2022年泰安市高考全真模拟试题
数　学

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容：高考全部内容。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x>-7\}$，$B=\{x|(x+8)(x-3)<0\}$，则 $A\cup B=$

A. $\{x|x>-8\}$　　B. $\{x|-7<x<3\}$　　C. $\{x|x<-7\}$　　D. $\{x|-7$ 　8

2. 已知向量 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 不共线，向量 $\overrightarrow{OA}=5\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}$，$\overrightarrow{OB}=x\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}$，若 O,A,B 三点共线，则 $x=$

A. $\frac{5}{3}$　　B. $\frac{5}{3}$　　C. $-\frac{3}{5}$　　D. $\frac{3}{5}$

B.

3. $(x-\frac{1}{x})^{22}$ 展开式中的常数项为

A. C_{22}^{11}　　B. $-C_{22}^{11}$　　C. C_{22}^{12}　　D. $-C_{22}^{12}$

4. 定义矩阵运算 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\ cx+dy\end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix}\lg 4 & \lg 5\\ \lg 8 & \lg 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$

A. $\begin{pmatrix}\lg 50\\ 5\lg 2\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}\lg 50\\ 4\lg 2\end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix}2\\ 5\lg 2\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}2\\ 4\lg 2\end{pmatrix}$

5. 若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $2a_8-a_9=6$，则它的前13项和为

A. 45　　B.　　C. 78　　D. 110

6. 在底面是正方形的四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，且 $PA=3$，$AB=4$，则四棱锥 $P-ABCD$ 内切球的表面积为

A. 3π　　B. 4π　　C. 5π　　D. 6π

7. 已知 $4x^4+9x^2y^2+2y^4=1$，则 $5x^2+3y^2$ 的最小值是

A. 2　　B. $\frac{12}{7}$　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 3

8. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，以 F_1F_2 为直径的圆与 C 在第一象限的交点为 A，直线 AF_1 与 C 的左支交于点 B，且 $|AB|=|AF_2|$. 设 C 的离心率为 e，则 $e^2=$

A. $4-2\sqrt{2}$　　B. $5-2\sqrt{2}$　　C. $4+2\sqrt{2}$　　D. $5+2\sqrt{2}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知复数 z 满足方程 $(z^2+9)(z^2-2z+4)=0$，则

A. z 可能为纯虚数　　B. 该方程共有两个虚根

C. z 可能为 $1-\sqrt{3}i$　　D. 该方程的各根之和为 2

10. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，A,B 两点都在 C 上，且 A,B 关于坐标原点对称，则

A. $|AB|$ 的最大值为 $2\sqrt{6}$　　B. $|AF_1|+|BF_1|$ 为定值

C. C 的焦距是短轴长的 2 倍　　D. 存在点 A，使得 $AF_1\perp AF_2$

11. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 在 $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}]$ 上单调，且 $f(\frac{\pi}{6})=f(\frac{4\pi}{3})=-f(-\frac{\pi}{3})$，则 ω 的取值可能为

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{7}{5}$　　C. $\frac{9}{5}$　　D. $\frac{12}{7}$

12. 已知函数 $y=3^{2^x}-2^{3^x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上先增后减，函数 $y=4^{3^x}-3^{4^x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上先增后减. 若 $\log_2(\log_3 x_1)=\log_3(\log_2 x_1)=a>0$，$\log_2(\log_4 x_2)=\log_4(\log_2 x_2)=b$，$\log_3(\log_4 x_3)=\log_4(\log_3 x_3)=c>0$，则

A. $b<a$　　B. $a<c$　　C. $a<b$　　D. $c<$[illegible]

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 若 $\tan\alpha=3\tan\beta$，$\tan\beta>0$，$\tan(\alpha+\beta)=-2$，则 $\tan\beta=$ __▲__.

14. 已知函数 $f(x)=-x^3+ax^2$，写出一个同时满足下列两个条件的 $f(x)$：__▲__.

①在 $[1,+\infty)$ 上单调递减；②曲线 $y=f(x)(x\geq1)$ 存在斜率为 -1 的切线.

