2020~2021学年度苏锡常镇四市高三教学情况调研（二）
数 学

2021.05

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3.考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.若 a∈R,则“a=2”是“复数 z=2-ai 的模为 $2\sqrt{2}$”（i 为虚数单位）的

A.充分不必要条件 B.必要不充分条件 C.充要条件 D.既不充分也不必要条件

2.若集合 A={x|y=$\sqrt{2-x}$},B={2|y=2^x},则 A∩B=

A.(-∞,2] B.[2,+∞) C.(0,2] D.[0,2]

3.从标有1,2,3,4,5,6的6张卡片中，不放回地随机抽取两次，每次抽取一张．“在第一次抽到标号是4的条件下，第二次抽到的标号是奇数”的概率为

A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{10}$ D. $\frac{1}{12}$

4.已知椭圆 E: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为 F_2,左顶点为 A_1,若 E 上的点 P 满足 $PF_2\perp x$ 轴，$\sin\angle PA_1F_2=\frac{3}{5}$,则 E 的离心率为

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$

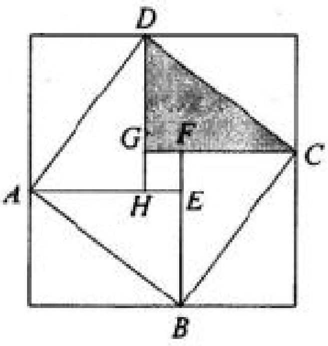
5.已知 a=sin1,b=cos1,则下列不等式正确的是

A. $\log_a b<a^b<b^a$ B. $\log_a b<b^a<a^b$

C. $a^b<b^a<\log_a b$ D. $b^a<a^b<\log_a b$

6.已知 $3\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})=\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})$,则 cos2α=

A. $\frac{1}{7}$ B. $-\frac{1}{7}$ C. $\frac{11}{13}$ D. $-\frac{11}{13}$



（第7题图）

7.我国汉代数学家赵爽为了证明勾股定理，创制了一幅“弦图”，它由四个全等的直角三角形和一个正方形所构成（如图），后人称其为“赵爽弦图”。在直角三角形 CGD 中，已知 GC=4,GD=3,在线段 EF 上任取一点 P,线段 BC 上任取一点 Q,则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AD}$ 的最大值为

A.25 B.27 C.29 D.31

8.已知函数 $f(x)=x^2-\frac{2x^2}{3^x+1}+1$.若存在 m∈(1,4)使得不等式 $f(4-ma)+f(m^2+3m)>2$ 成立，则实数 a 的取值范围是

A.(-∞,7) B.(-∞,7] C.(-∞,8) D.(-∞,8]

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9.某中学为了研究高三年级学生的身高和性别的相关性问题，从高三年级 800 名学生中随机抽取 200 名学生测量身高，测量数据的列联表如下：

单位：人

性别	身高		合计
	低于 170cm	不低于 170cm	
女	80	16	96
男	20	84	104
合计	100	100	200

下列说法正确的有

A.从列联表可以判断该样本是由分层抽样而得

B.从列联表可以看出该中学高三学生身高最高的是男生

C.有 99.9%的把握认为该中学高三学生的身高与性别有关联

D.若该样本中男生身高 h(单位：cm)服从正态分布 N(175,25),则该样本中身高在区间（175,180]内的男生超过 30 人

附 1：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$（其中 n=a+b+c+d).

临界值表：

$P(\chi^2\geqslant x_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
x_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

附 2:若 X~N(μ,σ²),则随机变量 X 取值落在区间（μ-σ,μ+σ)上的概率约为 68.3%.

10.在数学发展史上，曾经定义过下列两种函数：1-cosθ 称为角 θ 的正矢，记作 ver sinθ;1-sinθ 称为角 θ 的余矢，记作 cover sin0.则

A.ver sin$\dfrac{2021x}{6}=\dfrac{3}{2}$

B.函数 f(θ)=versinθ·coversinθ 的最大值为$\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$

C.存在一个 θ,使得函数 f(θ)=versinθ-coversinθ 的值为$\dfrac{3}{2}$

D.将函数 f(f)=cover sinθ 的图象向左平移$\dfrac{\pi}{2}$个单位后，可得到函数 g(θ)=versinθ 的图象

11.已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为 1,侧棱长为 2,点 M 为侧棱 CC_1 上的动点，AM⊥平面 α.下列说法正确的有

A.异面直线 AM 与 B_1C 可能垂直

B.直线 BC 与平面 α 不可能垂直

C.AB 与平面 α 所成角的正弦值的范围为（0, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$]

