开封市2023届高三年级第二次模拟考试
数学（理科）参考答案

一、选择题（每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	C	B	A	A	B	A	C	B	A	D

二、填空题（每小题5分，共20分）

13. $1-\mathrm{i}$（答案不唯一，虚部为-1）　　14. $\dfrac{9}{16}$

15. $5\sqrt{6}$　　16. 双曲线,6（第一空2分，第二空3分）

三、解答题（共70分）

17.（1）当$n\geq 2$时，因为$a_n=S_n-S_{n-1}$，所以$S_n+S_{n-1}=\dfrac{1}{S_n-S_{n-1}}$，……2分

即$S_n^2-S_{n-1}^2=1$，所以数列$\{S_n^2\}$为等差数列，公差为1，首项为$S_1^2=1$，……4分

所以$S_n^2=n$，$\{a_n\}$为正项数列，则$S_n=\sqrt{n}$；……5分

（2）由（1）可知，当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$，

$a_1=1$也适合上式，所以$a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$，……7分

所以$b_n=\dfrac{(-1)^n}{a_n}=(-1)^n(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})$，……8分

当n为偶数时，$T_n=-1+1+\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n-1}+\sqrt{n}=\sqrt{n}$……10分

当n为奇数时，$T_n=-1+1+\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\cdots-\sqrt{n-1}-\sqrt{n}=-\sqrt{n}$……11分

综上可知$T_n=\begin{cases}\sqrt{n}, & n\text{为偶数},\\ -\sqrt{n}, & n\text{为奇数}.\end{cases}$……12分

18.（1）样区野生动物平均数为$\dfrac{1200-28-8+66+70}{20}=65$，

地块数为200，该地区这种野生动物的估计值为$200\times 65=13000$.……3分

（2）将样本点$(4,28)$,$(2,8)$替换为$(3,66)$,$(3,70)$，构成一组新的样本数据$(x_i,\ y_i)(i=1,2,\cdots,20)$，

计算得$\bar{x}=\dfrac{60-4-2+3+3}{20}=3$，$\bar{y}=\dfrac{1200-28-8+66+70}{20}=65$，

$\sum\limits_{i=1}^{20}x_iy_i=4400-4\times 28-2\times 8+3\times 66+3\times 70=4680$，$\sum\limits_{i=1}^{20}x_i^2=260-16-4+9+9=258$，……6分

所以$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{20}x_iy_i-20\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{20}x_i^2-20\bar{x}^2}=\dfrac{4680-20\times 3\times 65}{258-20\times 9}=10$，$\hat{a}=65-10\times 3=35$，……8分

所求回归方程为$\hat{y}=10x+35$.……9分 来源：高三答案公众号

（3）每个地块的植物覆盖面积增加1公顷，该地区这种野生动物增加数量的估计值为：

$10\times 200=2000$.……12分

19. (1) 由已知，ΔADC 为等腰直角三角形，E 为 AC 的中点，可得 $DE\perp AC$，……1 分

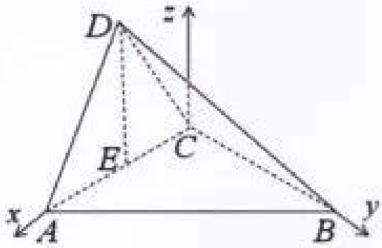
ΔABC 中，$AC=2$，$AB=2\sqrt{2}$，$\angle BAC=45^\circ$，所以 $BC=2$，

因为 $AC^2+BC^2=AB^2$，所以 $AC\perp BC$，……2 分

又因为 $AD\perp BC$，$AC\cap AD=A$，所以 $BC\perp$ 平面 ADC，

又 $DE\subset$ 平面 ADC，所以 $BC\perp DE$，……4 分

又 $AC\cap BC=C$，所以 $DE\perp$ 平面 ABC. ……5 分



（2）如图过 C 点作平面 ABC 的垂线 CP，以 C 为原点，

分别以 $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CP}$ 为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系 $C\text{-}xyz$，

则 $C(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$E(1,0,0)$，

设 $D\left(1,a,\sqrt{1-a^2}\right)$，其中 $-1<a<1$，

则 $\overrightarrow{BD}=\left(1,a-2,\sqrt{1-a^2}\right)$，$\overrightarrow{CA}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{CD}=\left(1,a,\sqrt{1-a^2}\right)$，……7 分