15. 古希腊哲学家毕达哥拉斯曾说过："美的线型和其他一切美的形体都必须有对称形式."在中华传统文化里，建筑、器物、书法、诗歌、对联、绘画几乎无不讲究对称之美. 如图所示的是清代诗人黄柏权的《茶壶回文诗》，其以连环诗的形式展现，20 个字绕着茶壶成一圆环，无论顺着读还是逆着读，皆成佳作. 数学与生活也有许多奇妙的联系，如 2020 年 02 月 02 日（20200202）被称为世界完全对称日（公历纪年日期中数字左右完全对称的日期）. 数学上把 20200202 这样的对称数叫回文数，若两位数的回文数共有 9 个（11，22，…，99），则所有四位数的回文数中能被 3 整除的个数是__▲__.

茶壶回文诗

【清】黄伯权　　【倒读】

落雪飞芳树，　花艳舞风流，

幽红雨淡霞。　雾香迷月溆。

溆月迷香雾，　霞淡雨红幽，

流风舞艳花。　树芳飞雪落。

16.《九章算术》中的"商功"篇主要讲述了以立体几何为主的各种形体体积的计算，其中堑堵是指底面为直角三角形的直棱柱. 在堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp AC$，M 是 A_1C_1 的中点，$AB=7$，N,G 分别在棱 BB_1,AC 上，且 $BN=\frac{1}{3}BB_1$，$AG=\frac{1}{3}AC$，平面 MNG 与 AB 交于点 H，则 $\frac{AH}{BH}=$ __▲__，$\overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{AB}=$ __▲__.（本题第一空 3 分，第二空 2 分）

四、解答题：本题共6小题，共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10分）

某百科知识竞答比赛的半决赛阶段，每两人一组进行PK，胜者晋级决赛，败者终止比赛. 比赛最多有三局. 第一局限时答题，第二局快问快答，第三局抢答. 比赛双方首先各自进行一局限时答题，依据答对题目数量，答对多者获胜，比赛结束，答对数量相等视为平局，则需进入快问快答局，若快问快答平局，则需进入抢答局，两人进行抢答，抢答没有平局. 已知甲、乙两位选手在半决赛相遇，且在与乙选手的比赛中，甲限时答题局获胜与平局的概率分别为$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，快问快答局获胜与平局的概率分别为$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$，抢答局获胜的概率为$\frac{1}{3}$，且各局比赛相互独立.

（1）求甲至多经过两局比赛晋级决赛的概率；

（2）已知乙最后晋级决赛，但不知甲、乙两人经过几局比赛，求乙恰好经过三局比赛才晋级决赛的概率.

18.（12分）

已知$\{a_n+8\}$是公比为2的等比数列，S_n为$\{a_n\}$的前n项和，且$S_3=S_2$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{|a_n|\}$的前n项和T_n.

19.（12分）

如图1，在矩形$ABCD$中，$AB=2$，$BC=1$，E是CD的中点，将$\triangle DAE$沿AE折起至$\triangle PAE$的位置，使得平面$PAE\perp$平面$ABCE$，如图2.

（1）证明：平面$PAE\perp$平面PBE.

（2）若M为CE的中点，求直线BM与平面PAM所成角的正弦值.

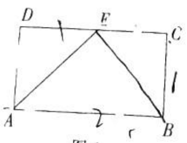


图1

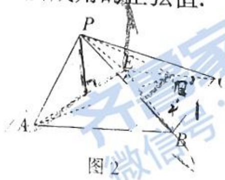


图2

20.（12分）

在△ABC中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，点O是△ABC的外心，$a\cos(C-\frac{\pi}{3})=\frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}}{|AB|}+\frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}}{|AC|}$

(1) 求角A；

(2)若△ABC外接圆的周长为$4\sqrt{3}\pi$，求△ABC周长的取值范围.

21.（12分）

已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$上一点$K(t,t)(t\neq0)$到焦点F的距离为5.

