



黄冈市 2020 年高三年级 9 月质量检测

数学试题

黄冈市教育科学研究院命制

2020 年 9 月 22 日上午 8:00 - 10:00

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题(本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分,在每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的)

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$, $B = \{x | 1 < 2^x < 4\}$, 则 $A \cap B = \emptyset$.
- A. $|x| 1 \leq x \leq 2$ B. $|x| 1 < x \leq 2$ C. $|x| 1 \leq x < 2$ D. $|x| 0 \leq x < 2$
2. 已知 a, b, c, d 都是实常数, $a < b, c < d$. 若 $f(x) = (x-a)(x-b) - 2020$ 的零点为 c, d , 则下列不等式正确的是
- A. $a < c < d < b$ B. $c < a < b < d$ C. $a < c < b < d$ D. $c < d < a < b$

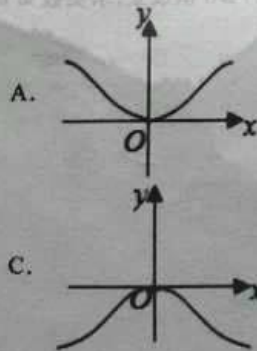
3. 已知 $x = 2^{0.4}, y = \lg \frac{2}{5}, z = (\frac{2}{5})^{0.4}$, 则下列结论正确的是

- A. $x < y < z$ B. $y < z < x$ C. $z < y < x$ D. $z < x < y$

4. 若实数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} = \sqrt{ab}$, 则 ab 的最小值为

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. 4

5. 我国著名数学家华罗庚先生曾说:数缺形时少直观,形缺数时难入微,数形结合百般好,分裂分家万事休. 在数学的学习和研究中,常用函数的图象来研究函数的性质,也常用函数的解析式来研究函数的图象的特征,如函数 $f(x) = \frac{(e^x - 1)\sin x}{e^x + 1}$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的图象的大致形状是

