P(X=1)=(1-p)^n$, ……………………………………………………………………………………… 2 分

$P(X=n+1)=1-(1-p)^n$, …………………………………………………………………………… 3 分

随机变量 X 的分布列为:

X	1	$n+1$
P	$(1-p)^n$	$1-(1-p)^n$

…… 4 分

可得 $E(X)=1\times(1-p)^n+(n+1)\times[1-(1-p)^n]=n+1-n(1-p)^n$; ……………………………… 6 分

(2)由(1)可知每位居民检测的次数约为$\frac{E(X)}{n}=\frac{n+1-n(1-p)^n}{n}\approx\frac{n+1-n(1-np)}{n}=\frac{1+pn^2}{n}=\frac{1}{n}+pn$,

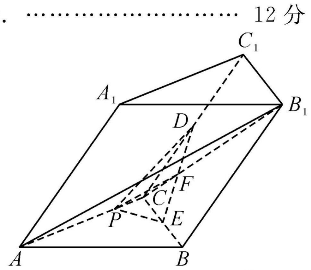
……………………………………………………………………………………………………… 9 分

又由$\frac{1}{n}+pn\geqslant2\sqrt{\frac{1}{n}\times pn}=2\sqrt{p}=2\sqrt{0.0001}=0.02$, ………………………………………… 10 分

当且仅当$\frac{1}{n}=0.0001n$,即 $n=100$ 时等号成立. ………………………………………………… 11 分

故当 $n=100$ 时,采用“100 合 1”,这一轮核酸检测中每位居民检测的次数最少. ……………… 12 分

20. 解:(1)如图,连接 B_1C 与 DE 相交于 F,连接 PF, ……………………… 1 分



$\because AB_1\,/\!/$平面 PDE,平面 $AB_1C\cap$平面 $PDE=PF$,$AB_1\subset$平面 AB_1C,

$\therefore AB_1\,/\!/\,PF$, …………………………………………………………………… 2 分

$\because BE=CE$,$CD=DC_1$,$\therefore ED\,/\!/\,BC_1$,$B_1F=3CF$, ……………………… 3 分

$\because AB_1\,/\!/\,PF$,$B_1F=3CF$,$\therefore AP=3PC$,………………………………………… 4 分

$\therefore$点 P 是线段 AC 上靠近点 C 的四等分点; ……………………………… 5 分

(2)如图,取 AB 的中点 O,连接 OC,OA_1,

$\because$四边形 ABB_1A_1 为边长为 2 的菱形,$\angle A_1AB=60°$,

$\therefore A_1B=2$,$\triangle AA_1B$ 为等边三角形,

$\because OA=OB$,$\triangle AA_1B$ 为等边三角形,$\therefore OA_1\perp AB$,

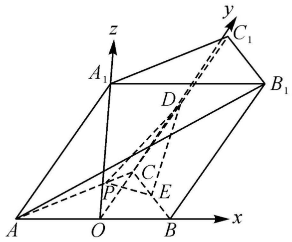
$\because$平面 $ABB_1A_1\perp$平面 ABC,平面 $ABB_1A_1\cap$平面 $ABC=AB$,$OA_1\perp AB$,

$OA_1\subset$平面 ABB_1A_1,

$\therefore OA_1\perp$平面 ABC,

$\because\triangle ABC$ 为等边三角形,$OA=OB$,$\therefore OC\perp AB$,可得 OB,OC,OA_1 两两垂直,

……………………………………………………………………………… 7 分



建立如图所示的空间直角坐标系,可得 $O(0,0,0)$,$B(1,0,0)$,$A(-1,0,0)$,$C(0,\sqrt{3},0)$,$A_1(0,0,\sqrt{3})$,$E\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$,$P\left(-\frac{1}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4},0\right)$,$B_1(2,0,\sqrt{3})$,$C_1(1,\sqrt{3},\sqrt{3})$,$D\left(\frac{1}{2},\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, …

……………………………………………………………………………………………………… 8 分

设平面 PDE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

由$\overrightarrow{PE}=\left(\frac{3}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4},0\right)$,$\overrightarrow{ED}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

有$\begin{cases}\overrightarrow{PE}\cdot\boldsymbol{m}=\frac{3}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{4}y=0,\\ \overrightarrow{ED}\cdot\boldsymbol{m}=\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\end{cases}$ 取 $x=1$,$y=\sqrt{3}$,$z=-\sqrt{3}$,可得 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{3},-\sqrt{3})$, ……………………… 9 分

设平面 AB_1C_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$,

由$\overrightarrow{AB_1}=(3,0,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{C_1B_1}=(1,-\sqrt{3},0)$,

有$\begin{cases}\overrightarrow{AB_1}\cdot\boldsymbol{n}=3a+\sqrt{3}c=0,\\ \overrightarrow{C_1B_1}\cdot\boldsymbol{n}=a-\sqrt{3}b=0,\end{cases}$取 $a=\sqrt{3}$,$b=1$,$c=-3$,可得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,-3)$, ……………………… 10 分

可得 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=5\sqrt{3}$,$|\boldsymbol{m}|=\sqrt{7}$,$|\boldsymbol{n}|=\sqrt{13}$,

有 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{7}\times\sqrt{13}}=\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{91}}$,

可得平面 PDE 和平面 AB_1C_1 所成二面角的正弦值为 $\sqrt{1-\frac{75}{91}}=\frac{4\sqrt{91}}{91}$. ………………………… 12分

21.(1)解:由题意有 $\begin{cases} b=\sqrt{3}, \\ \frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1, \end{cases}$ 解得 $a=2, b=\sqrt{3}$, ………………………… 2分

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………… 3分

(2)证明:设点 P、Q 的坐标分别为 (x_1,y_1),(x_2,y_2).