(1)求抛物线C的方程；

(2)过点F的直线l与抛物线C交于P,Q两点，直线OP,OQ与圆$E:(x-4)^2+y^2=16$的另一交点分别为M,N,O为坐标原点，求△OMN与△OPQ面积之比的最大值.

22.（12分）

已知函数$f(x)=g(x)-\ln x$.

(1)若函数$g(x)=\frac{1}{2}x^2+ax+a\ln x$，讨论$f(x)$的单调性.

(2)若函数$g(x)=\frac{1}{2}x^2(x^2-x\ln x+\frac{1}{x})$，证明：$f(x)>\frac{1+\ln 2}{2}$.

密封线内不要答题

2022 年泰安市高考全真模拟试题
数学参考答案

1. A　因为 $B=\{x|-8<x<3\}$，所以 $A\cup B=\{x|x>-8\}$.

2. A　因为 O,A,B 三点共线，所以 $\overrightarrow{OA}/\!/\overrightarrow{OB}$，所以 $\exists\lambda\in\mathbf{R}$，$\overrightarrow{OB}=\lambda\overrightarrow{OA}$，即 $(5\lambda-x)\boldsymbol{m}=(3\lambda+1)\boldsymbol{n}$，因为向量 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 不共线，所以 $5\lambda-x=3\lambda+1=0$，则 $x=-\frac{5}{3}$.

3. B　$(x-\frac{1}{x})^{22}$ 展开式中的常数项为 $C_{22}^{11}(-1)^{11}=-C_{22}^{11}$.

4. C　$\begin{pmatrix}\lg 4 & \lg 5\\ \lg 8 & \lg 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lg 4+2\lg 5\\ \lg 8+2\lg 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lg 100\\ \lg 32\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 5\lg 2\end{pmatrix}$.

5. C　因为 $2a_8-a_9=6$，所以 $a_7+a_9-a_9=6$，解得 $a_7=6$，所以 $S_{13}=\frac{(a_1+a_{13})\times 13}{2}=13a_7=13\times 6=78$.

6. B　设四棱锥 $P-ABCD$ 内切球的半径为 r. 因为 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times 4^2\times 3=16$，四棱锥 $P-ABCD$ 的表面积 $S=4^2+\frac{1}{2}\times 3\times 4\times 2+\frac{1}{2}\times 4\times 5\times 2=48$，所以 $r=\frac{3V_{P-ABCD}}{S}=1$，故四棱锥 $P-ABCD$ 内切球的表面积为 $4\pi r^2=4\pi$.

7. A　由 $4x^4+9x^2y^2+2y^4=1$，得 $(4x^2+y^2)(x^2+2y^2)=1\leqslant(\frac{4x^2+y^2+x^2+2y^2}{2})^2=(\frac{5x^2+3y^2}{2})^2$，
即 $4\leqslant(5x^2+3y^2)^2$，所以 $5x^2+3y^2\geqslant 2$，当且仅当 $4x^2+y^2=x^2+2y^2$，即 $y^2=3x^2=\frac{3}{7}$ 时，等号成立，
所以 $5x^2+3y^2$ 的最小值是 2.

8. D　由双曲线定义可知 $|AF_1|-|AF_2|=2a$，$\because|AB|=|AF_2|$，$\therefore|AF_1|-|AF_2|=|AF_1|-|AB|=|BF_1|=2a$，又 $|BF_2|-|BF_1|=2a$，$\therefore|BF_2|=4a$，$\because A$ 在以 F_1F_2 为直径的圆上，$\therefore AF_1\perp AF_2$，$\therefore|AB|=|AF_2|=2\sqrt{2}a$，由 $|AF_1|^2+|AF_2|^2=|F_1F_2|^2$，得 $(2\sqrt{2}a+2a)^2+(2\sqrt{2}a)^2=4c^2$，故 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{20+8\sqrt{2}}{4}=5+2\sqrt{2}$.

9. ACD　由 $(z^2+9)(z^2-2z+4)=0$，得 $z^2+9=0$ 或 $z^2-2z+4=0$，即 $z^2=-9$ 或 $(z-1)^2=-3$，
解得 $z=\pm 3\mathrm{i}$ 或 $z=1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}$，故选 ACD.

