

保密★使用

泉州市 2024 届高中毕业班质量监测（一）

2023.08

数 学

【解答题部分】

本试卷共 22 题，满分 150 分，共 8 页。考试用时 120 分钟。

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ，且 $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 令 $b_n = \frac{2^n}{a_n}$ ，记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，求 S_8 .

【命题意图】本小题主要考查等差数列的定义、通项公式与数列求和等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程、化归与转化等思想，体现基础性，导向对发展数学运算等核心素养的关注。

【试题解析】解法一：

(1) 由 $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$ ，可得 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 1$ 1 分

因为 $a_1 = 1$ ，所以 $\frac{1}{a_1} = 1$ 2 分

所以数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是首项为 1，公差为 1 的等差数列. 3 分

所以 $\frac{1}{a_n} = n$ ，即 $a_n = \frac{1}{n}$ 4 分

(2) 因为 $b_n = \frac{2^n}{a_n}$ ，所以 $b_n = n \cdot 2^n$ 5 分

又 $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ ，

所以 $S_8 = 2^1 + 2 \times 2^2 + \dots + 8 \times 2^8$ ①. 6 分

①式两边同乘以 2，得 $2S_8 = 2^2 + 2 \times 2^3 + \dots + 8 \times 2^{8+1}$ ②， 7 分

②-①，得 $S_8 = -(2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^8) + 8 \times 2^9$ ， 8 分

所以 $S_8 = -\frac{2 \times (1-2^8)}{1-2} + 8 \times 2^9 = 2 + 7 \times 2^9 = 3586$ 10 分

解法二:

(1) 由 $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n+1}$, 可得 $a_{n+1}a_n + a_{n+1} = a_n$.

两边同除以 $a_{n+1}a_n$, 得 $1 + \frac{1}{a} = \frac{1}{a_{n+1}}$, 即 $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 1$ 1 分

因为 $a_1 = 1$, 所以 $\frac{1}{a_1} = 1$ 2 分

所以数列 $\{\frac{1}{a}\}$ 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列. 3 分

所以 $\frac{1}{a_n} = n$, 即 $a_n = \frac{1}{n}$ 4 分

(2) 因为 $b_n = \frac{2^n}{a_n}$, 所以 $b_n = n \cdot 2^n$ 5 分

所以 $b_1 = 2, b_2 = 8, b_3 = 24, b_4 = 64, b_5 = 160, b_6 = 384, b_7 = 896, b_8 = 2048$, 9 分

所以 $S_8 = b_1 + b_2 + \dots + b_8 = 2 + 8 + 24 + 64 + 160 + 384 + 896 + 2048 = 3586$, 10 分



18. (12分)

泉州是历史文化名城、东亚文化之都，是联合国认定的“海上丝绸之路”起点，著名的“泉州十八景”是游客的争相打卡点，泉州文旅局调查打卡十八景游客，发现90%的人至少打卡两个景点，为提升城市形象，泉州文旅局为大家准备了4种礼物，分别是世遗泉州金属书签、闽南古厝徽章、开元寺祈福香包、小关公陶瓷摆件，若打卡十八景游客至少打卡两个景点，则有两次抽奖机会；若只打卡一个景点，则有一次抽奖机会，每次抽奖可随机获得4种礼物中的1种礼物，假设打卡十八景游客打卡景点情况相互独立。

- (1) 从全体打卡十八景游客中随机抽取3人，求3人抽奖总次数不低于4次的概率；
(2) 任选一位打卡十八景游客，求此游客抽中开元寺祈福香包的概率。

【命题意图】本小题主要考查离散型随机变量的分布列、条件概率、全概率公式等基础知识；考查运算求解、推理论证能力等；考查化归与转化思想等，体现基础性、应用性和综合性，导向对发展数学运算、数学抽象等核心素养的关注。

【试题解析】解法一：

- (1) 设3人抽奖总次数为 X ，则 X 的可能取值为3,4,5,6. 1分

由题意知，每位打卡十八景游客至少打卡两个景点的概率为 $\frac{9}{10}$ ，

只打卡一个景点的概率为 $\frac{1}{10}$ 2分

依题可得 $P(X=4) = C_3^1 \times \frac{9}{10} \times (\frac{1}{10})^2 = \frac{27}{1000}$, 3分

$P(X=5) = C_3^2 \times (\frac{9}{10})^2 \times \frac{1}{10} = \frac{243}{1000}$, 4分

$P(X=6) = (\frac{9}{10})^3 = \frac{729}{1000}$, 5分

所以 $P(X \geq 4) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) = \frac{27+243+729}{1000} = 0.999$.