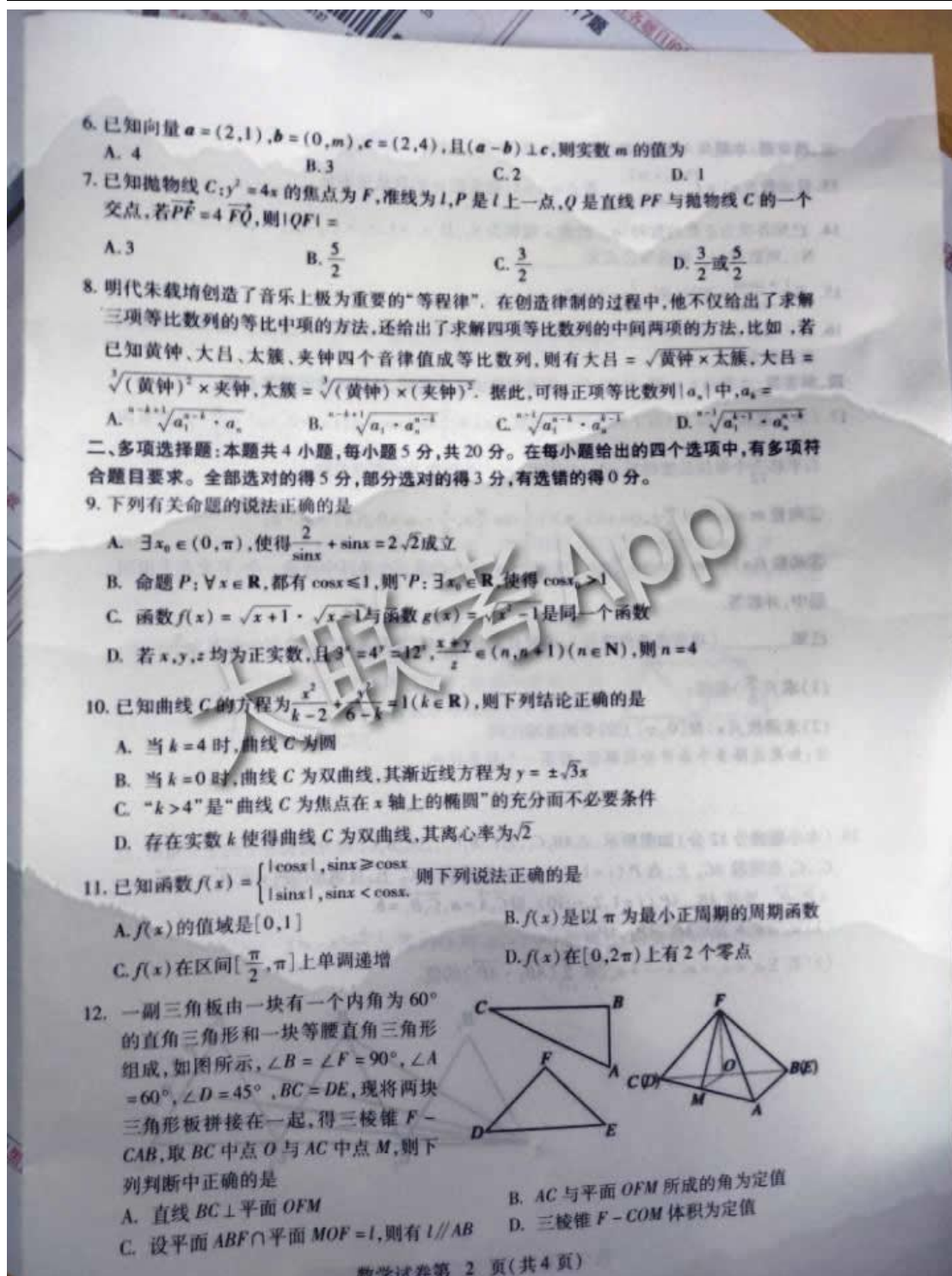


$$f(-x) = \frac{(e^{-x} - 1)\sin(-x)}{e^{-x} + 1}$$

$$= -\frac{(e^{-x} - 1)\sin x}{e^{-x} + 1}$$

$$= -\frac{e^{-x}\sin x - \sin x}{e^{-x} + 1}$$

数学试卷第 1 页(共 4 页)





三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \geq 1, \\ 1-x, & x < 1. \end{cases}$ 若 $f(m) > 1$, 则实数 m 的取值范围是_____。

14. 已知各项为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 = 1, S_n = (\sqrt{S_{n-1}} + \sqrt{a_1})^2 (n \geq 2, n \in \mathbf{N})$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____。

15. 若 $\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = 2020$, 则 $\frac{1}{\cos 2\alpha} + \tan 2\alpha =$ _____。

16. 在三棱锥 $D-ABC$ 中, $CD \perp$ 底面 $ABC, AC \perp BC, AC = BD = 5, BC = 4$, 则此三棱锥外接球的表面积为_____。

四、解答题:本题共6小题,共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分10分) 有下列条件: ①函数 $f(x) = \frac{1}{2} \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到 $g(x)$ 的图象, $g(x)$ 的图象关于原点对称;

②向量 $m = (\sqrt{3} \sin \frac{\omega}{2} x, \cos \omega x), n = (\frac{1}{2} \cos \frac{\omega}{2} x, \frac{1}{4})$, $\omega > 0, f(x) = m \cdot n$;

③函数 $f(x) = \cos \frac{\omega}{2} x \sin(\frac{\omega}{2} x + \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{4} (\omega > 0)$ 。在这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 并解答。

已知_____ (填所选条件序号), 函数 $f(x)$ 图像的相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$ 。

(1) 求 $f(\frac{\pi}{6})$ 的值;

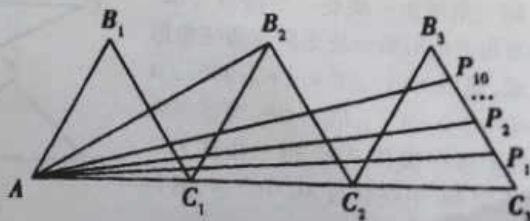
(2) 求函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的单调递减区间。