设平面 ACD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{CA}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x=0,\\ x+ay+\sqrt{1-a^2}z=0,\end{cases}$ 可得 $\boldsymbol{n}=\left(0,\sqrt{1-a^2},-a\right)$，……8 分

由题意 $\left|\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{BD}>\right|=\dfrac{\left|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}\right|}{|\boldsymbol{n}|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|}=\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $a=\dfrac{1}{2}$ 或 $a=\dfrac{1}{4}$，……9 分

易知平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，……10 分

当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$\boldsymbol{n}=\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$，$\cos<\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}>=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=-\dfrac{1}{2}$，二面角 $D\text{-}AC\text{-}B$ 的余弦值为 $\dfrac{1}{2}$，

当 $a=\dfrac{1}{4}$ 时，$\boldsymbol{n}=\left(0,\dfrac{\sqrt{15}}{4},-\dfrac{1}{4}\right)$，$\cos<\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}>=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=-\dfrac{1}{4}$，二面角 $D\text{-}AC\text{-}B$ 的余弦值为 $\dfrac{1}{4}$，

综上，二面角 $D\text{-}AC\text{-}B$ 的余弦值为 $\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{1}{4}$. ……12 分

20.（1）当 AB 平行于 x 轴时，四边形 $ABCD$ 为矩形，$|AB|=2p$，$|AD|=\dfrac{p}{2}$，……2 分

所以 $S_{ABCD}=|AB|\cdot|AD|=2p\times\dfrac{p}{2}=p^2=4$，解得 $p=2$. ……4 分

（2）由（1），抛物线 $E:x^2=4y$，即 $y=\dfrac{x^2}{4}$，$y'=\dfrac{x}{2}$，$F(0,1)$，

设 $l:y=kx+1$，$P(x_0,\ y_0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $y'|_{x=x_0}=\dfrac{x_0}{2}=k\Rightarrow x_0=2k$，$y_0=\dfrac{{x_0}^2}{4}=k^2$，……5 分

联立 $\begin{cases}x^2=4y,\\ y=kx+1,\end{cases}$ 得 $y^2-2\left(1+2k^2\right)y+1=0$，$y_1+y_2=2\left(1+2k^2\right)$，$y_1y_2=1$，……6 分

则 $|AB|=y_1+y_2+2=4\left(1+k^2\right)$，点 P 到 AB 的距离 $d=\dfrac{\left|2k^2-k^2+1\right|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{1+k^2}$，

所以 $S_{\triangle ABP}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=2\left(1+k^2\right)\sqrt{1+k^2}$，$S_{\text{弓形}APB}=\dfrac{8}{3}\left(1+k^2\right)\sqrt{1+k^2}$，……8 分

又 $|y_1-y_2|=|k||x_1-x_2|=|k||CD|$，所以 $|CD|=4\sqrt{1+k^2}$，

又四边形 $ABCD$ 是直角梯形或矩形，所以 $S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}|y_1+y_2|\cdot|CD|=4(1+2k^2)\sqrt{1+k^2}$，……9 分

所求概率 $P=1-\frac{S_{\triangle APB}}{S_{四边形ABCD}}=1-\frac{\frac{8}{3}(1+k^2)\sqrt{1+k^2}}{4(1+2k^2)\sqrt{1+k^2}}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3(1+2k^2)}$，……11 分

由 $k^2\geq 0$ 得 $\frac{1}{3}\leq P<\frac{2}{3}$，所以所求概率的取值范围是 $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. ……12 分

21.（1）$f'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}+1$，$f'(1)=1$，$f(1)=2$，……2 分

故 $f(x)$ 在点 P 处的切线方程为：$y=x+1$. ……4 分

（2）若 $MN//l$，则 $\frac{f(m)-f(n)}{m-n}=1$，即 $f(m)-m=f(n)-n$，

即 $\frac{\ln m+1}{m}=\frac{\ln n+1}{n}$，即 $\frac{1}{m}\left(1-\ln\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{n}\left(1-\ln\frac{1}{n}\right)$，……5 分

设 $g(x)=x(1-\ln x)$，$x_1=\dfrac{1}{m}$，$x_2=\dfrac{1}{n}$，则 $g(x_1)=g(x_2)$，所证为 $2<x_1+x_2<\mathrm{e}$，

$g'(x)=-\ln x$，当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$，当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，

