黄冈市2021年春季高二期末考试

数学试题答案

一、单项选择题

1.C　2.A　3.A　4.B　5.B　6.A　7.C　8.C

二、多项选择题

9.AB　10.BCD　11.ACD　12.BCD

三、填空题

13. $(0,1)\cup(1,3]$　　14.5

15. $y=\dfrac{2}{1+x^2}$ （答案不唯一，如 $f(x)=\dfrac{4}{a^x+a^{-x}}(a>0,a\neq 1)$；

或 $f(x)=f(-x), f(x+2)=f(x),\ f(0)=2,$ 当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=2x$；

或 $f(x)=\begin{cases}2, x=k\pi+\dfrac{\pi}{2},\\ 2|\cos x|, x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$ ）

16. $\dfrac{\sqrt{21}}{9}$

四、解答题

17.解：（1）若方程 $\dfrac{x^2}{3-m}+\dfrac{y^2}{m+1}=1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆，则

$m+1>0, 3-m>0,$ 且 $m+1>3-m,$ 解得 $1<m<3,$

所以 m 的取值范围为 $(1,3)$　　…………5分

（2）若方程 $\dfrac{x^2}{m-(t+2)}-\dfrac{y^2}{m-(t+4)}=1$ 表示双曲线，则

$(m-t-2)(m-t-4)>0,$ 解得 $m>t+4$ 或 $m<t+2.$

若 p 是 q 的充分不必要条件，则 $(1,3)\subset(-\infty,t+2)\cup(t+4,+\infty), t+2\geq 3$ 或 $t+4\leq 1,$

解得 $t\geq 1$ 或 $t\leq -3$，所以 t 的取值范围为 $(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$　　…………10分

18.(1) $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

x	$(-\infty,-1)$	-1	（-1,1）	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

$f(x)$	增	极大值	减	极小值	增

由上表知 $f(x)$ 的递增区间为 $(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$，递减区间为（-1,1）…………6 分

（2）依题意有 $(f(x))_{\min}\le(g(x))_{\max}$

由（1）知当 $x\ge 0$ 时 $(f(x))_{\min}=f(1)=a-2.$

而 $g'(x)=\cos x-1\le 0$，$g(x)$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上为减函数，

所以当 $x\ge 0$ 时 $(g(x))_{\max}=g(0)=0.$ $\therefore a-2\ge 0, a\ge 2.$

故 a 的取值范围为 $\left[2,+\infty\right)$ …………12 分

19.解：$f(x)=ax^2+(a^2-3)x-3a=(ax-3)(x+a)$

（1）若不等式 $f(x)<0$ 的解集为 $\left(-\infty,-3\right)\cup\left(1,+\infty\right)$，则 $a<0,$

$-a=1,\dfrac{3}{a}=-3,\therefore a=-1$ ………6 分

（2）不等式 $f(x)+x+a<0$ 即 $ax^2+(a^2-2)x-2a<0$ 有两整数解，

$(ax-2)(x+a)<0$，又 a 为正整数，$-a<x<\dfrac{2}{a}$

则解集必含 0，两整数解为-1,0 或 0,1

当 a>2 时，整数解为-2，-1,0，不符合；$\therefore a=1$ 或 $a=2.$ …………12 分

20.解（1）$\because f(x)+g(x)=\mathrm{e}^x+x,$ ①

$\therefore f(-x)+g(-x)=\mathrm{e}^{-x}-x,$ 即 $-f(x)+g(x)=\mathrm{e}^{-x}-x,$ ②

联立①②得 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+2x}{2},g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}.$ ………5 分

（2 由（1）知 $y=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}}{2}+a\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}+1$，令 $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}=t,\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}=t^2-2,t\ge 2$

$y=\dfrac{1}{2}(t^2+at)=\dfrac{1}{2}(t+\dfrac{a}{2})^2-\dfrac{a^2}{8},t\ge 2.$

当 $-\dfrac{a}{2}\le 2$ 即 $a\ge -4$ 时，$y_{\min}=\dfrac{1}{2}(2^2+2a)=-1,\therefore a=-3.$

当 $-\dfrac{a}{2}>2$ 即 $a<-4$ 时，$y_{\min}=-\dfrac{a^2}{8}=-1,\therefore a=\pm 2\sqrt{2}.$ 不符，舍去.