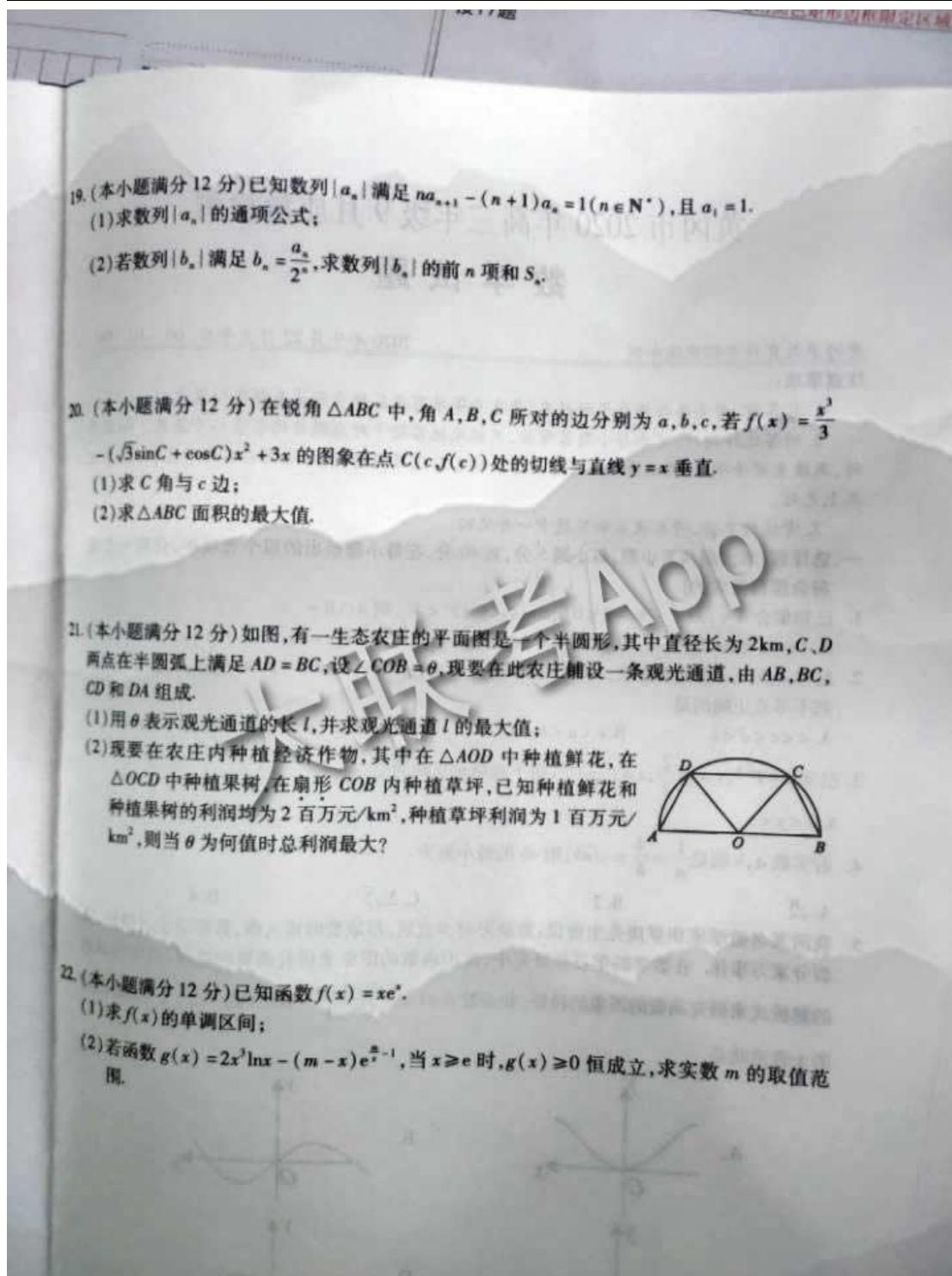
注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分。

18. (本小题满分12分) 如图所示, $\triangle AB_1C_1, \triangle C_1B_2C_2, \triangle C_2B_3C_3$ 均为边长为1的正三角形, 点 C_1, C_2 在线段 AC_3 上, 点 $P_i (i=1, 2, \dots, 10)$ 在线段 B_3C_3 上, 且满足 $\overrightarrow{C_3P_1} = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_2P_3} = \dots = \overrightarrow{P_{10}B_3}$, 连接 $AB_2, AP_i (i=1, 2, \dots, 10)$, 设 $\overrightarrow{C_1A} = a, \overrightarrow{C_1B_1} = b$ 。

