云南师大附中2020届高考适应性月考卷（六）
文科数学参考答案

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	A	D	C	A	D	C	C	A	D	B

【解析】

1. 因为$A=\{x|0<x<2\}$，$B=\{0,1\}$，所以$A\cup B=\{x|0\leqslant x<2\}$，故选B.

2. $(1-i)(1-i^3)=(1-i)(1+i)=2$，故选C.

3. 因为$\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2-|\vec{a}||\vec{b}|\cos30°$，所以$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，故选A.

4. 如图1，作出不等式组$\begin{cases}x+y\geqslant1,\\2x-y\geqslant2,\\y\leqslant1\end{cases}$表示的平面区域，$\dfrac{y}{x}$的几何意义为可行域内的点与点(0, 0)连线的斜率，由图可知，当$x=\dfrac{3}{2}$，$y=1$时，$\dfrac{y}{x}$有最大值$\dfrac{2}{3}$，故选D.

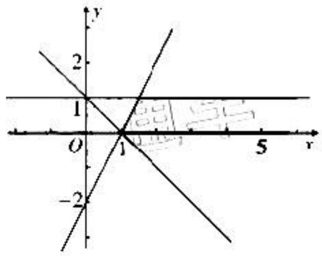

图1

5. 高一年级成绩的中位数为$\dfrac{55+56}{2}=55.5$，高二年级成绩的中位数为$\dfrac{52+53}{2}=52.5$，所以A不正确；高一年级各班级得分分布更集中更均匀，故高一年级得分方差小于高二年级得分方差，故B不正确；高一年级得分平均数等于高二年级得分平均数，故C正确；高一年级各班级得分的最低分为43，故选C.

6. 双曲线C：$x^2-y^2=1$的渐近线方程为$y=\pm x$，当$k\in(0,1)$时，$y=kx$与曲线C有两个不同的交点；当$k\in[1,3)$时，$y=kx$与曲线C没有交点，所以“直线$y=kx$与双曲线C：$x^2-y^2=1$有两个不同的交点”发生的概率为$\dfrac{1}{3}$，故选A.

7. 在$\triangle ABC$中，$a=\sqrt{2}b$，$\sin A=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，由正弦定理得$\sin A=\sqrt{2}\sin B$，所以$\sin B=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. 由题意知，$c>a>b$，所以$\cos A=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos B=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，在$\triangle ABC$中，$A+B+C=\pi$，所以$\cos C=-\cos(A+B)=-\cos A\cos B+\sin A\sin B=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以$C=\dfrac{3\pi}{4}$，故选D.

8．由面面平行可知，直线 AB 与平面 EFG 平行，选项 A，B 正确；选项 C 中，直线 AB 与平面 EFG 相交；选项 D 中，$AB // FG$，$AB \not\subset$ 平面EFG，$FG \subset$ 平面EFG，所以直线 AB 与平面 EFG 平行，故选 C．

9．$a_1 = \log_2 3$，$a_2 = \log_3 4 = 2\log_3 2 = \dfrac{2}{\log_2 3}$，因为 $\log_2 3 > \log_2 2\sqrt{2} = \dfrac{3}{2} > \sqrt{2}$，所以 $a_1 > a_2$；

$a_7 = \log_8 9 = \dfrac{2}{3}\log_2 3 < a_1$；$T_6 = \log_2 3 \times \log_3 4 \times \cdots \times \log_7 8 = \log_2 8 = 3$；$T_7 = T_6 \times \log_8 9$，因为

$T_6 > 0$，$\log_8 9 > 1$，所以 $T_7 > T_6$，故选 C．

10．O 为坐标原点，由题意知 $AB \perp OF$，点 $A\left(\dfrac{p}{2},\ p\right)$，又因为 A 在椭圆上，所以 $|AF| = \dfrac{b^2}{a}$，

设 $c^2 = a^2 - b^2$，则 $|OF| = c$，$\dfrac{|AF|}{|OF|} = \dfrac{p}{\dfrac{p}{2}} = 2$，得 $\dfrac{b^2}{a} = 2c$，所以椭圆 C 的离心率为 $\sqrt{2} - 1$，