..... 6分

- (2) 记事件 A = “每位打卡十八景游客至少打卡两个景点”，

则 \bar{A} = “每位打卡十八景游客只打卡一个景点”，

事件 B = “一位打卡十八景游客抽中开元寺祈福香包”， 7分

则 $P(A) = \frac{9}{10}$, $P(\bar{A}) = \frac{1}{10}$, $P(B|A) = 1 - (\frac{3}{4})^2 = \frac{7}{16}$, $P(B|\bar{A}) = \frac{1}{4}$ 9分

$$\begin{aligned}
 \text{则 } P(B) &= P(AB + \bar{A}B) = P(AB) + P(\bar{A}B) \\
 &= P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) \\
 &= \frac{9}{10} \times \frac{7}{16} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{4} = \frac{67}{160}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}
 \end{aligned}$$

解法二:

(1) 设3人抽奖总次数为 X , 则 X 的可能取值为3,4,5,6. 1分

由题意知, 每位打卡十八景游客至少打卡两个景点的概率为 $\frac{9}{10}$,

只打卡一个景点的概率为 $\frac{1}{10}$ 2分

依题可得 $P(X=3) = C_3^0 \times (\frac{9}{10})^0 \times (\frac{1}{10})^3 = \frac{1}{1000}$, 5分

所以 $P(X \geq 4) = 1 - P(X=3) = 1 - (\frac{1}{10})^3 = \frac{999}{1000} = 0.999$ 6分

(2) 同解法一. 12分

解法三:

(1) 设3人抽奖总次数为 X , 设抽取的3位打卡十八景游客中至少打卡两个景点的人数为 Y , 则 $X = 2Y + (3 - Y) = 3 + Y$, 1分

由题可知, $Y \sim B(3, 0.9)$, 4分

故 $P(X \geq 4) = P(3 + Y \geq 4) = P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - (\frac{1}{10})^3 = 0.999$ 6分

(2) 同解法一. 12分



19. (12分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且满足 $c \cos B + (b + 2a) \cos C = 0$.

(1) 求 C ;

(2) 若 CD 平分 $\angle ACB$, 且 $\overline{AD} = 2\overline{DB}$, $CD = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【命题意图】 本小题主要考查解三角形、三角恒等变换等基础知识, 考查推理论证、运算求解能力, 考查数形结合和化归与转化等思想, 体现综合性与应用性, 导向对发展直观想象、逻辑推理及数学运算等核心素养的关注.

【试题解析】 解法一:

(1) 因为 $c \cos B + (b + 2a) \cos C = 0$,

所以由正弦定理, 可得 $\sin C \cos B + (\sin B + 2 \sin A) \cos C = 0$, 1分

即 $\sin C \cos B + \sin B \cos C - 2 \sin A \cos C = 0$, $\sin(B + C) + 2 \sin A \cos C = 0$, ... 2分

所以 $\sin A + 2 \sin A \cos C = 0$, 3分

又 $\sin A > 0$, 所以 $\cos C = -\frac{1}{2}$, 4分

因为 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{2}{3}\pi$ 5分

(2) 因为 $\overline{AD} = 2\overline{DB}$, 所以 $\overline{CD} = \frac{2}{3}\overline{CB} + \frac{1}{3}\overline{CA}$, 6分

两边平方, 得 $\overline{CD}^2 = \frac{4}{9}\overline{CB}^2 + \frac{1}{9}\overline{CA}^2 + \frac{4}{9}\overline{CB} \cdot \overline{CA}$, 7分

即 $4a^2 + b^2 - 2ab = 36$ ①. 8分

又因为 CD 平分 $\angle ACB$, 所以 $\frac{b}{a} = \frac{AD}{DB} = 2$, 即 $b = 2a$ ②. 9分

由①②, 解得 $a = 3, b = 6$ 10分

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = 9 \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ 12分