(1) 试用 a, b 表示 $\overrightarrow{AP_1}, \overrightarrow{AP_2}, \overrightarrow{AP_3}$;

(2) 若 $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, 求 $\sum_{i=1}^{10} (\overrightarrow{AB_2} \cdot \overrightarrow{AP_i})$ 的值。





19. (本小题满分12分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $na_{n+1} - (n+1)a_n = 1 (n \in \mathbb{N}^*)$, 且 $a_1 = 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{a_n}{2^n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

20. (本小题满分12分) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $f(x) = \frac{x^3}{3}$

$-(\sqrt{3}\sin C + \cos C)x^2 + 3x$ 的图象在点 $C(c, f(c))$ 处的切线与直线 $y = x$ 垂直.

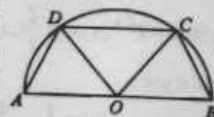
(1) 求 C 角与 c 边;

(2) 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

21. (本小题满分12分) 如图, 有一生态农庄的平面图是一个半圆形, 其中直径长为 2km , C, D 两点在半圆弧上满足 $AD = BC$, 设 $\angle COB = \theta$, 现要在此农庄铺设一条观光通道, 由 AB, BC, CD 和 DA 组成.

(1) 用 θ 表示观光通道的长 l , 并求观光通道 l 的最大值;

(2) 现要在农庄内种植经济作物, 其中在 $\triangle AOD$ 中种植鲜花, 在 $\triangle OCD$ 中种植果树, 在扇形 COB 内种植草坪, 已知种植鲜花和种植果树的利润均为 2 百万元/ km^2 , 种植草坪利润为 1 百万元/ km^2 , 则当 θ 为何值时总利润最大?



22. (本小题满分12分) 已知函数 $f(x) = xe^x$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $g(x) = 2x^3 \ln x - (m-x)e^{\frac{x}{2}-1}$, 当 $x \geq e$ 时, $g(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.



黄冈市高三9月调考数学参考答案及评分标准

一、单项选择题

1.C 2.B 3.B 4.D 5.A 6.C 7.B 8.C

二、多项选择题

9. BD 10.AB 11.ACD 12.ABC

三、填空题

13. $(-\infty, 0) \cup (e, +\infty)$ 14. $a_n = 2n - 1$ 15. 2020 16. 50π

四、解答题

17. (1)

选择条件①:

依题意, $f(x)$ 相邻两对称轴之间距离为 $\frac{\pi}{2}$, 则周期为 π , 从而 $\omega = 2$,2分

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x + \phi), \quad g(x) = \frac{1}{2} \sin(2x + \phi - \frac{\pi}{6}),$$

又, $g(x)$ 的图像关于原点对称, 则 $g(0) = 0$, 由 $|\phi| < \frac{\pi}{2}$ 知 $\phi = \frac{\pi}{6}$,4分

$$\text{从而 } f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{6}), \quad f(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} \quad \text{.....5分}$$

选择条件②:

$$\text{依题意, } f(x) = \vec{m} \cdot \vec{n} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\omega}{2} x \cos \frac{\omega}{2} x + \frac{1}{4} \cos \omega x \quad \text{.....2分}$$

$$\text{即有: } f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \omega x + \frac{1}{4} \cos \omega x = \frac{1}{2} \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$$

又因为 $f(x)$ 相邻两对称轴之间距离为 $\frac{\pi}{2}$, 则周期为 π , 从而 $\omega = 2$,4分

$$\text{从而 } f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{6}), \quad f(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} \quad \text{.....5分}$$

选择条件③:

$$\text{依题意, } f(x) = \cos \frac{\omega}{2} x \sin(\frac{\omega}{2} x + \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{4}$$

$$\text{即有: } f(x) = \cos \frac{\omega}{2} x (\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\omega}{2} x + \frac{1}{2} \cos \frac{\omega}{2} x) - \frac{1}{4} \quad \text{.....2分}$$

$$\text{化简得: } f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\omega}{2} x \cos \frac{\omega}{2} x + \frac{1}{2} (\cos \frac{\omega}{2} x)^2 - \frac{1}{4}$$

$$\text{即有: } f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \omega x + \frac{1}{4} \cos \omega x = \frac{1}{2} \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$$