故选 A．

11．在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，$DC = 2r\sin\alpha$，故①不正确；因为 $BD = DC$，所以 $\angle BAC = 2\alpha$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AB = 2r\cos 2\alpha$，故②正确；因为 $AE = AB$，$BD = DC$，易知 $\triangle ADB$ 与 $\triangle ADE$ 全等，故 $DE = BD = DC$，$DF \perp EC$，所以 $FC = r - \dfrac{AB}{2} = r(1 - \cos 2\alpha)$，又 $\dfrac{DC}{AC} = \dfrac{FC}{DC}$，所以 $DC^2 = AC \cdot FC = r(2r - AB)$，故③④正确．由 $DC = 2r\sin\alpha$，$AB = 2r\cos 2\alpha$，$DC^2 = r(2r - AB)$，可得 $(2r\sin\alpha)^2 = r(2r - 2r\cos 2\alpha)$，即 $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$，故选 D．

12．因为 $f(x) = \dfrac{e^{|x|}\sin(\omega x + \varphi)}{10}$ 为偶函数，$y = e^{|x|}$ 为偶函数，所以 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 为偶函数，又 $0 < \varphi < \pi$，所以 $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$．由图象及 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$ 可知 $\omega = 1$，所以 $f(x) = \dfrac{e^{|x|}\cos x}{10}$．因为 $y = f(x)$ 和 $y = \cos x$ 为偶函数，所以只需考虑 $x \geqslant 0$ 的情况．当 $x \geqslant 0$ 时，$f(x) = \dfrac{e^x\cos x}{10}$，$f'(x) = \dfrac{e^x(\cos x - \sin x)}{10} = \dfrac{\sqrt{2}}{10}e^x\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$，当 $x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$，$k \in \mathbf{Z}$，即 $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$，$k \in \mathbf{Z}$ 时，$f(x)$ 有极大值，此时 $\sin(\omega x + \varphi) = \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故选 B．

二、**填空题**（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	-1	4	$y=-x+4$	2π

【解析】

13．$\forall x\in(0,+\infty)$，$x^2-2x-m\geqslant 0$，只需 $(x^2-2x)_{\min}\geqslant m$，当 $x=1$ 时，x^2-2x 有最小值 -1，所以 $m\leqslant -1$，m 的最大值为 -1．

14．圆 C：$(x-2)^2+y^2=4$ 的圆心为 $(2,0)$，半径为 2，直线 l：$ax+y-2a=0$ 过定点 $(2,0)$，所以弦 AB 为圆 C 的直径，所以弦 AB 的长为 4．

15．由 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x},\ x\in(0,2],\\ f(x-2),\ x\in(2,+\infty)\end{cases}$ 可知，当 $x\in(2,4]$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x-2}$，$f'(x)=-\dfrac{1}{(x-2)^2}$，所以 $f(3)=1$，$f'(3)=-1$，$f(x)$ 在 $x=3$ 处的切线方程为 $y-1=-(x-3)$，即 $y=-x+4$．

16．由题意作图 2，取线段 OD 的中点 G，连接 EG，CG，可知 $EG\perp AD$，$CG\perp AD$，$EG\cap CG=G$，所以 $AD\perp$ 平面 EGC，由 $AD/\!/EF$，得 $EF\perp$ 平面 EGC，$EF\perp EC$，因此在三棱锥 $O-CEF$ 中，$OC=OF=OE=EC=EF=1$，$FC=\sqrt{2}$，三棱锥 $O-CEF$ 外接球球心为线段 FC 的中点，半径为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，外接球表面积为 2π．

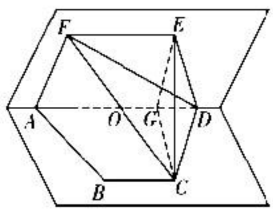

图 2

三、**解答题**（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 12 分）

解：（1）A、B 一个包裹，C 一个包裹时，需花费 $15+15=30$（元），

A、C 一个包裹，B 一个包裹时，需花费 $20+15=35$（元），

B、C 一个包裹，A 一个包裹时，需花费 $25+10=35$（元），

综上，A、B 一个包裹，C 一个包裹时花费的运费最少，为 30 元．

……………………………………………………………………（6 分）

（2）5 天中有 3 天的日揽包裹数超过 100 件，

记这三天为 a_1，a_2，a_3，其余两天为 b_1，b_2，

从5天中随机抽出2天的所有基本事件如下：

(a_1,a_2)，(a_1,a_3)，(a_1,b_1)，(a_1,b_2)，(a_2,a_3)，(a_2,b_1)，(a_2,b_2)，(a_3,b_1)，(a_3,b_2)，(b_1,b_2)，一共10种，

