

2023 届高中毕业班 2 月大联考 理科数学参考答案

1. 【答案】B

【详解】 $M = \{x | 1 - \frac{2}{x} < 0\} = \{x | \frac{x-2}{x} < 0\} = \{x | 0 < x < 2\}$, $N = \{x | -1 \leq x\}$, 则 $M \cap N = \{x | 0 < x < 2\}$, 故选: B

2. 【答案】D

【详解】设样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数为 $\bar{x}_1$, 标准差为 s_1 , 中位数为 x_3 , 众数为 x_4 , 由 $y_i = x_i + c (i=1, 2, \dots, n)$, $c \neq 0$, 可得新样本数据 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 平均数为 $\bar{x}_1 + c$, 标准差为 s_1 , 中位数为 $x_3 + c$, 众数为 $x_4 + c$, 故标准差不变, 故选: D

3. 【答案】A

【详解】该几何体由一个圆锥与一个 $\frac{1}{4}$ 球组成, 圆锥的底面和球的半径为 1, 高为 1, 故其体积为 $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 = \frac{2}{3}\pi$. 故选: A



4. 【答案】B

【详解】猪、羊、马、牛的主人赔偿的粟数成等比数列, 公比为 2, 设猪主人赔偿 x 粟,

则 $\frac{x(1-2^4)}{1-2} = 15x = 9$, 解得: $x = \frac{3}{5}$, $\therefore$ 马主人赔偿 $4x = \frac{12}{5}$ 粟, 猪主人赔偿 $x = \frac{3}{5}$ 粟, $\therefore$ 马主人比猪主人多赔偿 $\frac{9}{5}$ 粟.

故选: B.

5. 【答案】D

【详解】令 $x=0$ 得 $a_0=2$, $a_6=-1 \times 2^5=-32$, 所以 $a_0+a_6=-30$, 故选: D.

6. 【答案】C

【详解】解: 我们不妨逆向推理, 如果只剩 5 只球, 让对方先拿, 自己一定能拿到第 6 个球, 那我们将 18 个球从后往前按组分开, 5 个球一组, 那么就可以分成 4 组, 第一组 3 个, 后面 3 组都是 5 个, 第一次该拿走 3 个球, 以后的取球过程中, 对方取 n 个, 自己取 $5-n$ 个, 由于 $18-3=5 \times 3$, 则自己一定可以取到第 18 个球. 故选: C.

7. 【答案】D

【详解】解: $\because$ 点 F 为椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点, $\therefore F(1, 0)$,

$\because$ 点 P 为椭圆 C 上任意一点, 点 A 的坐标为 $A(1, 2\sqrt{2})$, 点 A 在椭圆外,

设椭圆 C 的左焦点为 $F'(-1, 0)$, $\therefore |PA| + |PF| = |PA| + 4 - |PF'| = 2\sqrt{3} + |PA| - |PF'|$,

$\therefore |PF| - |PF'| \leq |AF'| = 2\sqrt{3}$, 当点 P 在 AF' 的延长线上时取等号, $\therefore |PA| + |PF| \leq 4 + 2\sqrt{3}$, 则 $|PA| + |PF|$ 的最大值

为 $4 + 2\sqrt{3}$, 故选: D.



8. 【答案】C

【详解】由题设 $\begin{cases} R(0) = R_0 e^{kt} = 100 \\ R(5) = R_0 e^{5k} = 3000 \end{cases}$, 可得 $\begin{cases} R_0 = 100 \\ k = \frac{\ln 10}{5} \end{cases}$, 所以 $R(t) = 100e^{\frac{\ln 10}{5}t}$, 则 $100 \cdot e^{\frac{\ln 10}{5}t} \geq 30000$, 故

$t \geq \frac{5 \ln 300}{\ln 10} \approx 5 \lg 300 = 5 \times \lg(100 \times 3) = 5(2 + 0.4771) = 12.3855$, 所以玩王者荣耀 30000 名至少经过 13 天. 故选: C