又因为 $f(x)$ 相邻两对称轴之间距离为 $\frac{\pi}{2}$, 则周期为 π , 从而 $\omega = 2$,

从而 $f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{6})$, $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$

(2) $f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{6})$, 则其单调递减区间为 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{3}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}$,

解得 $x \in [k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2}{3}\pi], k \in \mathbb{Z}$, 令 $k=0$, 得 $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi]$,

从而 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的单调递减区间为 $[\frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi]$10分

18. (1) 由 $\overrightarrow{C_3P_1} = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_2P_3} = \dots = \overrightarrow{P_{10}B_3}$ 知,

$$\overrightarrow{C_3P_1} = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_2P_3} = \dots = \overrightarrow{P_{10}B_3} = \frac{1}{11} \vec{b},$$

$$\text{从而有: } \overrightarrow{AP_1} = \overrightarrow{AC_3} + \overrightarrow{C_3P_1} = -3\vec{a} + \frac{1}{11} \vec{b},$$

$$\overrightarrow{AP_2} = \overrightarrow{AC_3} + \overrightarrow{C_3P_2} = -3\vec{a} + \frac{2}{11} \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AP_3} = \overrightarrow{AC_3} + \overrightarrow{C_3P_3} = -3\vec{a} + \frac{3}{11} \vec{b} \quad \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

(2) 由 (1) 同理可得: $\overrightarrow{AP_i} = -3\vec{a} + \frac{i}{11} \vec{b}$

$$\text{从而 } \overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_2} + \dots + \overrightarrow{AP_{10}} = -30\vec{a} + \frac{1}{11}(1+2+\dots+10)\vec{b} = -30\vec{a} + 5\vec{b} \quad \dots 8 \text{分}$$

$$\overrightarrow{AB_2} = -2\vec{a} + \vec{b}$$

$$\text{从而 } \sum_{i=1}^{10} (\overrightarrow{AB_2} \cdot \overrightarrow{AP_i}) = \overrightarrow{AB_2} \cdot \sum_{i=1}^{10} \overrightarrow{AP_i} = (-2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (-30\vec{a} + 5\vec{b}) = 45 \quad \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

19. (1) $na_{n+1} - (n+1)a_n = 1$, 两边同时除以 $n(n+1)$ 得:

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = \frac{1}{n(n+1)} \quad \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$$\text{从而有: } \frac{a_n}{n} - \frac{a_{n-1}}{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{a_2}{2} - \frac{a_1}{1} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\text{叠加可得: } \frac{a_n}{n} - \frac{a_1}{1} = 1 - \frac{1}{n}, \quad a_n = 2n - 1 (n \geq 2)$$

又 $n=1$ 满足等式, 从而 $a_n = 2n - 1 \quad \dots\dots\dots 6 \text{分}$



$$(2) b_n = \frac{2n-1}{2^n}, S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{2n-3}{2^n} + \frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$\text{即有: } \frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \dots + \frac{2}{2^n} - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$\text{即有: } S_n = 3 - \frac{2n+3}{2^n} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$20. (1) f(x) = \frac{x^3}{3} - (\sqrt{3} \sin C + \cos C)x^2 + 3x$$

$$f'(x) = x^2 - 2(\sqrt{3} \sin C + \cos C)x + 3,$$

$$\text{依题意, 有: } f'(c) = c^2 - 4c \sin(C + \frac{\pi}{6}) + 3 = -1$$

$$\text{从而有: } c^2 - 4c \sin(C + \frac{\pi}{6}) + 4 = 0 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \Delta \geq 0 \text{ 知: } \sin(C + \frac{\pi}{6}) = 1, \text{ 即有: } C = \frac{\pi}{3}, c = 2 \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{方法一: 依正弦定理, 有 } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin \frac{\pi}{3}}, a = \frac{4}{\sqrt{3}} \sin A \text{ 同理 } b = \frac{4}{\sqrt{3}} \sin(\frac{2}{3}\pi - A)$$

$$\text{从而有: } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin A \sin(\frac{2}{3}\pi - A), A \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}) \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \sin A \cos A + \frac{1}{2} \sin^2 A \right] = \frac{\sqrt{3}}{3} [2\sqrt{3} \sin A \cos A + \sin^2 A]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} [\sqrt{3} \sin 2A + \sin^2 A] = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin(2A - \frac{\pi}{6}) + \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \sqrt{3}$$

