南京市2022届高三年级零模考前复习卷

数学

2021.08

第Ⅰ卷（选择题　共60分）

一、单项选择题（本大题共8小题，每题5分，共40分）

1．已知复数$z=1+i$，设复数$w=\dfrac{2\overline{z}}{z^2}$，则$w$的虚部是（　　）

A．-1　　B．1　　C．i　　D．$-i$

2．已知a，b为非零实数，则“$a<b$”是“$\dfrac{a}{|b|}<\dfrac{b}{|a|}$”的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．既不充分也不必要条件　　D．充要条件

3．在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{OD}$，则$\lambda=$（　　）

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．1　　C．2　　D．3

4．棱长为a的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点E,F,G分别为棱AB,CC_1,C_1D_1的中点，则过E,F,G三点的平面截正方体所得截面面积为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$　　C．$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$　　D．$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2$

5．若θ为锐角，$\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$，则$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=$（　　）

A．$\dfrac{12}{25}$　　B．$\dfrac{25}{12}$　　C．$\dfrac{24}{7}$　　D．$\dfrac{7}{24}$

6．将正整数12分解成两个正整数的乘积有$1\times12,2\times6,3\times4$三种，其中$3\times4$是这三种分解中两数差的绝对值最小的，我们称$3\times4$为12的最佳分解．当$p\times q\left(p,q\in\mathrm{N}^*\right)$是正整数$n$的最佳分解时，我们定义函数$f(n)=|p-q|$，例如$f(12)=|4-3|=1$，则

$\sum\limits_{i=1}^{2021}f\left(2^i\right)=$（　　）

A．$2^{1011}-1$　　B．2^{1011}　　C．$2^{1010}-1$　　D．2^{1010}

7．过点 M（p，0）作倾斜角为150°的直线与抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 交于两点 A，B，

若 $|AB|=2\sqrt{10}$，则 $|AM|\cdot|BM|$ 的值为（　　）

A．4　　B．$4\sqrt{2}$　　C．$2\sqrt{10}$　　D．$4\sqrt{5}$

8．已知 $a>1,b>1$，且 $\dfrac{e^a}{a}=\dfrac{e^{b+1}+1}{b+1}$，则下列结论一定正确的是（　　）

A．$\ln(a+b)>2$　　B．$\ln(a-b)>0$

C．$2^{a+1}<2^b$　　D．$2^a+2^b<2^3$

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每题 5 分，共 20 分.每题全选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）

9．已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi),(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 图象的一条对称轴为 $x=\dfrac{2\pi}{3}$，

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$，且 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 内单调递减，则以下说法正确的是（　　）

A．$\left(-\dfrac{7\pi}{12},0\right)$ 是其中一个对称中心　　B．$\omega=\dfrac{14}{5}$

C．$f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{5\pi}{12},0\right)$ 单增　　D．$f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-1$

10．在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $C=\dfrac{\pi}{2}$，将△ABC 分别绕边 a，b，c 所在的直线旋转一周，形成的几何体的体积分别记为 V_a，V_b，V_c，侧面积分别记为 S_a，S_b，S_c，则（　　）

A．$V_a+V_b\ge 2V_c$　　B．$S_a+S_b\ge 2S_c$

C．$\dfrac{1}{V_a^2}+\dfrac{1}{V_b^2}=\dfrac{1}{V_c^2}$　　D．$\dfrac{1}{S_a^2}+\dfrac{1}{S_b^2}=\dfrac{1}{S_c^2}$

11．设集合 S，T，$S\subseteq N^*$，$T\subseteq N^*$，S，T 中至少有两个元素，且 S，T 满足：

①对于任意 x，$y\in S$，若 $x\neq y$，都有 $xy\in T$

②对于任意 x，$y\in T$，若 $x<y$，则 $\dfrac{y}{x}\in S$；

下列情况中可能出现的有（　　）

A．S 有 4 个元素，$S\cup T$ 有 7 个元素　　B．S 有 4 个元素，$S\cup T$ 有 6 个元素

C．S 有 3 个元素，$S\cup T$ 有 5 个元素　　D．S 有 3 个元素，$S\cup T$ 有 4 个元素

12．甲、乙两人进行围棋比赛，共比赛$2n\left(n\in N^*\right)$局，且每局甲获胜的概率和乙获胜的概率均为$\frac{1}{2}$.如果某人获胜的局数多于另一人，则此人赢得比赛.记甲赢得比赛的概率为$P(n)$，则（　　）

A．$P(2)=\frac{1}{8}$　　　　B．$P(3)=\frac{11}{32}$

C．$P(n)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{C_{2n}^{n}}{2^{2n}}\right)$　　　　D．$P(n)$的最大值为$\frac{1}{4}$

第 II 卷（非选择题　共 90 分）

三、填空题（本大题共 4 小题，每题 5 分，共 20 分）

13．已知$f(x)=\tan x\cdot\left(e^{x}+e^{-x}\right)+6$，$f(t)=8$，则$f(-t)=$__________.