D.若 M∈α 且 $CM=MC_1$,则平面 α 截正四棱柱所得截面多边形的周长为 $3\sqrt{2}$

12.已知函数 f(x)的定义域为 R,且在 R 上可导，其导函数记为 f'(x).下列命题正确的有

A.若函数 f(x)是奇函数，则 f '(x)是偶函数

B.若函数 f '(x)是偶函数，则 f(x)　　是奇函数
C.若函数 f(x)是周期函数，则 f '(x)也是周期函数
D.若函数 f '(x)是周期函数，则 f(x)也是周期函数

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．请将答案填写在答题卡相应的位置上。

13.已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$的焦点为 F,点 A(0,2).若线段 FA 的中点 B 在抛物线上，则 p 的值为_______.

14.已知等差数列$\{a_n\}$的首项为 a,公差为 b(其中 $a,b\in N^*$),且 $a_2<ab<a_3$,写出一个满足条件的数列$\{a_n\}$的通项公式：________.

15.已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1,|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|=\sqrt{3}$,$2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=1$,则 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为______；$|\boldsymbol{a}|$等于_________. （第一空 2 分，第二空 3 分）

16.一个组合体由上下两部分组成，上部是一个半球，下部是一个圆柱，半球的底面与圆柱的上底面重合。若该组合体的体积为定值 V,则当圆柱底面半径 r=______时，该组合体的表面积最小。

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(本小题满分 10 分）

在 ΔABC 中，a,b,c 分别为内角 A,B,C 的对边，且 a-b=acosB-bcosA.

（1)求证：a=b;

（2)若 c=4,$\cos C=\dfrac{3}{5}$,求 ΔABC 的面积。

18.(本小题满分 12 分）

在①$na_{n+1}-(n+1)a_n=n^2+n$,②$3S_n=(n+2)a_n$,③$T_{n+1}=\dfrac{(n+2)a_nT_n}{n}$这三个条件中任选一个补充在下面问题中，并解答下列题目。

设首项为 2 的数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,前 n 项积为 T_n,且__________.

（1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

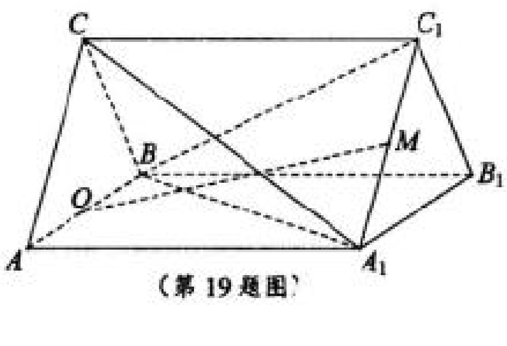
（2)设 $b_n=(-1)^na_n$,求数列$\{b_n\}$的前 n 项和.

19.(本小题满分 12 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，ΔABC 是边长为 2 的等边三角形，平面 ABC⊥平面 AA_1B_1B,$A_1A=A_1B$, $\angle A_1AB=60°$,O 为 AB 的中点，M 为 A_1C_1 的中点.

（1)求证：OM//平面 BB_1C_1C;

（2)求二面角 C_1-BA_1-C 的正弦值.



（第 19 题图）

20.(本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，已知动点 M 到定点 F(-2,0)的距离与到定直线 l:x=$\frac{3}{2}$ 的距离之比为定值$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(1)求动点 M 的轨迹 E 的方程；

(2)过点 F 作互相垂直的两条直线 l_1,l_2,其中 l_1 交动点 M 的轨迹 E 于 M,N 两点，l_2 交圆 D:$(x-4)^2+y^2=9$ 于 P,Q 两点，点 R 是线段 PQ 的中点，求 ΔRMN 面积的最小值。

21.(本小题满分 12 分)

某中学的一个高二学生社团打算在开学初组织部分同学打扫校园。该社团通知高二同学自愿报名，由于报名的人数多达 50 人，于是该社团采用了在报名同学中用抽签的方式来确定打扫校园的人员名单．抽签方式如下：将 50 名同学编号，通过计算机从这 50 个编号中随机抽取 30 个编号，然后再次通过计算机从这 50 个编号中随机抽取 30 个编号，两次都被抽取到的同学打扫校园.