解法二:

(1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理, 得 $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$,
..... 1 分

又因为 $c \cos B + (b+2a) \cos C = 0$,

所以 $\frac{a^2+c^2-b^2}{2a} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2a} + \frac{a^2+b^2-c^2}{b} = 0$, 2 分

即 $a^2+b^2-c^2 = -ab$, 3 分

所以 $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = -\frac{1}{2}$, 4 分

因为 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{2}{3}\pi$ 5 分

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, $\overline{AD} = 2\overline{DB}$, 所以 $\frac{AD}{DB} = 2$, 6 分

又因为 CD 平分 $\angle ACB$, 所以 $\frac{b}{a} = \frac{AD}{DB} = 2$, 即 $b = 2a$ ①. 7 分

在 $\triangle ACD$ 中, 由余弦定理, 得 $CA^2 + CD^2 - AD^2 = 2CA \cdot CD \cos \angle ACD$,

即 $b^2 + 4 - \frac{4}{9}c^2 = 2b$ ②. 8 分

在 $\triangle BCD$ 中, 由余弦定理, 得 $CD^2 + CB^2 - BD^2 = 2CD \cdot CB \cos \angle DCB$,

即 $a^2 + 4 - \frac{1}{9}c^2 = 2a$ ③. 9 分

由①②③解得 $a=3$, $b=6$ 10 分

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = 9 \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ 12 分

解法三: (1) 同解法一. 5 分

(2) 过 D 点作 $DE \parallel AC$ 交 CB 于点 E 6 分

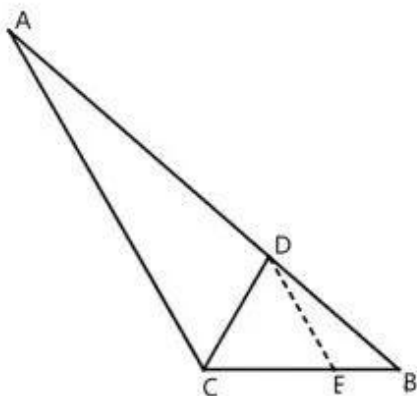
因为 $\angle ACB = 120^\circ$, 且 CD 平分 $\angle ACB$,

所以 $\angle ACD = \angle CDE = \angle DCE = 60^\circ$, 7 分

所以 $\triangle CDE$ 为等边三角形, 所以 $CD = CE = DE = 2$ 8 分

又因为 $\frac{DE}{AC} = \frac{BE}{BC} = \frac{BD}{BA} = \frac{1}{3}$, 所以 $BC = 3$, $AC = 6$ 10 分

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = 9 \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ 12 分



解法四：(1) 同解法一。..... 5分

(2) 在 $\triangle ABC$ 中， $\vec{AD} = 2\vec{DB}$ ，所以 $\frac{AD}{DB} = 2$ 。..... 6分

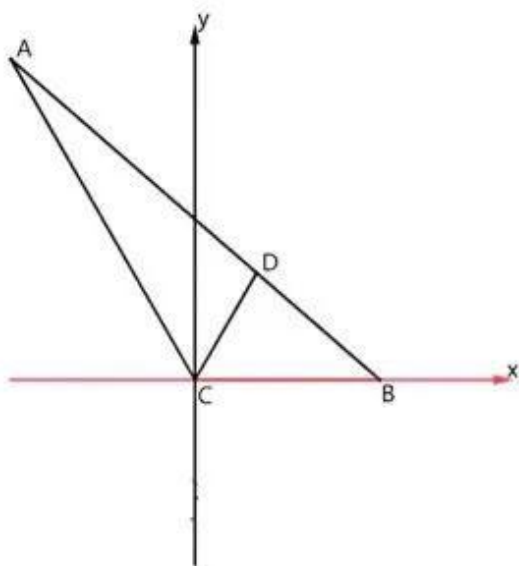
又因为 CD 平分 $\angle ACB$ ，所以 $\frac{b}{a} = \frac{AD}{DB} = 2$ 。..... 7分

如图，以 C 为原点建系： $C(0,0)$ ， $B(a,0)$ ， $A(-a,\sqrt{3}a)$ ， $D(\frac{1}{3}a,\frac{\sqrt{3}}{3}a)$ 。..... 8分

由 $CD = 2$ ，所以 $(\frac{1}{3}a)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3}a)^2 = 4$ ，所以 $a = 3$ ，..... 9分

则 $b = 6$ 。..... 10分

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = 9 \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ ，..... 12分



20. (12分)

已知函数 $f(x) = (x-2)(ae^x - x)$.