9. 【答案】C

【详解】解: 当 n 为偶数时, $a_{n+1} - a_n = 0$, 所以数列 $\{a_n\}$ 的偶数项是以 0 为公差的等差数列,

当 n 为奇数时, $a_{n+1} - a_n = 2$, 所以数列 $\{a_n\}$ 的奇数项是以 2 为公差的等差数列,

所以 $a_n = \begin{cases} n, & n \text{ 为奇数} \\ 2, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 所以 $S_{100} = 2 \times 50 + (1 + 3 + 5 + \dots + 99) = 100 + \frac{50(1+99)}{2} = 2600$. 故选: C

10. 【答案】B

【详解】右焦点 $F(c, 0)$, 一条渐近线为 $bx - ay = 0$,

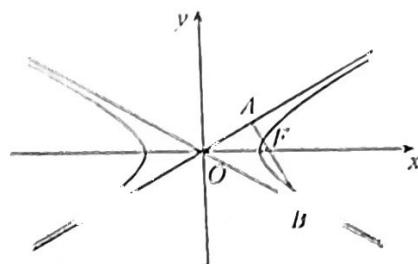
F 到 $bx - ay = 0$ 的距离为 $\frac{bc}{c} = b$, 即 $|AF| = b, |OF| = c, |OA| = a$.

由于 $|AB| = 4|AF|$, 所以 $|BF| = 3b$, 由于 $\angle FOA = \angle FOB$,

由正弦定理得 $\frac{|AF|}{\sin \angle FOA} = \frac{|OA|}{\sin \angle OFA}, \frac{|BF|}{\sin \angle FOB} = \frac{|OB|}{\sin \angle OFB}$,

而 $\sin \angle OFA = \sin \angle OFB$, 所以 $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|AF|}{|BF|}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + (4b)^2}} = \frac{b}{3b} = \frac{1}{3}$,

所以 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2}, e = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. 故选: B



11. 【答案】A

【详解】由已知得, $\triangle ABD, \triangle CBD$ 均为等边三角形, 如图所示, 设球心为 O , $\triangle BCD$ 的中心为 O' , 取 BD 中点 F ,

连接 $AF, CF, OB, O'B, AO$, 则 $AF \perp BD, CF \perp BD$, 而 $AF \cap CF = F$,

$\therefore BD \perp$ 平面 ACF ,

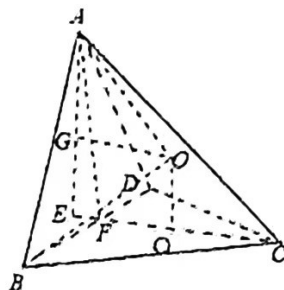
且求得 $AF = CF = \sqrt{3} \text{ cm}$, 而 $AC = 3 \text{ cm}$,

$\therefore \cos \angle AFC = \frac{3+3-9}{2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$, 则 $\angle AFC = 120^\circ$,

在平面 AFC 中, 过点 A 作 CF 的垂线, 与 CF 的延长线交于点 E ,

由 $BD \perp$ 平面 ACF , 得 $BD \perp AE$, 故 $AE \perp$ 平面 BCD ,

过点 O 作 $OG \perp AE$ 于点 G , 则四边形 $O'EGO$ 是矩形,





设球的半径为 R , $OO' = x(\text{cm})$, 则由 $OO'^2 + O'B^2 = OB^2$, $OA^2 = AG^2 + GO^2$,
得 $x^2 + \frac{4}{3} = R^2$, $\left(\frac{3}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = R^2$, 解得 $x = 1\text{cm}$, $R^2 = \frac{7}{3}\text{cm}^2$,
故三棱锥 $A-BCD$ 外接球的表面积为 $S = 4\pi R^2 = \frac{28}{3}\pi(\text{cm}^2)$. 故选: A.

12. 【答案】C

【详解】法一: 取特殊函数, 取函数 $f(x) = e^{x-1}$ 符合题意, 验证①, ③, ④正确, ②错误
法二: 抽象函数运算

对于①, 令 $x=1, y=2$, 可得 $f(1) \cdot f(2) = f(2)$, 因 $f(2) > 1$, 所以 $f(1) = 1$, 故①正确,

对于③, 令 $x = \frac{x+1}{2}, y = \frac{x+1}{2}$ 可得 $f\left(\frac{x+1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x+1}{2}\right) = f(x) > 0$,