(1)设该校高二年级报名打扫校园的甲同学的编号被抽取到的次数为 Y,求 Y 的数学期望；

(2)设两次都被抽取到的人数为变量 X,则 X 的可能取值是哪些？其中 X 取到哪一个值的可能性最大？请说明理由。

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 f(x)=$\frac{ax}{e^x}$（e 为自然对数的底数）.

(1)若函数 g(x)=x-f(x)在（0,+∞)上为增函数，求实数 a 的取值范围；

(2)证明：对意实数 a,函数 h(x)=f(x)-lnx 有且只有一个零点.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．若 $a\in\mathbf{R}$，则“$a=2$”是“复数 $z=2-a\mathrm{i}$ 的模为 $2\sqrt{2}$”（i 为虚数单位）的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】因为 $|z|=\sqrt{4+a^2}=2\sqrt{2}, a=\pm 2$，所以是充分不必要条件，故选 A

2．若集合 $A=\{x|y=\sqrt{2-x}\}$，$B=\{y|y=2^x\}$，则 $A\cap B=$

A．$(-\infty,2]$　　B．$[2,+\infty)$　　C．$(0,2]$　　D．$[0,2]$

【答案】C

【解析】因为 $A=(-\infty,2], B=(0,+\infty)$，所以 $A\cap B=(0,2]$．故选 C

3．从标有 1，2，3，4，5，6 的 6 张卡片中，不放回地随机抽取两次，每次抽取一张．“在第一次抽到标号是 4 的条件下，第二次抽到的标号是奇数”的概率为

A．$\frac{3}{5}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{10}$　　D．$\frac{1}{12}$

【答案】A

【解析】$P=\frac{3}{5}$，故选 A

4．已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F_2，左顶点为 A_1，若 E 上的点 P 满足 $PF_2\perp x$ 轴，$\sin\angle PA_1F_2=\frac{3}{5}$，则 E 的离心率为

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{2}{5}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{1}{5}$

【答案】C

【解析】因为 $\sin\angle PA_1F_2=\frac{3}{5}, \tan\angle PA_1F_2=\frac{\frac{b^2}{a}}{a+c}=\frac{3}{4}$，所以 $e=\frac{1}{4}$ 故选 C

5．已知 $a=\sin 1$，$b=\cos 1$，则下列不等式正确的是

A．$\log_a b<a^b<b^a$　　　B．$\log_a b<b^a<a^b$

C．$a^b<b^a<\log_a b$　　　D．$b^a<a^b<\log_a b$

【答案】D

【解析】易知：$0<b<\dfrac{\sqrt{2}}{2}<a<1$，则：$\log_a b>\log_a a=1>a^b>a^a>b^a$，故选$D$.

6．已知 $3\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{6})=\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{6})$，则 $\cos 2\alpha=$

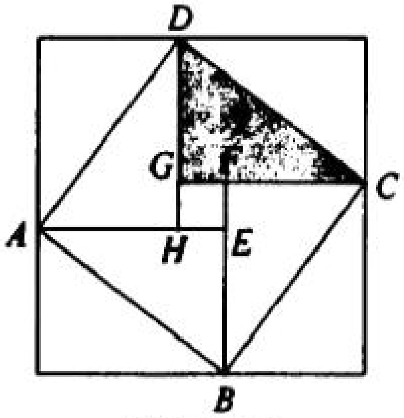
A．$\dfrac{1}{7}$　　B．$-\dfrac{1}{7}$　　C．$\dfrac{11}{13}$　　D．$-\dfrac{11}{13}$

【答案】B

【解析】因为 $3(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\dfrac{1}{2}\cos\alpha)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\dfrac{1}{2}\cos\alpha\Rightarrow\tan\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，所以

$\cos 2\alpha=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-\dfrac{1}{7}$. 故选 B

7．我国汉代数学家赵爽为了证明勾股定理，创制了一幅“弦图”，它由四个全等的直角三角形和一个正方形所构成（如图），后人称其为“赵爽弦图”．在直角三角形 CGD 中，已知 $GC=4$，$GD=3$，在线段 EF 上任取一点 P，线段 BC 上任取一点 Q，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$ 的最大值为



（第 7 题图）

A．25　　B．27　　C．29　　D．31

【答案】C

【解析】显然 $\max=\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=16+12+1=29$，故选C.