$\therefore a=-3.$ ………12 分

21.（1）依题意有 $c=2\sqrt{3}, \dfrac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{a^2}+\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{b^2}=1, a^2-b^2=12,$

解得 $a^2=16, b^2=4,$ 故椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1.$ ………4 分

（2）设 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2),$ 则 $\dfrac{x_1^{\ 2}}{16}+\dfrac{y_1^{\ 2}}{4}=1,\ \dfrac{x_2^{\ 2}}{16}+\dfrac{y_2^{\ 2}}{4}=1.$ 两式相减得

$(x_1+x_2)(x_1-x_2)+4(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$，又 AB 中点为 $(\sqrt{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，

$\therefore x_1+x_2=2\sqrt{2}, y_1+y_2=-\sqrt{2},$ 代入上式有 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{1}{2},$ 即 $k_{AB}=\dfrac{1}{2}.$

所以 AB 的直线方程 $y=\dfrac{1}{2}x-\sqrt{2}.$ ………6 分

$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x-\sqrt{2}. \\ x^2-4y^2=16. \end{cases}$ 消去 y 得 $\therefore x^2-2\sqrt{2}x-4=0$.

$\therefore x_1+x_2=2\sqrt{2}, x_1x_2=-4.$ ………7 分

$\therefore k_{PA}+k_{PB}=\dfrac{y_1-\sqrt{2}}{x_1-2\sqrt{2}}+\dfrac{y_2-\sqrt{2}}{x_2-2\sqrt{2}}=\dfrac{\frac{1}{2}x_1-2\sqrt{2}}{x_1-2\sqrt{2}}+\dfrac{\frac{1}{2}x_2-2\sqrt{2}}{x_2-2\sqrt{2}}$

$=\dfrac{x_1x_2-3\sqrt{2}(x_1+x_2)+16}{x_1x_2-2\sqrt{2}(x_1+x_2)+8}=\dfrac{-4-3\sqrt{2}\times2\sqrt{2}+16}{-4-2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}+8}=0.$

$\therefore PM\perp x$ 轴. ………12 分

解法二：同上 $x^2-2\sqrt{2}x-4=0$，$\therefore x_1=\sqrt{2}+\sqrt{6}, x_2=\sqrt{2}-\sqrt{6},$

$\therefore y_1=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}, y_2=-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},$ 即 $A(\sqrt{2}+\sqrt{6},\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}), B(\sqrt{2}-\sqrt{6},-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}),$

$k_{PA}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, k_{PB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \therefore PM\perp x$ 轴.

22．解（1）$f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{a}{x}\ge0$ 对 $x>2$ 恒成立，即 $a\le x+\dfrac{1}{x}$ 对 $x>2$ 恒成立，

又 $x+\dfrac{1}{x}$ 在 $\left(2,+\infty\right)$ 上递增，$\therefore a\le2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$.

故 a 的取值范围为 $\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right]$ ………………4 分

（2）$f'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{a}{x}=\frac{x^2-ax+1}{x^2}$

若 $f(x)$ 有两极值点，即 $x^2-ax+1=0$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上有两根 $x_1,x_2,x_1>x_2$，则

$$\begin{cases}\Delta=a^2-4>0,\\ x_1+x_2=a>0\ \therefore a>2.a=x_1+\frac{1}{x_1}\\ x_1x_2=1\end{cases}$$

………7 分

$\because x_1>x_2,\therefore x_1>1,0<x_2<1$,

$f(x_1)<mx_2,\therefore m>x_1f(x_1)=x_1^2-ax_1\ln x_1-1=x_1^2-(x_1{}^2+1)\ln x_1-1,$

令 $g(x)=x^2-(x^2+1)\ln x-1,x>1$， $g'(x)=x-2x\ln x-\frac{1}{x}$

令 $h(x)=x-2x\ln x-\frac{1}{x},h'(x)=\frac{1}{x^2}-2\ln x-1$

$\because x>1,\therefore\frac{1}{x^2}-1<0,\therefore h'(x)<0$， $\therefore h(x)<h(1)=0$，即 $g'(x)<0,$

$\therefore g(x)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 递减， $g(x)<g(1)=0$， $\therefore m\geq 0$

故 m 的取值范围为 $\left[0,+\infty\right)$ ………12 分