10. ABD　因为 $a^2=6$，$b^2=2$，$c^2=a^2-b^2=4$，所以 $a=\sqrt{6}$，$b=\sqrt{2}$，$c=2$，$|AB|\leqslant 2a=2\sqrt{6}$，$\frac{2c}{2b}=\sqrt{2}$，所以 A 正确，C 错误.
由椭圆的对称性知，$|AF_1|+|BF_1|=|AF_1|+|AF_2|=2a=2\sqrt{6}$，所以 B 正确.
当 A 在 y 轴上时，$\cos\angle F_1AF_2=\frac{6+6-4^2}{2\times 6}<0$，则 $\angle F_1AF_2$ 为钝角，所以存在点 A，使得 $AF_1\perp AF_2$，D 正确.

11. ACD　设 $f(x)$ 的最小正周期为 T，则由题意可得 $\frac{T}{2}\geqslant\frac{\pi}{6}-(-\frac{\pi}{3})$，即 $T\geqslant\pi$. 由 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}]$ 上单调，且 $f(\frac{\pi}{6})=-f(-\frac{\pi}{3})$，得 $f(x)$ 的一个零点为 $\frac{-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}}{2}=-\frac{\pi}{12}$. 因为 $f(\frac{\pi}{6})=f(\frac{4\pi}{3})$，所以有以下三种情况：① $T=\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$，则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{12}{7}$；② $\frac{3T}{4}=\frac{\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}}{2}-(-\frac{\pi}{12})=\frac{5\pi}{6}$，则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{9}{5}$；③ $\frac{T}{4}=\frac{5\pi}{6}$，则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{3}{5}$.

12. AD　$\because\log_2(\log_3 x_1)=\log_3(\log_2 x_1)=a$，$\therefore\log_3 x_1=2^a$，$\log_2 x_1=3^a$，$\therefore x_1=3^{2^a}=2^{3^a}$.
设 $f(t)=3^{2^t}-2^{3^t}$，$\because f(0)=f(1)=1>0$，$f(2)=81-512<0$，$y=3^{2^x}-2^{3^x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上先增后减，
$\therefore a\in(1,2)$. $\because\log_2(\log_4 x_2)=\log_4(\log_2 x_2)=b$，$\therefore\log_4 x_2=\frac{1}{2}\log_2 x_2=2^b$，$\log_2 x_2=4^b$，$\therefore 4^b=2^{b+1}$，$\therefore b=1$.

$\because \log_3(\log_4 x_3)=\log_4(\log_3 x_3)=c>0$，$\therefore x_3=4^{3^c}=3^{4^c}$.

设 $g(t)=4^{3^t}-3^{4^t}$，$\because g(0)=1>0$，$g(1)=-17<0$，$y=4^{3^x}-3^{4^x}$ 在$(0,+\infty)$上先增后减，

$\therefore c\in(0,1)$. $\therefore c<b<a$.

13. 1　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{4\tan\beta}{1-3\tan^2\beta}=-2$，解得 $\tan\beta=1$（负根舍去）.

14. $f(x)=-x^3+x^2$（答案不唯一，只要 $f(x)$ 满足 $f(x)=-x^3+ax^2\left(1\leqslant a\leqslant\dfrac{3}{2}\right)$即可）

若 $f(x)$同时满足所给的两个条件，则 $f'(x)=-3x^2+2ax\leqslant 0$ 对 $x\in[1,+\infty)$恒成立，且 $f'(x)=-1$ 在$[1,+\infty)$上有解，则 $1\leqslant a\leqslant\dfrac{3}{2}$.

15. 30　要能被 3 整除，则四个数的和是 3 的偶数倍数. 满足条件的回文数分为以下几类：

和为 6 的回文数：$1+2+2+1$，$3+0+0+3$，此时有 $1\times 2+1=3$ 个.

和为 12 的回文数：$3+3+3+3$，$2+4+4+2$，$1+5+5+1$，$6+0+0+6$，此时有 $2\times 2+2=6$ 个.