8. 已知函数 $f(x)=x^2-\dfrac{2x^2}{3^x+1}+1$．若存在 $m\in(1,4)$ 使得不等式 $f(4-ma)+f(m^2+3m)>2$ 成立，则实数 a 的取值范围是

A. $(-\infty,7)$　　B. $(-\infty,7]$　　C. $(-\infty,8)$　　D. $(-\infty,8]$

【答案】C

解：$f(x)=x^2(1-\dfrac{2}{3^x+1})+1=\dfrac{(3^x-1)x^2}{3^x+1}+1$，$f(x)$ 关于 $(0,1)$ 对称，且 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增

$f(4-ma)+f(m^2+3m)>2$，则 $4-ma+m^2+3m>0$

$\exists m\in(1,4)$，使得 $a<m+\dfrac{4}{m}+3$，易知：$m+\dfrac{4}{m}+3\in[7,8)$，所以 $a<8$，故选 C．

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 某中学为了研究高三年级学生的身高和性别的相关性问题，从高三年级 800 名学生中随机抽取 200 名学生测量身高，测量数据的列联表如下：

单位：人

性别	身高		合计
	低于 170cm	不低于 170cm	
女	80	16	96
男	20	84	104
合计	100	100	200

下列说法正确的有

A. 从列联表可以判断该样本是由分层抽样而得

B. 从列联表可以看出该中学高三学生身高最高的是男生

C. 有 99.9%的把握认为该中学高三学生的身高与性别有关联

D. 若该样本中男生身高 h（单位：cm）服从正态分布 $N(175,25)$，则该样本中身高在区间 $(175,180]$ 内的男生超过 30 人

附 1：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$（其中 $n=a+b+c+d$）.

临界值表：

$P(\chi^2\geqslant x_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
x_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

附 2：若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则随机变量 X 取值落在区间 $(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$ 上的概率约为 68.3%.

【答案】CD

解：AB 均错误

$\chi^2=\dfrac{200(80\times84-16\times20)^2}{96\times104\times100\times100}=\dfrac{2(21-1)^2}{3\times13}=\dfrac{800}{39}>10.828$，则 C 正确

$\dfrac{1}{2}P(170<h<180)\times104\approx35.5>30$，$D$ 正确，因此，选 CD.

10. 在数学发展史上，曾经定义过下列两种函数：$1-\cos\theta$ 称为角 θ 的正矢，记作 $ver\sin\theta$；$1-\sin\theta$ 称为角 θ 的余矢，记作 $cover\sin\theta$. 则

A. $ver\sin\dfrac{2021\pi}{6}=\dfrac{3}{2}$

B. 函数 $f(\theta)=ver\sin\theta\cdot cover\sin\theta$ 的最大值为 $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$

C. 存在一个 θ，使得函数 $f(\theta)=ver\sin\theta-cover\sin\theta$ 的值为 $\dfrac{3}{2}$

D. 将函数 $f(\theta)=cover\sin\theta$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位后，可得到函数 $g(\theta)=ver\sin\theta$ 的图象

【答案】BD

解：选项A：由定义知：$ver\sin\frac{2021\pi}{6}=1-\cos\frac{2021\pi}{6}=1-\cos\frac{5\pi}{6}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}\neq\frac{3}{2}$，错误

选项B：$f(\theta)=(1-\cos\theta)(1-\sin\theta)=\sin\theta\cos\theta-(\sin\theta+\cos\theta)+1$

令$\sin\theta+\cos\theta=x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，$f(\theta)=y$，则$\sin\theta\cos\theta=\frac{x^2-1}{2}$

所以$y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$，易知$\max=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$，正确；

选项C：$f(\theta)=\sin\theta-\cos\theta\leq\sqrt{2}<\frac{3}{2}$，错误；

选项D：$f(\theta)=1-\sin\theta$，$g(\theta)=1-\cos\theta=1-\sin(\theta+\frac{\pi}{2})$，正确；

因此，选BD.

11．已知正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的底面边长为1，侧棱长为2，点M为侧棱CC_1上的动点，$AM\perp$平面α．下列说法正确的有

A．异面直线AM与B_1C可能垂直

B．直线BC与平面α不可能垂直

C．AB与平面α所成角的正弦值的范围为$(0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$

D．若$M\in\alpha$且$CM=MC_1$，则平面α截正四棱柱所得截面多边形的周长为$3\sqrt{2}$

【答案】ABD

解：选项A：显然，当$B_1C\perp BM$时，即有$AM\perp B_1C$，故A正确；

选项B：AM，BC不可能平行，故BC与α不可能垂直，正确；

选项C：即AB与AM所成角的余弦值的范围，易知:$\cos\theta=\frac{1}{AM}\in[\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{2}}{2}]$，错误；

选项D：截面为$\triangle B_1MD_1$，其周长$=3B_1M=3\sqrt{2}$，正确；

因此，选ABD.