所以函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，……7 分

不妨设 $x_1<x_2$，由 $g(x)$ 的单调性及 $g(\mathrm{e})=0$ 易知 $0<x_1<1<x_2<\mathrm{e}$，

①证明 $2<x_1+x_2$：

令 $h_1(x)=g(x)-g(2-x)$，$x\in(0,1)$，$h_1'(x)=-\ln\left(x(2-x)\right)>0$，

所以 $h_1(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，$h_1(1)=0$，所以 $h_1(x)<0$，

所以 $h_1(x_1)=g(x_1)-g(2-x_1)<0$，即 $g(x_2)=g(x_1)<g(2-x_1)$，

又 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $x_2>2-x_1$，即 $2<x_1+x_2$. ……9 分

②证明 $x_1+x_2<\mathrm{e}$：

当 $x_2\le \mathrm{e}-1$ 时，结论显然成立；

当 $\mathrm{e}-1<x_2<\mathrm{e}$ 时，令 $h_2(x)=g(x)-g(\mathrm{e}-x)$，$x\in(\mathrm{e}-1,\mathrm{e})$，$h_2'(x)=-\ln\left(x(\mathrm{e}-x)\right)$，

所以 $h_2(x)$ 在 $(\mathrm{e}-1,\mathrm{e})$ 上先单调递减后单调递增，可证 $h_2(x)<0$，

所以 $h_2(x_2)=g(x_2)-g(\mathrm{e}-x_2)<0$，即 $g(x_1)=g(x_2)<g(\mathrm{e}-x_2)$，

又 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，所以 $x_1<\mathrm{e}-x_2$，即 $x_1+x_2<\mathrm{e}$. ……11 分

综上所述，$2<x_1+x_2<\mathrm{e}$ 即 $2<\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}<\mathrm{e}$ 得证. ……12 分

22.（1）由 C_2 的参数方程得：$(\cos\theta+\sin\theta)^2+(\cos\theta-\sin\theta)^2=\dfrac{x^2}{2}+y^2=2$，

曲线 C_2 的普通方程为：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$. ……4 分

（2）由已知得：曲线 C_1 为过点 $M(1,0)$ 的直线，其标准参数方程形式为：$\begin{cases}x=1+\dfrac{1}{2}t,\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（$t$为参数），

联立 C_1 和 C_2 的方程得：$\left(1+\frac{1}{2}t\right)^2+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2-4=0$，即 $7t^2+4t-12=0,\Delta>0$，……6 分

设 C_1 与 C_2 的两个交点 A,B 对应的参数分别为 t_1,t_2，所以 $t_1+t_2=-\frac{4}{7},t_1t_2=-\frac{12}{7}$，……8 分

因为 $t_1t_2=-\frac{12}{7}<0$，由 t 的几何意义得：$\left|\frac{1}{|MA|}-\frac{1}{|MB|}\right|=\left|\frac{1}{|t_1|}-\frac{1}{|t_2|}\right|=\left|\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right|=\left|\frac{t_1+t_2}{t_1\cdot t_2}\right|=\frac{1}{3}$. ……10 分

23.（1）∵ $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$，$a^2+b^2+c^2\ge 3\sqrt[3]{(abc)^2}$，

∴ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\ge 9\sqrt[3]{(abc)^3}$，……2 分 来源：高三答案公众号

∵ $a+b+c=1$，∴ $a^2+b^2+c^2\ge 9abc$，当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时 "=" 成立. ……4 分

（2）∵ $a,b,c\in\mathbf{R}_+$，

∴ $\frac{(b+1)^2}{a}+16a\ge 2\sqrt{\frac{(b+1)^2}{a}\cdot 16a}=8(b+1)$，当且仅当 $b+1=4a$ 时取等号，

$\frac{(c+1)^2}{b}+16b\ge 2\sqrt{\frac{(c+1)^2}{b}\cdot 16b}=8(c+1)$，当且仅当 $c+1=4b$ 时取等号，

$\frac{(a+1)^2}{c}+16c\ge 2\sqrt{\frac{(a+1)^2}{c}\cdot 16c}=8(a+1)$，当且仅当 $a+1=4c$ 时取等号，……6 分

∴ $\frac{(a+1)^2}{c}+16c+\frac{(c+1)^2}{b}+16b+\frac{(b+1)^2}{a}+16a\ge 8(a+b+c+3)=32$，……8 分

当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时 "=" 成[redacted]……10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。