14．根据下面的数据：

x	1	2	3	4
y	32	48	72	88

求得y关于x的回归直线方程为$y=19.2x+12$，则这组数据相对于所求的回归直线方程的 4 个残差的方差为__________.（注：残差是指实际观察值与估计值之间的差）

15．斜率为$-\frac{1}{3}$的直线l与椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）相交于$A$，$B$两点，线段$AB$的中点坐标为$(1,1)$，则椭圆$C$的离心率等于______.

16．“韩信点兵”问题在我国古代数学史上有不少有趣的名称，如“物不知数”“鬼谷算”“隔墙算”“大衍求一术”等，其中《孙子算经》中“物不知数”问题的解法直至 1852 年传由传教士传入至欧洲，后验证符合由高斯得出的关于同余式解法的一般性定理，因而西方称之为“中国剩余定理”．原文如下：“今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？”这是一个已知某数被 3 除余 2，被 5 除余 3，被 7 除余 2，求此数的问题．满足条件的数中最小的正整数是______；1 至 2021 这 2021 个数中满足条件的数的个数是______.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分）

17.（本题满分 10 分）

$\triangle ABC$内角A，B，C的对边分别为a，b，c，$\sin A=\frac{\sqrt{15}}{8}$，$\cos B=\frac{11}{16}$.

（1）证明：$a:b:c=2:3:4$；

（2）若$\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right|=8$，求$\triangle ABC$的周长.

18.（本题满分 12 分）

设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$a_2=3$，且$S_5=4a_3+5$.

（1）求a_n和S_n；

（2）是否存在等差数列$\{b_n\}$，使得$\frac{S_1}{a_1a_2}+\frac{S_2}{a_2a_3}+\cdots+\frac{S_n}{a_na_{n+1}}=\frac{nb_n}{a_{n+1}}$对$n\in\mathbf{N}^*$成立？并证明你的结论.

19.（本题满分 12 分）

为保护学生视力，让学生在学校专心学习，防止沉迷网络和游戏，促进学生身心健康发展，教育部于 2021 年 1 月 15 日下发《关于加强中小学生手机管理工作的通知》，对中小学生的手机使用和管理作出了相关的规定．某研究型学习小组调查研究"中学生使用智能手机对学习的影响"，现对我校 80 名学生调查得到统计数据如下表，记 A 为事件："学习成绩优秀且不使用手机"；B为事件："学习成绩不优秀且不使用手机"，且已知事件 A 的频率是事件B的频率的 2 倍.

	不使用手机	使用手机	合计
学习成绩优秀人数	a	12	
学习成绩不优秀人数	b	26	
合计			

（1）运用独立性检验思想，判断是否有99.5%的把握认为中学生使用手机对学习成绩有影

响？

（2）采用分层抽样的方法从这 80 名学生中抽出 6 名学生，并安排其中 3 人做书面发言，记做书面发言的成绩优秀的学生数为 X，求 X 的分布列和数学期望.

参考数据：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

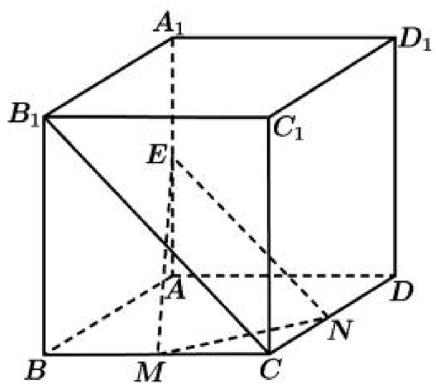
$P(K^2\geq k_0)$	0.10	0.05	0.01	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

20.（本题满分 12 分）

如图，四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，面 $ABB_1A_1\perp$ 面 $ABCD$，面 $ADD_1A_1\perp$ 面 $ABCD$，点 E、M、N 分别是棱 AA_1、BC、CD 的中点.

（1）证明：$AA_1\perp$ 面 $ABCD$.

（2）若四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，且 $AA_1=AD$，面 $EMN\bigcap$ 面 $ADD_1A_1=$ 直线 l，求直线 l 与 B_1C 所成角的余弦值.



21．（本题满分 12 分）

已知双曲线$E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$过点$D(3,1)$，且该双曲线的虚轴端点与两顶点$A_1,A_2$的张角为$120°$.

（1）求双曲线E的方程；

（2）过点$B(0,4)$的直线l与双曲线E左支相交于点M,N，直线DM,DN与y轴相交于P,Q两点，求$|BP|+|BQ|$的取值范围.

22．（本题满分 12 分）

已知函数$f(x)=(x-1)\left(ae^x-1\right)$在$x=1$处的切线方程为$y=(e-1)(x-1)$，

（1）求a的值；

（2）若方程$f(x)=b$有两个不同实根x_1、x_2，证明：$\left|x_1-x_2\right|<\dfrac{eb}{e-1}+1$

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 ‘’ 专业、专注、有态度 ‘’ 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。