设 $x_1 < x_2$, 令 $x = x_1, x + y - 1 = x_2 \Rightarrow y = x_2 - x_1 + 1 > 1$

所以 $f(x_1) \cdot f(x_2 - x_1 + 1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{f(x_2)}{f(x_1)} = f(x_2 - x_1 + 1) > 1$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$

即 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增, 故③正确,

对于②, 令 $x=0, y=2$, 可得 $f(0) \cdot f(2) = f(1) = 1$, 因 $f(0) < f(2)$

所以 $\frac{f(0)+f(2)}{2} > \sqrt{f(0) \cdot f(2)} = 1 = f(1)$, 所以 $f(x)$ 的图象没有关于点 $(1, f(1))$ 中心对称, 故②错误,

对于④, 当 $x < 1$ 时, 令 $x = x, y = 2 - x > 1$, 此时 $f(x) \cdot f(2 - x) = f(1) = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{f(2 - x)}$,

因 $f(2 - x) > 1$, 所以 $f(x) = \frac{1}{f(2 - x)} \in (0, 1)$, 故④正确, 故选: C

13. 【答案】 $\frac{2\pi}{3}$ ## 120°

【详解】由 $\vec{a}, \vec{b}$ 均为单位向量, $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{3}$, 得: $|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = 3$, 即 $\vec{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2 = 3$,

所以 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \in [0, \pi]$, $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{2\pi}{3}$, 故答案为: $\frac{2\pi}{3}$

14. 【答案】4

【详解】由几何意义可得: 复数 z 表示以 $(0, -1)$ 为圆心的半径为 1 的圆 C , $|z - 2\sqrt{2}|$ 表示圆 C 上的点到 $(2\sqrt{2}, 0)$ 的距

离, 结合图形可得 $|z - 2\sqrt{2}|$ 的最大值为 4.

15. 【答案】2 (答案不唯一)

【详解】函数 $f(x)$ 的零点个数可以看成函数 $g(x) = a^x$ 与 $y = x + 1$ 图象交点个数,

当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $g(x) = a^x$ 与 $y = x + 1$ 图象只有一个交点, 不符合要求;

当 $a > 1$ 时, $g'(x) = a^x \cdot \ln a$, $g'(0) = \ln a$, 所以函数 $g(x) = a^x$ 在 $(0, 1)$ 处切线的斜率为 $\ln a$, 所以 $1 > \ln a$, 解得 1.

故答案为: 2 (答案不唯一).

16. 【答案】②③

【详解】解: 函数 $f(x) = \sin|x| - \cos 2x$, 对于①: 函数 $y = \sin|x|$ 不是周期函数, 故①错误;

对于②: $f(x) = \begin{cases} 2\sin^2 x + \sin x - 1 & (x > 0) \\ 2\sin^2 x - \sin x - 1 & (x < 0) \end{cases}$, 令 $f(x) = 0$, 在 $[-\pi, \pi]$ 上, 求得 $x = -\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$, 故②正确;

对于③: 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $f(x) = 2\sin^2 x + \sin x - 1$, 所以 $f'(x) = 4\sin x \cos x + \cos x$, 由于 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $\sin x > 0$ 且 $\cos x$

故 $f'(x) > 0$, 故函数 $f(x)$ 在 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 故③正确;

对于④: 由于 $f(x) = 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 2(\sin x + \frac{1}{4})^2 - \frac{9}{8}$,

故 $f(x)$ 的值域为 $[-\frac{9}{8}, 2]$ 故④错误.

正确的序号为②③.

17. 【详解】(1) 由题意知对业务水平满意的有 260 人, 对服务水平满意的有 200 人, 得 2×2 列联表

	对服务水平满意人数	对服务水平不满意人数	合计
对业务水平满意人数	180	80	260
对业务水平不满意人数	20	20	40
合计	200	100	300

.....4 分

经计算得 $K^2 = \frac{300 \times (180 \times 20 - 80 \times 20)^2}{200 \times 100 \times 260 \times 40} = \frac{75}{13} \approx 5.769 < 6.635$,5 分

所以没有 99% 的把握认为业务水平满意与服务水平满意有关.....6 分

(2) X 的可能值为 0, 1, 2.....7 分

则 $P(X=0) = \frac{C_{20}^0 C_{100}^2}{C_{120}^2} = \frac{316}{495}$, $P(X=1) = \frac{C_{20}^1 C_{100}^1}{C_{120}^2} = \frac{160}{495}$, $P(X=2) = \frac{C_{20}^2}{C_{120}^2} = \frac{19}{495}$,10 分