和为 18 的回文数：$1+8+8+1$，$2+7+7+2$，$3+6+6+3$，$4+5+5+4$，$9+0+0+9$，此时有 $4\times 2+1=9$ 个.

和为 24 的回文数：$3+9+9+3$，$4+8+8+4$，$5+7+7+5$，$6+6+6+6$，此时有 $3\times 2+1=7$ 个.

和为 30 的回文数：$7+8+8+7$，$6+9+9+6$，此时有 $2\times 2=4$ 个.

和为 36 的回文数：$9+9+9+9$，此时有 1 个.

故共有 $3+6+9+7+4+1=30$ 个.

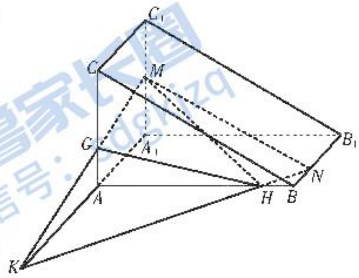
16. 6；-42　如图，延长 MG，交 A_1A 于 K，连接 KN，交 AB 于 H. 易知

$\triangle KAG\backsim\triangle KA_1M$，则$\dfrac{KA}{KA_1}=\dfrac{AG}{A_1M}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}$，则 $KA=2AA_1$，

又 $BN=\dfrac{1}{3}BB_1=\dfrac{1}{3}AA_1$，所以 $KA=6BN$，则$\dfrac{AH}{BH}=\dfrac{KA}{NB}=6$，

所以 $AH=\dfrac{6}{7}AB=6$. 因为 $AA_1\perp AB$，$A_1M\perp AB$，

所以$\overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{A_1M})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{AB}=-6\times 7=-42$.



17. 解：(1)设甲至多经过两局比赛晋级决赛为事件 A，则甲第一局获胜或第一局平局第二局获胜，……… 1分

则 $P(A)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………………………… 3分

(2)记乙恰好经过一局、两局、三局比赛晋级决赛分别为事件 B,C,D，

则 $P(B)=1-\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{6}$，…………………………………………………………… 4分

$P(C)=\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{1}{4}$，…………………………………………………………… 6分

$P(D)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}\times\left(1-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{18}$，…………………………………………………………… 8分

故在乙最后晋级决赛的前提下，乙恰好经过三局比赛才晋级决赛的概率为$\dfrac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{18}}=\dfrac{2}{17}$. ……… 10分

18. 解：(1)因为 $S_3=S_2$，所以 $a_3=S_3-S_2=0$，…………………………………………………… 1分

因为$\{a_n+8\}$是公比为 2 的等比数列，所以 $a_1+8=\dfrac{a_3+8}{2^2}=2$，……………………………… 3分

所以 $a_n+8=2\times 2^{n-1}=2^n$，…………………………………………………………………… 4分

故 $a_n=2^n-8$. ……………………………………………………………………………………… 5分

(2)$|a_n|=\begin{cases}-2^n+8, & n\leqslant 3,\\ 2^n-8, & n>3.\end{cases}$ ……………………………………………………………… 6分

当 $n\leqslant 3$ 时，$T_n=-(2^1+2^2+\cdots+2^n)+8n=8n+2-2^{n+1}$； ……………………………… 7分

当 $n>3$ 时，$T_n=T_3+(T_n-T_3)$ ……………………………………………………………… 8分

$=10+(2^4+2^5+\cdots+2^n)-8(n-3)$ ………………………………………………………………………… 9分

$=34-8n+\dfrac{16(1-2^{n-3})}{1-2}=18-8n+2^{n+1}$. ……………………………………………………………… 11分

综上，$T_n=\begin{cases}8n+2-2^{n+1}, n\leqslant 3,\\ 18-8n+2^{n+1}, n>3.\end{cases}$ ……………………………………………………………… 12分