12．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且在 $\mathbf{R}$ 上可导，其导函数记为 $f'(x)$．下列命题正确的有

A．若函数 $f(x)$ 是奇函数，则 $f'(x)$ 是偶函数

B．若函数 $f'(x)$ 是偶函数，则 $f(x)$ 是奇函数

C．若函数 $f(x)$ 是周期函数，则 $f'(x)$ 也是周期函数

D．若函数 $f'(x)$ 是周期函数，则 $f(x)$ 也是周期函数

【答案】AC

解：选项 AC：正确；选项 B：错误，如：$f(x)=1$；

选项 D：错误，如：$f(x)=x+\sin x$；因此，选 AC．

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．请将答案填写在答题卡相应的位置上．

13．已知抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点为 F，点 $A(0,\ 2)$．若线段 FA 的中点 B 在抛物线上，则 p 的值为__▲__．

【答案】$p=\sqrt{2}$

解：$F(\frac{p}{2},0)$，则 $B(\frac{p}{4},1)$，则 $1=\frac{p^2}{2}$，得：$p=\sqrt{2}$．

14．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a，公差为 b（其中 $a,b\in\mathbf{N}^*$），且 $a_2<ab<a_3$，写出一个满足条件的数列 $\{a_n\}$ 的通项公式：__▲__．

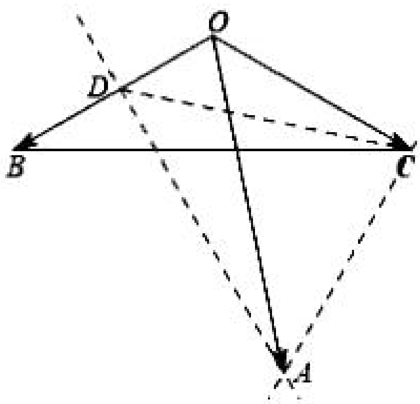
【答案】$a_n=2n+1$

解：$a_n=bn+a-b$，则 $a+b<ab<a+2b$

即：$\begin{cases}(a-1)(b-1)>1\\(a-2)(b-1)<2\\a,b\in N^*\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=2\\b\geq 3,\ b\in N^*\end{cases}$，如：$a_n=2n+1$．（不唯一）．

15．已知平面向量 a，b，c 满足 $|b|=|c|=1$，$|b-c|=\sqrt{3}$，$2a\cdot b=a\cdot c=1$，则 b 与 c 的夹角为__▲__；$|a|$ 等于__▲__．（第一空 2 分，第二空 3 分）

【答案】$120^\circ, \dfrac{\sqrt{21}}{3}$



解：易知：$<\vec{b},\vec{c}>=120^\circ$，由题意如图所示：

$\vec{a}=\overline{OA}$，$\vec{b}=\overline{OB}$，$\vec{c}=\overline{OC}$

$\angle BOC=120^\circ$，$OB=OC=1$，D为OB中点

$$|\vec{a}|=|\overline{OA}|=\frac{|\overline{CD}|}{\sin 120^\circ}=\frac{\sqrt{\frac{1}{4}+1+\frac{1}{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{21}}{3}.$$

16．一个组合体由上下两部分组成，上部是一个半球，下部是一个圆柱，半球的底面与圆柱的上底面重合．若该组合体的体积为定值 V，则当圆柱底面半径 $r=$__▲__时，该组合体的表面积最小．

【答案】$r=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{5\pi}}$

解：设圆柱的高为h，则$V=\pi r^2h+\dfrac{2\pi}{3}r^3$，得：$\pi rh=\dfrac{V}{r}-\dfrac{2\pi}{3}r^2$

$$S=3\pi r^2+2\pi rh=\frac{5\pi}{3}r^2+\frac{2V}{r}=\frac{5\pi}{3}r^2+\frac{V}{r}+\frac{V}{r}\geq 3\sqrt[3]{\frac{5\pi V^2}{3}}$$

当且仅当$\dfrac{5\pi}{3}r^2=\dfrac{V}{r}$，即$r=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{5\pi}}$时取等

即$r=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{5\pi}}$时，该组合体的表面积最小．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

在$\triangle ABC$中，a，b，c分别为内角A，B，C的对边，且$a-b=a\cos B-b\cos A$．

（1）求证：$a=b$；

（2）若$c=4$，$\cos C=\dfrac{3}{5}$，求$\triangle ABC$的面积.