2023 届高三毕业班 2 月大联考·理科数学参考答案 第 4 页

X	0	1	2
P	$\frac{316}{495}$	$\frac{160}{495}$	$\frac{19}{495}$

.....11分

$$E(X) = 0 \times \frac{316}{495} + 1 \times \frac{160}{495} + 2 \times \frac{19}{495} = \frac{2}{5} \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

18. 【详解】解：(1) 由正弦定理 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ ，及 $\frac{3(\sin A - \sin B)}{\sin C} = \frac{3c - 2b}{a + b}$ ，
可得 $(b - c)^2 = a^2 - \frac{4}{3}bc$ ，即 $b^2 + c^2 - a^2 = \frac{2}{3}bc$ ，.....2分

$$\therefore \text{由余弦定理得：} \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{3} \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

因为 $A \in (0, \pi)$ ，所以 $\sin A > 0$ ，根据 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ，得 $\sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ；.....6分

$$(2) \text{ 因为 } \cos A = \frac{1}{3}, \sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \text{ 故 } \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{4\sqrt{2}}{3}, \text{ 则 } bc = 4, \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

$$\text{由 } S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}, \text{ 得 } \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2}AB \cdot AD \cdot \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2}AC \cdot AD \cdot \sin \frac{A}{2}, \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

$$\therefore AD = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b + c} \leq \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{2\sqrt{bc}} = \sqrt{bc} \cos \frac{A}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}, \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

当且仅当 $b = c = 2$ 时，等号成立，即 $AD_{\max} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$12分

19. 【解析】

(1) 在等腰梯形 $ABCD$ 中， $AD = AB = BC = 1$ ， $DC = 2$ ， $AE \perp DC$ ， E 为垂足， $\therefore DE = \frac{1}{2}$ ，.....1分

$$\angle ADE = 60^\circ, \therefore AC = \sqrt{3}, \therefore AC \perp AD \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

又 $\because PC \perp PD$ ，平面 $ADP \perp$ 平面 PCD ，又 $PD \subset$ 平面 ADP ， $PC \perp$ 平面 ADP ，.....3分

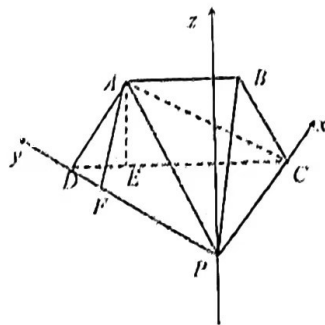
$\therefore PC \perp AD$ ， $AC \cap PC = C$ ， $\therefore AD \perp$ 平面 ACP ，.....4分

$\therefore AD \perp AP$ ， $\angle DAF = 90^\circ$ ，即 $\triangle ADP$ 为直角三角形.....5分

(2) 由 (1) 知 $PC \perp$ 平面 ADP ， $\therefore PC \perp AP$ ，

$$AD = AB = \frac{1}{2}CD = 1, \therefore AP = \sqrt{2}, DP = \sqrt{3},$$

过 A 作 $AF \perp PD$ 于 F ，则 $AF \perp$ 平面 PCD 。



2023 届高中毕业班 2 月大联考·理科数学参考答案

在 $\triangle ADP$ 为直角三角形中, $AF = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$,7 分

以 P 为原点 PC, PD 分别为 x, y 轴建立如图坐标系,

则 $C(1,0,0), D(0,\sqrt{3},0), F\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right), A\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right), \overline{DC} = (1, -\sqrt{3}, 0)$,

$\overline{PB} = \overline{PA} + \overline{AB} = \overline{PA} + \frac{1}{2}\overline{DC} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 8 分

在平面 PAB 中, 设其法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$\overline{PB} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right), \overline{PA} = \left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, 则 $\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{6}y_1 + \frac{\sqrt{6}}{3}z_1 = 0 \\ \frac{2\sqrt{3}}{3}y_1 + \frac{\sqrt{6}}{3}z_1 = 0 \end{cases}$, $\vec{m} = (\sqrt{3}, 1, -\sqrt{2})$,

在平面 ACP 中, 设其法向量为 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$, $\overline{PA} = \left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right), \overline{PC} = (1, 0, 0)$.