2天的日揽包裹数均超过100件的基本事件有(a_1,a_2)，(a_1,a_3)，(a_2,a_3)，一共3种，

所以从这5天中随机抽出2天，2天的日揽件数均超过100件的概率为$\frac{3}{10}$.

……………………………………………………（12分）

18.（本小题满分12分）

（1）解：当$n\geqslant 2$时，$S_{n-1}=2^n-n-1$，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n-1$，

当$n=1$时，$a_1=S_1=2^2-1-2=1$满足$a_n=2^n-1$.

综上，当$n\in\mathbf{N}^*$时，$a_n=2^n-1$.

……………………………………………………（6分）

（2）证明：（i）当$n\in\mathbf{N}^*$时，$2^n-1\geqslant 2^{n-1}$，

所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^{n+1}-1}{2^n-1}=2+\frac{1}{2^n-1}\leqslant 2+\frac{1}{2^{n-1}}$.

（ii）$\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_2}+\frac{a_4}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant 2n+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2n+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$

$=2n+2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]<2n+2$，

综上可得，当$n\in\mathbf{N}^*$时，$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}+2$，$\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_2}+\frac{a_4}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n+1}}{a_n}<2n+2$.

……………………………………………………（12分）

19.（本小题满分12分）

解：（1）设圆O_1，O_2的半径分别为r，$2r$，

因为圆台的侧面积为6π，

所以$6\pi=\frac{1}{2}\times 2(2\pi r+4\pi r)$，可得$r=1$.

因此，在等腰梯形 $A_1A_2B_2B_1$ 中，$A_1A_2=2B_1B_2=4$，$A_1B_1=2$，$O_1O_2=\sqrt{3}$.

如图 3，连接线段 O_1O_2，O_1C，O_2C，

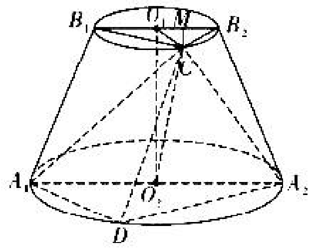

图 3

在圆台 O_1O_2 中，$O_1O_2\perp$ 平面B_1CB_2，$O_1C\subset$ 平面B_1CB_2，

所以 $O_1O_2\perp O_1C$.

又 $O_1C=1$，所以在 $\triangle O_1CO_2$ 中，$CO_2=2$.

在 $\triangle CA_1A_2$ 中，$CO_2=\dfrac{1}{2}A_1A_2$，故 $\angle A_1CA_2=90^\circ$，即 $A_1C\perp A_2C$.

……………………………………………………（6 分）

（2）由题意可知，三棱锥 $C-A_1DA_2$ 的体积为 $V_{C-A_1DA_2}=\dfrac{1}{3}|O_1O_2|S_{\triangle A_1DA_2}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}|A_1D||A_2D|$，

又在直角三角形 A_1DA_2 中，$A_1D^2+A_2D^2=A_1A_2{}^2=16\geqslant 2|A_1D||A_2D|$，

所以当且仅当 $|A_1D|=|A_2D|=2\sqrt{2}$，

即点 D 为弧 A_1A_2 的中点时，$V_{C-A_1DA_2}$ 有最大值 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

过点 C 作 $CM\perp O_1B_2$ 交 O_1B_2 于点 M，

因为 $O_1O_2\perp$ 平面B_1CB_2，$CM\subset$ 平面B_1CB_2，

所以 $O_1O_2\perp CM$，$O_1O_2\subset$ 平面$A_1A_2B_2B_1$，$O_1B_2\subset$ 平面$A_1A_2B_2B_1$，$O_1O_2\cap OB_2=O_1$，

所以 $CM\perp$ 平面$A_1A_2B_2B_1$.