【解】(1) 因为$a-b=a\cos B-b\cos A$，

由余弦定理可知，$a-b=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2c}-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}$，

所以$(a-b)(c-a-b)=0$，又$a+b>c$，

所以$a=b$.

(2) 由余弦定理可知，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{2a^2-16}{2a^2}=\dfrac{3}{5}$，

解得$a^2=20$，又$\sin C=\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\dfrac{4}{5}$，

所以$S=\dfrac{1}{2}a^2\sin C=8$.

18.（本小题满分 12 分）

在①$na_{n+1}-(n+1)a_n=n^2+n$，②$3S_n=(n+2)a_n$，③$T_{n+1}=\dfrac{(n+2)a_nT_n}{n}$这三个条件中任选一个补充在下面问题中，并解答下列题目.

设首项为 2 的数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，前n项积为T_n，且____▲____.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=(-1)^na_n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和.

【解】(1) 选①，

因为$na_{n+1}-(n+1)a_n=n^2+n$，所以$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=1$，

因为$a_1=2$，所以$\frac{a_1}{1}=2$，所以$\frac{a_n}{n}=n+1$，即$a_n=n^2+n$；

选②，

因为$3S_n=(n+2)a_n$，所以$3S_{n+1}=(n+3)a_{n+1}$，

两式相减，可得$3a_{n+1}=(n+3)a_{n+1}-(n+2)a_n$，即$na_{n+1}=(n+2)a_n$，

所以$\frac{a_{n+1}}{(n+2)(n+1)}=\frac{a_n}{(n+1)n}$，

因为$\frac{a_1}{2}=1$，所以$\frac{a_n}{(n+1)n}=1$，即$a_n=n^2+n$；

选③，

因为$T_{n+1}=\frac{(n+2)a_nT_n}{n}$，所以$\frac{T_{n+1}}{T_n}=a_{n+1}=\frac{(n+2)a_n}{n}$，即$\frac{a_{n+1}}{(n+2)(n+1)}=\frac{a_n}{(n+1)n}$，

因为$\frac{a_1}{2}=1$，所以$\frac{a_n}{(n+1)n}=1$，即$a_n=n^2+n$；

（2）由（1）可知，$a_n=n^2+n$，所以$b_n=(-1)^n(n^2+n)$，设$\{b_n\}$的前n项和为B_n，

所以当$k\in\mathbf{N}^*$时，$b_{2k-1}+b_{2k}=-\left((2k-1)^2+2k-1\right)+(2k)^2+2k=4k$，

所以当$n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$时，$B_n=B_{2k}=4+4\times2+\cdots+4\times k=\frac{4(k^2+k)}{2}=2k^2+2k=\frac{n^2}{2}+n$，

当$n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$时，$n+1=2k$，

所以$B_n=B_{n+1}-b_{n+1}==\frac{(n+1)^2}{2}+(n+1)-\left((n+1)^2+n+1\right)=-\frac{(n+1)^2}{2}$，

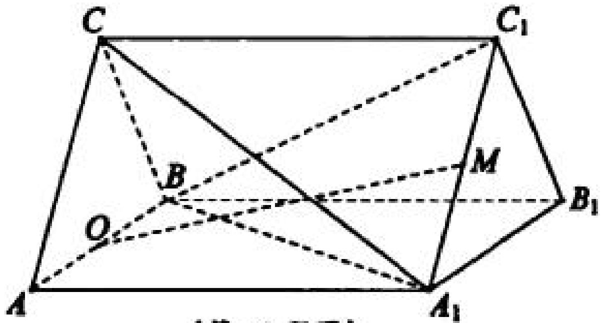
综上，$B_n=\begin{cases}\frac{n^2}{2}+n,n=2k,k\in\mathbf{N}^*\\-\frac{(n+1)^2}{2},n=2k-1,k\in\mathbf{N}^*\end{cases}$.

19.（本小题满分 12 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，平面 $ABC\perp$ 平面 AA_1B_1B，$A_1A=A_1B$，$\angle A_1AB=60^\circ$，O 为 AB 的中点，M 为 A_1C_1 的中点.

（1）求证：OM // 平面 BB_1C_1C；

（2）求二面角 C_1-BA_1-C 的正弦值.