19. (1)证明：设 AE 的中点为 O，连接 PO. 因为 $PA=PE=1$，所以 $PO\perp AE$. ………………………………… 1分

因为平面 $PAE\perp$ 平面 $ABCE$，平面 $PAE\cap$ 平面 $ABCE=AE$，所以 $PO\perp$ 平面 $ABCE$，

又 $BE\subset$ 平面 $ABCE$，所以 $PO\perp BE$. ………………………………………………………………………… 2分

由已知可得 $AE=BE=\sqrt{2}$，$AB=2$，所以 $AE^2+BE^2=AB^2$，即 $BE\perp AE$， ………………………………… 3分

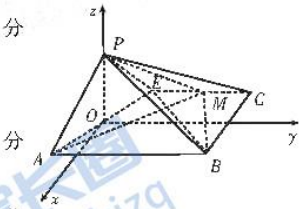
又 $PO\cap AE=O$，所以 $BE\perp$ 平面 PAE. ……………………………………………………………………… 4分

因为 $BE\subset$ 平面 PBE，所以平面 $PAE\perp$ 平面 PBE. …………………………………………………………… 5分

(2)解：在平面 $ABCE$ 中，过点 O 分别作 AB 的平行线和垂线，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，则

$A(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$，$B(\frac{1}{2},\frac{3}{2},0)$，$C(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},0)$，$E(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$，$P(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2})$，$M(-\frac{1}{2},1,0)$， ………… 6分

则 $\overrightarrow{MA}=(1,-\frac{3}{2},0)$，$\overrightarrow{MP}=(\frac{1}{2},-1,\frac{\sqrt{2}}{2})$. ……………………………… 7分



设平面 PAM 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MP}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x-\frac{3}{2}y=0,\\ \frac{1}{2}x-y+\frac{\sqrt{2}}{2}z=0,\end{cases}$ ……………………………… 8分

令 $y=2\sqrt{2}$，得 $\boldsymbol{n}=(3\sqrt{2},2\sqrt{2},1)$. ……………………………………………… 9分

设直线 BM 与平面 PAM 所成的角为 θ，因为 $\overrightarrow{BM}=(-1,-\frac{1}{2},0)$， ……………………………………… 10分

所以 $\sin\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BM}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{BM}|}=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{2}}{3\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{8\sqrt{30}}{45}$，

即直线 BM 与平面 PAM 所成角的正弦值为 $\dfrac{8\sqrt{30}}{45}$. ……………………………………………………… 12分

21. 解：(1)因为点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，所以 $\dfrac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{c}{2}$，$\dfrac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{b}{2}$. ……………………………… 2分

故 $a\cos(C-\frac{\pi}{3})=\frac{b+c}{2}$，即 $\frac{1}{2}a\cos C+\frac{\sqrt{3}}{2}a\sin C=\frac{b+c}{2}$. ………………………………………… 3分

由正弦定理可得 $\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin B+\sin C=\sin(A+C)+\sin C$，

即 $\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin A\cos C+\cos A\sin C+\sin C$. ……………………………………… 4分

由 $\sin C\neq 0$，化简得 $\sqrt{3}\sin A=\cos A+1$，即 $\sin(A-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$. ……………………………………… 5分

因为 $-\frac{\pi}{6}<A-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，所以 $A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，即 $A=\frac{\pi}{3}$. …………………………………………… 6分

(2)因为 $\triangle ABC$ 外接圆的周长为 $4\sqrt{3}\pi$，所以 $\triangle ABC$ 外接圆的直径为 $4\sqrt{3}$. ………………………… 7分

由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=4\sqrt{3}$，则 $a=4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6$. ………………………………………………… 8分

由余弦定理得 $36=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-3bc$. ………………………………………………… 9分

因为 $3bc=(b+c)^2-36\leqslant 3\times(\frac{b+c}{2})^2$，所以 $\frac{1}{4}(b+c)^2\leqslant 36$，即 $b+c\leqslant 12$，当且仅当 $b=c$ 时，等号成立. ……
…… 11分

又因为 $b+c>a=6$，所以 $6<b+c\leqslant 12$，则 $12<a+b+c\leqslant 18$.