- (1) 当 $a=4$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线方程;
 (2) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

【命题意图】 本小题主要考查运用导数求切线方程, 判断函数的单调性等基础知识; 考查推理论证、运算求解等能力; 考查化归与转化、数形结合等数学思想; 体现综合性、应用性与创新性, 导向对发展逻辑推理、数学运算、直观想象等核心素养的关注.

【试题解析】

(1) 由已知 $f(x) = (x-2)(ae^x - x)$,

则 $f'(x) = ae^x - x + ae^x(x-2) - (x-2) = (x-1)(ae^x - 2)$, 1分

当 $a=4$ 时, $f(0) = -8$, $f'(0) = -2$, 3分

则曲线 $y=f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y+8 = -2x$, 即 $2x+y+8=0$ 4分

(2) 由 (1) 知, $f'(x) = (x-1)(ae^x - 2)$,

① 当 $a \leq 0$ 时, $ae^x - 2 < 0$,

当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调递增; 5分

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递减; 6分

② 当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) = (x-1)(ae^x - 2) = 0$, 得 $x_1 = 1$, $x_2 = \ln \frac{2}{a}$ 7分

(i) 当 $0 < a < \frac{2}{e}$ 时, $x_1 < x_2$,

当 $x \in (-\infty, 1) \cup (\ln \frac{2}{a}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1), (\ln \frac{2}{a}, +\infty)$ 单调递增;

..... 8分

当 $x \in (1, \ln \frac{2}{a})$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(1, \ln \frac{2}{a})$ 单调递减; 9分

(ii) 当 $a = \frac{2}{e}$ 时, $x_1 = x_2 = 1$, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 \mathbf{R} 单调递增; 10分

(iii) 当 $a > \frac{2}{e}$ 时, $x_1 > x_2$,

当 $x \in (-\infty, \ln \frac{2}{a}) \cup (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln \frac{2}{a}), (1, +\infty)$ 单调递增;

.....

当 $x \in (\ln \frac{2}{a}, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(\ln \frac{2}{a}, 1)$ 单调递减;

综上所述可得: ①当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 单调递减;

②当 $0 < a < \frac{2}{e}$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1), (\ln \frac{2}{a}, +\infty)$ 单调递增, 在 $(1, \ln \frac{2}{a})$ 单调递减;

③当 $a = \frac{2}{e}$ 时, $f(x)$ 在 \mathbf{R} 单调递增;

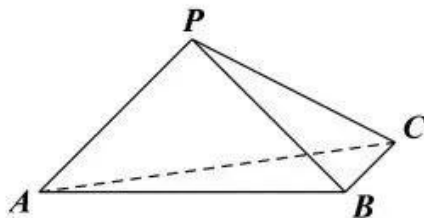
④当 $a > \frac{2}{e}$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln \frac{2}{a}), (1, +\infty)$ 单调递增, 在 $(\ln \frac{2}{a}, 1)$ 单调递减. ... 12 分



21. (12分)

如图, 三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp PB$, $PA=PB$, $AB=2BC=2$, 平面 $PAB \perp$ 平面 ABC .

- (1) 求三棱锥 $P-ABC$ 的体积的最大值;
(2) 求二面角 $P-AC-B$ 的正弦值的最小值.



【命题意图】 本小题主要考查线面垂直的判定定理, 面面垂直的性质定理, 三棱锥体积, 二面角, 三角形面积等基础知识; 考查空间想象能力、推理论证及运算求解能力; 考查数形结合思想、化归与转化思想等; 体现基础性、综合性与应用性, 导向对发展逻辑推理、数学运算、直观想象等核心素养的关注.