（第 19 题图）

【解】(1) 作 BC 的中点 N，连接 NO,C_1O，

因为 N,O 分别为 BC,BA 中点，所以 $ON\underline{\underline{//}}\frac{1}{2}AC$，

因为 M 为 A_1C_1 中点，所以 $MC_1=\frac{1}{2}A_1C_1$，

又 $AC\underline{\underline{//}}A_1C_1$，所以 $MC_1\underline{\underline{//}}\frac{1}{2}AC$，所以 $ON\underline{\underline{//}}MC_1$，即四边形 $ONMC_1$ 为平行四边形，

所以 $OM//NC_1$，

因为 $NC_1\subset$ 平面 BB_1C_1C，$OM\not\subset$ 平面 BB_1C_1C，所以 $OM//$ 平面 BB_1C_1C；

(2) 连接 OC,OA_1，因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形，且 O 为 AB 中点，所以 $OC\perp AB$，

因为平面 $ABC\perp$ 平面 AA_1B_1B，平面 $ABC\cap$ 平面 $AA_1B_1B=AB$，$OC\subset$ 平面 ABC，

所以 $OC\perp$ 平面 AA_1B_1B，因为 $OA_1\subset$ 平面 AA_1B_1B，所以 $OC\perp OA_1$，

因为 $A_1A=A_1B$，且 $\angle A_1AB=60^\circ$，所以 $\triangle A_1AB$ 是正三角形，所以 $OA_1\perp AB$，

以 $\left\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OC}\right\}$ 为 x,y,z 轴正半轴，建立空间直角坐标系，

因为 $\triangle ABC$ 边长为 2，所以 $\triangle A_1AB$ 边长为 2，则 $OA=1,OC=OA_1=\sqrt{3}$，

所以$C\left(0,0,\sqrt{3}\right),B\left(-1,0,0\right),A_1\left(0,\sqrt{3},0\right),C_1\left(-1,\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$，

所以$\overrightarrow{BC}=\left(1,0,\sqrt{3}\right),\overrightarrow{BC_1}=\left(0,\sqrt{3},\sqrt{3}\right),\overrightarrow{BA_1}=\left(1,\sqrt{3},0\right)$，

设平面CBA_1的法向量为$\vec{m}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$，则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=x_1+\sqrt{3}z_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BA_1}=x_1+\sqrt{3}y_1=0\end{cases}$，

取$x_1=-\sqrt{3}$，则$y_1=z_1=1$，所以$\vec{m}=\left(-\sqrt{3},1,1\right)$，

设平面C_1BA_1的法向量为$\vec{n}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=\sqrt{3}y_2+\sqrt{3}z_2=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BA_1}=x_2+\sqrt{3}y_2=0\end{cases}$，

取$x_2=-\sqrt{3}$，则$y_2=1,z_2=-1$，所以$\vec{m}=\left(-\sqrt{3},1,-1\right)$，

设二面角C_1-BA_1-C为θ，则$\left|\cos\theta\right|=\dfrac{\left|\vec{m}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\left|3+1-1\right|}{\sqrt{3+1+1}\cdot\sqrt{3+1+1}}=\dfrac{3}{5}$，

所以$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{4}{5}$.

20.（本小题满分12分）

在平面直角坐标系xOy中，已知动点M到定点$F(-2,0)$的距离与到定直线l：$x=-\dfrac{3}{2}$的距离之比为定值$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

（1）求动点M的轨迹E的方程；

（2）过点F作互相垂直的两条直线l_1，l_2，其中l_1交动点M的轨迹E于M，N两点，l_2交圆D：$(x-4)^2+y^2=9$于P，Q两点，点R是线段PQ的中点，求△RMN面积的最小值.

【解】（1）设$M(x,y)$则由题意可知

$$\frac{\sqrt{(x+2)^2+y^2}}{\left|x+\frac{3}{2}\right|}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\text{，化简可得}\frac{x^2}{3}-y^2=1.$$

（3）①当l_1的斜率不存在时，

$$MN=\frac{2\sqrt{3}}{3},RF=6,S_{\Delta RMN}=\frac{1}{2}\times 6\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3};$$

②当l_1的斜率存在时，则l_2: $y=-\frac{1}{k}(x+2)$

由$\begin{cases}y=k(x+2)\\ \frac{x^2}{3}-y^2=1\end{cases}$得$(1-3k^2)x^2-12k^2x-12k^2-3=0$,

所以有$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{12k^2}{1-3k^2}\\ x_1x_2=\frac{-12k^2-3}{1-3k^2}\end{cases}$,

所以$MN=\sqrt{1+k^2}\left|x_1-x_2\right|=\frac{2\sqrt{3}(1+k^2)}{\left|1-3k^2\right|}$,