则 $\begin{cases} \frac{2\sqrt{3}}{3}y_2 + \frac{\sqrt{6}}{3}z_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$, 取 $\vec{n} = (0, \sqrt{2}, -2)$,10 分

$\angle \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \theta$, $\cos \theta = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 11 分

由图可知二面角 $B-AP-C$ 为锐角, 故其大小为 $\frac{\pi}{4}$ 12 分

21. 【详解】(1) 设 $M(x, y)$, 由题意: $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = |x| + 1$ 1 分

两边平方, 整理可得: $y^2 = 2|x| + 2x$ 2 分

当 $x \geq 0$ 时, 化简可得 $y^2 = 4x$, 当 $x < 0$ 时, $y = 0$4 分

所以曲线 M 的轨迹方程为 $y^2 = 4x (x \geq 0)$ 和 $y = 0 (x < 0)$:5 分

(2) 由题意可知 $C: y^2 = 4x (x \geq 0)$, 设直线 PQ 的方程为 $x = my + 1, P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

联立方程组 $\begin{cases} y^2 = 4x \\ x = my + 1 \end{cases}$, 整理得 $y^2 - 4my - 4 = 0$,6 分

则 $\Delta = 16m^2 + 16 > 0, y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -4$,7 分



直线 OP 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1}x = \frac{4}{y_1}x$, 同理: 直线 OQ 的方程为 $y = \frac{4}{y_2}x$, 令 $x=1$ 得, $A\left(1, \frac{4}{y_1}\right), B\left(1, \frac{4}{y_2}\right)$.

设 AB 中点 T 的坐标为 (x_T, y_T) , 则 $x_T = 1, y_T = \frac{\frac{4}{y_1} + \frac{4}{y_2}}{2} = \frac{2(y_1 + y_2)}{y_1 y_2} = -2m$, 所以 $T(1, -2m)$,8 分

所以 $|AB| = \left| \frac{4}{y_1} - \frac{4}{y_2} \right| = \frac{4|y_2 - y_1|}{|y_1 y_2|} = \frac{4\sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2}}{4} = \sqrt{16m^2 + 16}$9 分

可得圆的半径为 $r = \frac{\sqrt{16m^2 + 16}}{2}$, 所以以 AB 为直径的圆的方程为 $(x-1)^2 + (y+2m)^2 = 4m^2 + 4$,10 分

整理得 $(x-1)^2 + y^2 + 4my = 4$, 令 $y=0$, 可得 $(x-1)^2 = 4$, 解得 $x=3$ 或 $x=-1$11 分

所以以 AB 为直径的圆经过定点 $(-1, 0)$ 和 $(3, 0)$12 分

21. 【详解】(1) $f'(x) = ae^x + (ax-2)e^x = (ax+a-2)e^x$ 1 分

① $a=0$ 时, $f'(x) = -2e^x < 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 恒成立;2 分

② $a < 0$ 时, 当 $x < \frac{2-a}{a}, f'(x) > 0$, 当 $x > \frac{2-a}{a}, f'(x) < 0$;3 分

③ $a > 0$ 时, 当 $x < \frac{2-a}{a}, f'(x) < 0$, 当 $x > \frac{2-a}{a}, f'(x) > 0$;4 分

综上, $a=0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递减;

$a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{2-a}{a})$ 单调递增, 在 $(\frac{2-a}{a}, +\infty)$ 单调递减;

$a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{2-a}{a})$ 单调递减, 在 $(\frac{2-a}{a}, +\infty)$ 单调递增.5 分

(2) 设 $h(x) = f(x) - k(x^2 - 2x - 1) = (x-2)e^x - k(x^2 - 2x - 1)$, 将题意等价于 $x \geq 0$, $h(x) \geq 0$ 恒成立.

$h'(x) = e^x + (x-2)e^x - k(2x-2) = (x-1)(e^x - 2k)$, 因为 $x \geq 0$, 所以 $e^x \geq 1$.

当 $2k \leq 1$, 即 $k \leq \frac{1}{2}$ 时, $e^x - 2k \geq 0$. 令 $h'(x) = 0$, 解得 $x=1$.