由(1)知,点 A 的坐标为 $(-2,0)$,点 B 的坐标为 $(2,0)$, ………………………… 4分

直线 BP 的方程为 $y=k(x-2)$.

联立方程 $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1, \\ y=k(x-2), \end{cases}$ 消去 y 后整理为 $(4k^2+3)x^2-16k^2x+(16k^2-12)=0$,

有 $2x_1=\frac{16k^2-12}{4k^2+3}$,可得 $x_1=\frac{8k^2-6}{4k^2+3}$,$y_1=k\left(\frac{8k^2-6}{4k^2+3}-2\right)=-\frac{12k}{4k^2+3}$. ………………………… 7分

联立方程 $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1, \\ y=2k(x+2), \end{cases}$ 消去 y 后整理为 $(16k^2+3)x^2+64k^2x+(64k^2-12)=0$,

有 $-2x_2=\frac{64k^2-12}{16k^2+3}$,可得 $x_2=\frac{6-32k^2}{16k^2+3}$,$y_2=2k\left(\frac{6-32k^2}{16k^2+3}+2\right)=\frac{24k}{16k^2+3}$. ………………………… 9分

由对称性知,直线 PQ 过的定点在 x 轴上,设定点 M 的坐标为 $(m,0)$.

由意题有 $k_{PM}=k_{QM}$,有 $\dfrac{\frac{-12k}{4k^2+3}}{\frac{8k^2-6}{4k^2+3}-m}=\dfrac{\frac{24k}{16k^2+3}}{\frac{6-32k^2}{16k^2+3}-m}$,化简为 $(3m+2)(8k^2+3)=0$,

得 $m=-\frac{2}{3}$,

故直线 PQ 过定点 $\left(-\frac{2}{3},0\right)$. ………………………… 12分

22.解:(1)由 $f'(x)=2x^2e^x-2ax=2x(xe^x-a)$,有 $f'(1)=2(e-a)$,$f(1)=2e-a-e=e-a$, ………… 2分

可得切线 l 的方程为 $y-(e-a)=2(e-a)(x-1)$,整理为 $y=2(e-a)x+a-e$, ………… 3分

代入点 $(0,1-e)$,有 $1-e=a-e$,解得 $a=1$,

故实数 a 的值为1. ………………………… 4分

(2)由 $f'(x)=2x^2e^x-2ax=2x(xe^x-a)$, ………………………… 5分

①当 $x<0$ 时,由 $a>0$,有 $xe^x-a<0$,可得 $f'(x)>0$; ………………………… 6分

②当 $x\geqslant0$ 时,令 $g(x)=xe^x(x\geqslant0)$,有 $g'(x)=(x+1)e^x>0$,可得函数 $g(x)$ 为增函数,又由 $g(0)=0$,$g(a)=ae^a>a$,故存在 $m\in(0,a)$,使得 $g(m)=0$,即 $a=me^m$, ………………………… 7分

可知,当 $0<x<m$ 时,$xe^x-a<0$,此时 $f'(x)<0$;$x>m$ 时,$xe^x-a>0$,此时 $f'(x)>0$. ………… 8分

由上知,函数 $f(x)$ 的增区间为 $(-\infty,0)$,$(m,+\infty)$,减区间为 $(0,m)$. ………………………… 9分

令 $h(x)=(2x^2-4x+4)e^x(x<0)$,有 $h'(x)=2x^2e^x>0$,可得函数 $h(x)$ 单调递增,有 $h(x)<4$,

又由 $h(x)=[2(x-1)^2+2]e^x>0$,可得 $0<h(x)<4$,有 $f\left(-\frac{2}{\sqrt{a}}\right)<4-a\times\left(-\frac{2}{\sqrt{a}}\right)^2-e=-e<0$,

又由 $f(0)=4-e>0$,故函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{2}{\sqrt{a}},0\right)$ 有且仅有一个零点. ………………………… 10分

由上知,若函数 $f(x)$ 有且仅有3个零点,必有 $f(m)=(2m^2-4m+4)e^m-am^2-e$
$=(2m^2-4m+4)e^m-m^3e^m-e=(-m^3+2m^2-4m+4)e^m-e<0$.

令 $\varphi(x)=(-x^3+2x^2-4x+4)e^x-e(x>0)$,有 $\varphi'(x)=-(x^3+x^2)e^x<0$,可得函数 $\varphi(x)$ 为减函数,

又由 $\varphi(1)=e-e=0$,可得当 $f(m)<0$ 时,$m>1$,有 $a=me^m>e$,

当 $x>2+\sqrt{\frac{e}{a}}$ 且 $e^x>a$ 时,有 $a(x-2)^2>e$,$x>\ln a$,$f(x)>a(2x^2-4x+4)-ax^2-e=a(x-2)^2-e>0$.

故当 $a>0$ 时,若函数 $f(x)$ 有且仅有3个零点,则实数 a 的取值范围为 $(e,+\infty)$. ………………………… 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。