当且仅当 $A = \frac{\pi}{3}$ 时, 取到最大值, 因此, ΔABC 的面积最大值为 $\sqrt{3}$ 12 分

方法二: 由余弦定理得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = a^2 + b^2 - ab = 4,$

$4 = a^2 + b^2 - ab \geq ab$, 当且仅当 $a = b = 2$ 时等号成立.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{\sqrt{3}}{4} ab \leq \sqrt{3}.$$

$$21. (1) \text{作 } OE \perp BC, \text{垂足为 } E, \text{在直角三角形 } OBE \text{ 中, } BE = OB \sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\theta}{2},$$

$$\text{则有 } BC = AD = 2 \sin \frac{\theta}{2}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$



同理作 $OF \perp CD$, 垂足为 F , $CF = OC \cos \theta = \cos \theta$,
即: $CD = 2 \cos \theta$,4分

从而有: $l = 2 + 4 \sin \frac{\theta}{2} + 2 \cos \theta = -4 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 4 \sin \frac{\theta}{2} + 4 = -4(\sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2})^2 + 5$

当 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 时, l 取最大值 5, 即观光通道长 l 的最大值为 5km.6分

(2) 依题意, $S_{\triangle MOD} = \frac{1}{2} \sin \theta, S_{\triangle COD} = \frac{1}{2} \sin 2\theta, S_{\text{扇形}OBC} = \frac{1}{2} \theta$ 8分

则总利润 $S(\theta) = \sin \theta + \sin 2\theta + \frac{1}{2} \theta$ 9分

$S'(\theta) = \cos \theta + 2 \cos 2\theta + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(4 \cos \theta + 3)(2 \cos \theta - 1)$ 10分

因为 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以当 $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$ 时, $S(\theta)$ 单调递增, 当 $\theta \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ 时, $S(\theta)$ 单调递减, 从而

当 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 时, 总利润取得最大值, 最大值为 $S = (\sqrt{3} + \frac{\pi}{6})$ 百万元 ...12分

22. (1) $f(x) = xe^x, f'(x) = (x+1)e^x$

当 $x > -1$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x < -1$ 时, $f'(x) < 0$.

从而 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-\infty, -1]$4分

(2) $x \geq e, g(x) \geq 0$ 恒成立, 即 $2x^3 \ln x - (m-x)e^{\frac{m-1}{x}} \geq 0$ 恒成立

当 $m \leq 0$ 时, 显然成立;6分

当 $m > 0$ 时, 即 $2x^2 \ln x - (\frac{m}{x} - 1)e^{\frac{m-1}{x}} \geq 0$ 恒成立

即 $x^2 \ln x^2 - (\frac{m}{x} - 1)e^{\frac{m-1}{x}} \geq 0$ 恒成立, 即 $x^2 \ln x^2 \geq (\frac{m}{x} - 1)e^{\frac{m-1}{x}}$

即 $f(\ln x^2) \geq f(\frac{m}{x} - 1)$ 8分

由 $m > 0$ 知, $\frac{m}{x} - 1 > -1$, 由①可知, $f(\ln x^2) \geq f(\frac{m}{x} - 1) \Leftrightarrow \ln x^2 \geq \frac{m}{x} - 1$

即: $m \leq 2x \ln x + x$. 令 $h(x) = 2x \ln x + x, x \geq e$

$h'(x) = 3 + 2 \ln x > 0$, 即 $h(x)$ 在 $x \in e, +\infty$ 上为增函数,

$h(x)_{\min} = h(e) = 3e, \therefore 0 < m \leq 3e$, 综上, $m \in (-\infty, 3e]$12分

(本试题及答案内容来源于：大联考 APP)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站 (<http://www.zizzs.com/>) 和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》