$x \in [0, 1)$, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 为减函数, $x \in (1, +\infty)$, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 为增函数.6 分

$h(x)_{\min} = h(1) = 2k - e < 0$, 不满足 $h(x) \geq 0$ 恒成立, 舍去.

当 $2k > 1$, 即 $k > \frac{1}{2}$ 时, 令 $h'(x) = 0$, 解得 $x=1$ 或 $x=\ln(2k)$7 分

① 当 $\ln(2k) = 1$ 时, $k = \frac{e}{2}$, $h'(x) \geq 0$, $h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 为增函数, $h(x)_{\min} = h(0) = -2 + k = -2 + \frac{e}{2} < 0$, 不满足 $h(x) \geq 0$ 恒成立, 舍去.8 分

② 当 $\ln(2k) < 1$ 时, 即 $\frac{1}{2} < k < \frac{e}{2}$, $x \in [0, \ln(2k))$, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 为增函数, $x \in (\ln(2k), 1)$, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 为减函数,

$x \in (1, +\infty)$, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 为增函数, 又因为 $h(0) = -2 + k < 0$, $h(1) = -e + 2k < 0$,

所以 $h(x)_{\min} < 0$, 不满足 $h(x) \geq 0$ 恒成立, 舍去.9 分

③当 $\ln(2k) > 1$ 时, 即 $k > \frac{e}{2}$, $x \in [0, 1)$, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 为增函数, $x \in (1, \ln(2k))$, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 为减函数, $x \in (\ln(2k), +\infty)$.

$h'(x) > 0$, $h(x)$ 为增函数, 又因为 $h(0) = -2 + k$, $h(\ln(2k)) = -k(\ln(2k) - 1)(\ln(2k) - 3)$.

因为 $x \geq 0$ 时, $h(x) \geq 0$ 恒成立, 所以 $\begin{cases} k > \frac{e}{2} \\ -2 + k \geq 0 \\ -k(\ln(2k) - 1)(\ln(2k) - 3) \geq 0 \end{cases}$, 解得 $2 \leq k \leq \frac{e^3}{2}$11 分

综上所述: 实数 k 的取值范围为 $\left[2, \frac{e^3}{2}\right]$12 分

22. 【详解】(1) 曲线 $C: \rho^2 = 2\rho \cos \theta$, 化简得直角坐标方程为: $x^2 + y^2 - 2x = 0$; 即 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 2 分

直线 l 的普通方程为: $x - \sqrt{3}y - \sqrt{3} = 0$4 分

(2) 因为 P 的直角坐标为 $(0, -1)$,5 分

所以直线 l 过 P 点, 直线 l 的参数方程化为 $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}t}{2} \\ y = -1 + \frac{t}{2} \end{cases}$,6 分

将直线 l 的参数方程 $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}t}{2} \\ y = -1 + \frac{t}{2} \end{cases}$ 代入曲线 C 的方程 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 中,

得 $(\frac{\sqrt{3}t}{2} - 1)^2 + (-1 + \frac{t}{2})^2 = 1$, 即 $t^2 - (\sqrt{3} + 1)t + 1 = 0$ 7 分

设 A 、 B 两点对应的参数分别为 t_1 , t_2 , 所以 $t_1 + t_2 = \sqrt{3} + 1$, $t_1 t_2 = 1$,8 分

所以 $(|PA| + 1)(|PB| + 1) = t_1 \cdot t_2 + t_1 + t_2 + 1 = \sqrt{3} + 3$10 分

23. 【详解】解: (1) $a = 2$ 时, $f(x) = |2x + 1| + |2x - 1| = \begin{cases} 4x, x \geq 1 \\ 2, -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ -4x, x < -\frac{1}{2} \end{cases}$

则不等式 $f(x) \geq 3$ 可化为 $\begin{cases} x \geq 1 \\ 4x \geq 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ 2 \geq 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ -4x \geq 3 \end{cases}$ 3 分

解得 $x \geq \frac{3}{4}$ 或 $x \leq -\frac{3}{4}$, 即不等式 $f(x) \leq 3$ 的解集为 $(-\infty, -\frac{3}{4}] \cup [\frac{3}{4}, +\infty)$4 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线