【试题解析】 解法一: (1) 取 AB 的中点 O , 连接 PO .

因为 $PA=PB$, 所以 $PO \perp AB$ 1分

又因为平面 $PAB \perp$ 平面 ABC , 平面 $PAB \cap$ 平面 $ABC = AB$, $PO \subset$ 平面 PAB ,
所以 $PO \perp$ 平面 ABC 2分

因为 $PA \perp PB$, $PA=PB$, $AB=2BC=2$,

所以 $PO=1$, $BC=1$ 3分

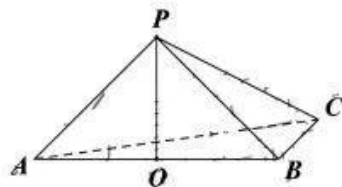
所以三棱锥 $P-ABC$ 的体积为

$$V_{P-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot PO = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC \right) \cdot PO = \frac{1}{3} \cdot \sin \angle ABC, \dots\dots 4分$$

因为 $\angle ABC \in (0, \pi)$, 所以 $0 < \sin \angle ABC \leq 1$, $V_{P-ABC} \leq \frac{1}{3}$,

当且仅当 $\sin \angle ABC = 1$, 即 $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ 时, 等号成立.

故三棱锥 $P-ABC$ 的体积的最大值为 $\frac{1}{3}$ 5分



(2) 由 (1) 可知 $PO \perp$ 平面 ABC , 所以 $PO \perp AC$ 6分

过 O 作 $OD \perp AC$ 于 D , 连结 PD .

因为 $PO \cap OD = O$ ，所以 $AC \perp$ 平面 POD ， 7 分

又 $PD \subset$ 平面 POD ，所以 $PD \perp AC$ ，

所以 $\angle PDO$ 为二面角 $P-AC-B$ 的平面角。 8 分

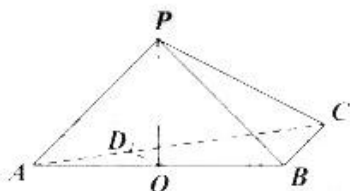
在 $Rt\triangle PDO$ 中， $\tan \angle PDO = \frac{PO}{OD} = \frac{1}{OD}$ ， 9 分

因为 $0 < OD \leq \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}$ ，当且仅当 $BC \perp AC$ 时等号成立。 10 分

所以 $\tan \angle PDO$ 的最小值为 2。 11 分

此时 $\sin \angle PDO$ 取得最小值 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 。

故二面角 $P-AC-B$ 的正弦值的最小值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 。 12 分



解法二：(1) 同解法一。 5 分

(2) 由 (1) 可知 $PO \perp$ 平面 ABC ，

以 O 为坐标原点，向量 $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OP}$ 为 x 轴， z 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$ 。则 $P(0,0,1)$ ， $A(-1,0,0)$ ， $B(1,0,0)$ ， $\overrightarrow{AP} = (1,0,1)$ 。

设 $C(x_0, y_0, 0) (0 < x_0 < 2, y_0 \neq 0)$ ，则 $\overrightarrow{AC} = (x_0 + 1, y_0, 0)$ 。 6 分

设平面 PAC 的法向量为 $m = (x, y, z)$ 。

则 $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{AP} = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x + z = 0, \\ (x_0 + 1)x + y_0 y = 0, \end{cases}$ 取 $x = -1$ ，则 $m = (-1, \frac{x_0 + 1}{y_0}, 1)$ 。 7 分

又平面 ABC 的法向量为 $n = (0,0,1)$ 。 8 分

设二面角 $P-AC-B$ 的大小为 θ ， $\theta \in (0, \pi)$ 。

所以 $\cos \theta = \frac{|n \cdot m|}{|n| \cdot |m|} = \frac{1}{\sqrt{2 + \left(\frac{x_0 + 1}{y_0}\right)^2}}$ 。 9 分

因为 $BC = 1$ ，所以 $(x_0 - 1)^2 + y_0^2 = 1$ ， 10 分

令 $t = \left(\frac{x_0+1}{y_0}\right)^2 (t > 0)$, 则 $t = \frac{(x_0+1)^2}{1-(x_0-1)^2}$,