故 $\triangle ABC$ 周长的取值范围为 $(12,18]$. …………………………………………………………………… 12分

21. 解：(1)依题意可得 $\begin{cases}t+\frac{p}{2}=5,\\ t^2=2pt,\end{cases}$ …………………………………………………………………… 2分

因为 $t\neq0$，所以解得 $p=2,t=4$， ………………………………………………………… 3分

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$. ……………………………………………………… 4分

(2)设过 F 点的直线方程为 $x=my+1$，

联立方程 $\begin{cases}y^2=4x,\\x=my+1,\end{cases}$ 得 $y^2-4my-4=0$，$y_1+y_2=4m$①，$y_1y_2=-4$②， ……………… 5分

设 $P(t^2,2t)$，$Q(s^2,2s)$，代入①②得 $ts=-1$，$t+s=2m$③， ………………………… 6分

则直线 OP 的方程为 $y=\frac{2}{t}x$，直线 OQ 的方程为 $y=\frac{2}{s}x$，

联立方程 $\begin{cases}(x-4)^2+y^2=16,\\y=\frac{2}{t}x,\end{cases}$ 解得 $M(\frac{8t^2}{t^2+4},\frac{16t}{t^2+4})$，同理得 $N(\frac{8s^2}{s^2+4},\frac{16s}{s^2+4})$， ……………… 7分

$\frac{S_{\triangle OMN}}{S_{\triangle OPQ}}=\frac{|OM||ON|}{|OP||OQ|}=\frac{64}{(t^2+4)(s^2+4)}=\frac{64}{(ts)^2+4(t^2+s^2)+16}$④， ……………………… 9分

由③得 $t^2+s^2=(t+s)^2-2ts=4m^2+2$，代入④得 $\frac{S_{\triangle OMN}}{S_{\triangle OPQ}}=\frac{64}{16m^2+25}$，

显然，当 $m=0$ 时最大，最大值为 $\frac{64}{25}$. …………………………………………… 11分

故 $\triangle OMN$ 与 $\triangle OPQ$ 面积之比的最大值为 $\frac{64}{25}$. …………………………………… 12分

22.(1)解：因为 $g(x)=\frac{1}{2}x^2+ax+a\ln x$，所以 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+ax+(a-1)\ln x$，

$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$， ………………………………………………………… 1分

$f'(x)=x+a+\frac{a-1}{x}=\frac{(x+1)(x+a-1)}{x}$. ………………………………………… 2分

当 $a\geq1$ 时，$f'(x)\geq0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………… 3分

当 $a<1$ 时，若 $x\in(0,1-a)$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；若 $x\in(1-a,+\infty)$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

……………………………………………………………………………………… 4分

(2)证明：$f(x)=\frac{1}{2}x^2[x(x-\ln x)+\frac{1}{x}]-\ln x$. ……………………………… 5分

设 $h(x)=x-\ln x$，则 $h'(x)=\frac{x-1}{x}$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增. ………… 6分

所以 $h(x)_{\min}=h(1)=1$，$x-\ln x\geq1$， ……………………………………………… 7分

因此 $\frac{1}{2}x^2[x(x-\ln x)+\frac{1}{x}]\geq\frac{1}{2}x^2(x+\frac{1}{x})\geq\frac{1}{2}x^2\times2=x^2$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立. ……… 8分

设 $\varphi(x)=x^2-\ln x$，$x>0$，则 $\varphi'(x)=\frac{2x^2-1}{x}$.

当 $x\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减；当 $x\in(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增. ……… 9分

因此 $\varphi(x)_{\min}=\varphi(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{1}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1+\ln 2}{2}$， …………………………………… 10分

从而 $f(x)\geq\varphi(x)\geq\frac{1+\ln 2}{2}$，则 $f(x)\geq\frac{1+\ln 2}{2}$， ……………………………… 11分

因为 $1\neq\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $f(x)\geq\frac{1+\ln 2}{2}$ 中的等号不成立，故 $f(x)>\frac{1+\ln 2}{2}$. ……………………… 12分

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。

微信搜一搜

齐鲁家长圈

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索