同理可得$QF=\sqrt{1+k^2}\frac{\left|6k\right|}{1+k^2}$,

所以$S_{\Delta MNF}=\frac{1}{2}\sqrt{1+k^2}\frac{\left|6k\right|}{1+k^2}\cdot\frac{2\sqrt{3}(1+k^2)}{\left|1-3k^2\right|}$

$$=\sqrt{12(1+\frac{15k^2-1}{9k^4-6k^2+1})}\geq 2\sqrt{3}.$$

21.（本小题满分 12 分）

某中学的一个高二学生社团打算在开学初组织部分同学打扫校园．该社团通知高二同学自愿报名，由于报名的人数多达 50 人，于是该社团采用了在报名同学中用抽签的方式来确定打扫校园的人员名单．抽签方式如下：将 50 名同学编号，通过计算机从这 50 个编号中随机抽取 30 个编号，然后再次通过计算机从这 50 个编号中随机抽取 30 个编号，两次都被抽取到的同学打扫校园．

（1）设该校高二年级报名打扫校园的甲同学的编号被抽取到的次数为 Y，求 Y 的数学期望；

（2）设两次都被抽取到的人数为变量 X，则 X 的可能取值是哪些？其中 X 取到哪一个值的可能性最大？请说明理由．

【解】(1) $P(Y=0)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$，$P(Y=1)=C_2^1\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{12}{25}$，

$P(Y=2)=1-\frac{4}{25}-\frac{12}{25}=\frac{9}{25}$，$E(Y)=\frac{12}{25}+2\times\frac{9}{25}=\frac{6}{5}$.

(2) 两次抽中的人数 $x\in\{10,11,\ldots,30\}$，则

$$P(x)=C_{50}^{x}\left(\frac{9}{25}\right)^{x}\cdot C_{50-x}^{60-2x}\left(\frac{12}{25}\right)^{60-2x}\cdot\left(\frac{12}{25}\right)^{x-10},$$

设 $G(x)=C_{50}^{x}\left(\frac{9}{25}\right)^{x}\cdot C_{50-x}^{60-2x}\left(\frac{12}{25}\right)^{60-2x}\cdot\left(\frac{12}{25}\right)^{x-10}$，那么

$$\frac{G(x+1)}{G(x)}=\frac{1}{4}\times\frac{(60-2x)(59-2x)}{(x+1)(x-9)}>1$$

解得 $x<18$，所以 $G(19)<G(18)>G(17)$，

所以当 $x=18$ 时可能性最大，答：略.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{ax}{e^x}$（e 为自然对数的底数）.

（1）若函数 $g(x)=x-f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，求实数 a 的取值范围；

（2）证明：对任意实数 a，函数 $h(x)=f(x)-\ln x$ 有且只有一个零点.

【解】(1) $g(x)=x-f(x)=x-\dfrac{ax}{e^x}$，则 $g'(x)=\dfrac{e^x-a+ax}{e^x}\ge 0$，

即设 $m(x)=e^x-a+ax\ge 0$，$m'(x)=e^x+a$，$x\in(0,+\infty)$，

1. 当 $a\ge -1$，$m'(x)\ge 0$，$m(x)$ 单调增 $h(x)_{\min}=1-a\ge 0$，$a\in[-1,1]$，

2. 当 $a<-1$，令 $m'(x)=0$，$x=\ln(-a)>0$，列表略，

$m(x)_{\min}=m(\ln(-a))=-a+a\ln(-a)-a\ge 0$ 则 $a\in[-e^2,-1]$；

综上，$a\in[-e^2,1]$.

(2) 由题意可知 $h(x)=f(x)-\ln x=\dfrac{ax}{e^x}-\ln x=0$，

1. $a>0$，$h'(x)=\dfrac{a(1-x)}{e^x}-\dfrac{1}{x}$，

$x\in(0,1)$，$h(x)>0$；$x\in(1,+\infty)$，$h'(x)<0$，则 $h(x)$ 单调减，

又 $h(1)=\dfrac{a}{e}>0$，$h(e^a)<0$

所以 $h(x)$ 在 $a>0$ 时，恰有一个零点；

2. $a=0$，$\ln x=0$，恰有一个；

3. $a<0$，$x\in(1,+\infty)$，$h(x)<0$；

$x\in(0,1)$，$h'(x)=\dfrac{a(1-x)}{e^x}-a<0$，$e^a\in(0,1)$，则 $h(1)<0$，$h(e^a)>0$，

所以 $h(x)$ 在 $a<0$ 时，恰有一个零点.

故综上 $h(x)$ 恰有一个零点.