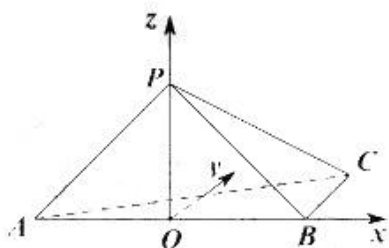
整理可得 $(t+1)x_0^2 + (2-2t)x_0 + 1 = 0$,

所以 $\Delta = (2-2t)^2 - 4(t+1) \geq 0$, 解得 $t \geq 3$ 11分

所以当 $t=3$, 即 $x_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, $\cos\theta$ 取得最大值 $\frac{\sqrt{5}}{5}$,

此时 $\sin\theta$ 取得最小值 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故二面角 $P-AC-B$ 的正弦值的最小值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 12分



解法三: (1) 同解法 5分

(2) 由 (1) 可知 $PO \perp$ 平面 ABC ,

以 B 为坐标原点, 向量 \overrightarrow{BA} 为 y 轴正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系.....

$O-xyz$. 则 $P(0,1,1)$, $A(0,2,0)$, $B(0,0,0)$, $\overrightarrow{AP} = (0,-1,1)$.

设 $C(x_0, y_0, 0) (-1 < x_0 < 1, y_0 \neq 0)$, 则 $\overrightarrow{AC} = (x_0, y_0 - 2, 0)$ 6分

设平面 PAC 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$.

则 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AP} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -y + z = 0, \\ x_0x + (y_0 - 2)y = 0, \end{cases}$ 取 $y=1$, 则 $\mathbf{m} = (1, \frac{2-y_0}{x_0}, 1)$ 7分

又平面 ABC 的法向量为 $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ 8分

设二面角 $P-AC-B$ 的大小为 θ , $\theta \in (0, \pi)$.

所以 $\cos\theta = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2 + \left(\frac{2-y_0}{x_0}\right)^2}}$ 9分

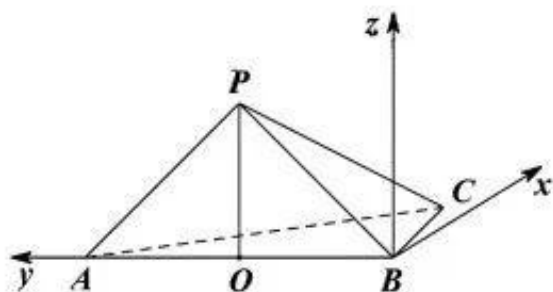
因为 $BC=1$, 所以 $x_0^2 + y_0^2 = 1$, 10分

令 $t = \frac{y_0 - 2}{x_0}$, 表示圆 $x_0^2 + y_0^2 = 1$ 上的点与点 $(0, 2)$ 的斜率,

所以 $t \leq -\sqrt{3}$ 或 $t \geq \sqrt{3}$, 所以 $(\frac{y_0 - 2}{x_0})^2 \geq 3$,

即 $x_0 = \frac{1}{2}, y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, $\cos \theta$ 取得最大值 $\frac{\sqrt{5}}{5}$, 此时 $\sin \theta$ 取得最小值 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故二面角 $P-AC-B$ 的正弦值的最小值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 12分



22. (12分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 上、下顶点分别为 A, B . 圆

$O: x^2 + y^2 = 2$ 与 x 轴正半轴的交点为 P , 且 $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = -1$.

(1) 求 E 的方程;

(2) 直线 l 与圆 O 相切且与 E 相交于 M, N 两点, 证明: 以 MN 为直径的圆恒过定点.

【命题意图】本小题主要考查椭圆的标准方程, 直线与圆的位置关系等基础知识; 考查运算求解、逻辑推理和创新能力等; 考查数形结合、函数与方程等思想; 体现基础性、综合性与创新性, 导向对直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养的关注.

【试题解析】解法一: (1) 由已知得 $A(0, b), B(0, -b), P(\sqrt{2}, 0)$ 1分

则 $\overline{PA} = (-\sqrt{2}, b), \overline{PB} = (-\sqrt{2}, -b), \overline{PA} \cdot \overline{PB} = 2 - b^2 = -1$, 所以 $b^2 = 3$ 3分

因为 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 又 $b^2 + c^2 = a^2$, 所以 $c^2 = 3, a^2 = 6$.

故 E 的方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ 4分

(2) 当直线 l 的斜率存在时, 设 l 的方程为 $y = kx + m$, 即 $kx - y + m = 0$ 5分

因为直线 l 与圆 O 相切, 所以 $\frac{|m|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{2}$, 则 $m^2 = 2k^2 + 2$ 6分

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $y_1 = kx_1 + m, y_2 = kx_2 + m$.

$$\text{由} \begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$$

化简, 得 $(2k^2 + 1)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 6 = 0$, 7分

$$\text{由韦达定理, 得} \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{4km}{2k^2 + 1}, \\ x_1 x_2 = \frac{2m^2 - 6}{2k^2 + 1}, \end{cases} \dots\dots\dots 8分$$

所以 $y_1 y_2 = (kx_1 + m)(kx_2 + m)$

$$= k^2 x_1 x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2$$

$$= k^2 \cdot \frac{2m^2 - 6}{2k^2 + 1} - km \cdot \frac{4km}{2k^2 + 1} + m^2$$

$$= \frac{m^2 - 6k^2}{2k^2 + 1}, \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

所以 $x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{2m^2 - 6}{2k^2 + 1} + \frac{m^2 - 6k^2}{2k^2 + 1} = \frac{3(m^2 - 2k^2 - 2)}{2k^2 + 1} = 0$, $\dots\dots\dots 10 \text{分}$

故 $OM \perp ON$, 即以 MN 为直径的圆过原点 O . $\dots\dots\dots 11 \text{分}$

当直线 l 的斜率不存在时, l 的方程为 $x = \sqrt{2}$ 或 $x = -\sqrt{2}$.

这时 $M(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $N(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ 或 $M(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $N(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

显然, 以 MN 为直径的圆也过原点 O .

综上, 以 MN 为直径的圆恒过原点 O . $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

解法二: (1) 同解法一. $\dots\dots\dots 4 \text{分}$

(2) 设直线 l 与圆 O 相切于点 $Q(x_0, y_0)$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$. $\dots\dots\dots 5 \text{分}$

当 $x_0 \cdot y_0 \neq 0$ 时, 则 $k_{OQ} = \frac{y_0}{x_0}$.

因为直线 l 与圆 O 相切, 所以 $l \perp OQ$, 所以 $k_l = -\frac{x_0}{y_0}$ $\dots\dots\dots 6 \text{分}$

则直线 l 的方程为 $y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$.

因为 $x_0^2 + y_0^2 = 2$, 故 l 的方程可化为 $x_0x + y_0y = 2$. $\dots\dots\dots 7 \text{分}$

$$\text{由} \begin{cases} x_0x + y_0y = 2, \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$$

化简, 得 $(2x_0^2 + y_0^2)y^2 - 4y_0y + 4 - 6x_0^2 = 0$, $(2x_0^2 + y_0^2)x^2 - 8x_0x + 8 - 6y_0^2 = 0$.

$\dots\dots\dots 8 \text{分}$

所以 $y_1y_2 = \frac{4 - 6x_0^2}{2x_0^2 + y_0^2}$, $x_1x_2 = \frac{8 - 6y_0^2}{2x_0^2 + y_0^2}$. $\dots\dots\dots 9 \text{分}$

所以 $x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{8 - 6y_0^2}{2x_0^2 + y_0^2} + \frac{4 - 6x_0^2}{2x_0^2 + y_0^2} = \frac{12 - 6y_0^2 - 6x_0^2}{2x_0^2 + y_0^2} = 0$, $\dots\dots\dots 10 \text{分}$

故 $OM \perp ON$, 即以 MN 为直径的圆过原点 O . $\dots\dots\dots 11 \text{分}$

当 $x_0 \cdot y_0 = 0$ 时, 则 $Q(\pm\sqrt{2}, 0)$ 或 $Q(0, \pm\sqrt{2})$,

这时 $M(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $N(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ 或 $M(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $N(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

显然, 以 MN 为直径的圆也过原点 O .

综上, 以 MN 为直径的圆恒过原点 O . $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