又 $\angle B_2O_1C=30^\circ$，则点 C 到平面 $A_1A_2B_2B_1$ 的距离 $CM=\dfrac{1}{2}$，

所以四棱锥 $C-A_1A_2B_2B_1$ 的体积 $V_{C-A_1A_2B_2B_1}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times(2+4)\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

综上，当三棱锥 $C-A_1DA_2$ 体积取最大值时，

多面体 $CDA_1A_2B_2B_1$ 的体积 $V=V_{C-A_1DA_2}+V_{C-A_1A_2B_2B_1}=\dfrac{11}{6}\sqrt{3}$.

……………………………………………………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

解：（1）抛物线 C：$x^2=4y$，点 $F(0,1)$，

由题意知直线 l 的斜率存在，设直线 l：$y=kx+1$，

代入抛物线方程 $x^2=4y$ 可得 $x^2-4kx-4=0$，

设点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，

因为 $\Delta>0$，所以 $x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4$.

因为 $|AF|=\lambda|BF|$，所以 $x_1=-\lambda x_2$，

又 $x_2(1-\lambda)=4k$，$-\lambda x_2^2=-4$，可得 $k^2=\dfrac{(1-\lambda)^2}{4\lambda}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\lambda}+\lambda-2\right)$，

当 $\lambda\geqslant 2$ 时，$k^2\geqslant\dfrac{1}{8}$，

所以 $k\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 或 $k\leqslant-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$．　……………………………………（6 分）

（2）对 $y=\dfrac{1}{4}x^2$，$y'=\dfrac{1}{2}x$，则直线 AP：$y-y_1=\dfrac{1}{2}x_1(x-x_1)$，

又 $y_1=\dfrac{1}{4}x_1^2$，所以直线 AP：$y=\dfrac{1}{2}x_1x-\dfrac{1}{4}x_1^2$，

同理可得直线 BP：$y=\dfrac{1}{2}x_2x-\dfrac{1}{4}x_2^2$，

所以点 $P\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{x_1x_2}{4}\right)$，即 $P(2k, -1)$．

因此 $\overrightarrow{FP}=(2k, -2)$，$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$，

$\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{AB}=2k(x_2-x_1)-2(y_2-y_1)=2k(x_2-x_1)-\dfrac{1}{2}(x_2^2-x_1^2)=(x_2-x_1)\left(2k-\dfrac{x_2+x_1}{2}\right)=0$.

综上，$\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.　……………………………………（12 分）

21.（本小题满分 12 分）

解：（1）$f(x)=\ln x+2x-x^2$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\dfrac{1}{x}+2-2x=\dfrac{-2x^2+2x+1}{x}$，

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$，$x_2=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$（舍）.

当 $x\in\left(0,\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\ +\infty\right)$时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\ +\infty\right)$ 上单调递减，

因此，函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $\left(0,\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$，单调减区间为 $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\ +\infty\right)$.

……………………………………………………………（4 分）

（2）$g(x)=\ln x+2x-x^2-\cos x$，

当 $x\in(0,\ 1)$ 时，$g'(x)=\dfrac{1}{x}+2-2x+\sin x$，

因为 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+2-2x$ 单调递减，

所以 $g'(x)>1+2-2+0=1$，$g(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递增，

又 $g(1)=1-\cos 1>0$，$g\left(\dfrac{1}{4}\right)=\ln\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{16}-\cos\dfrac{1}{4}<0$，

所以存在唯一 $x_1\in(0,\ 1)$，使得 $g(x_1)=0$.

当 $x\in\left[1,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x)=\dfrac{1}{x}+2-2x+\sin x$，$g''(x)=-\dfrac{1}{x^2}-2+\cos x<0$，

所以 $g'(x)$ 单调递减，

又 $g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{\pi}+2-\pi+1>0$，

所以 $g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $x\in\left[1,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增.

因为 $g(1)=1-\cos 1>0$，所以 $g(x)>0$，故不存在零点.

当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\ 3\right)$时，$g'(x)=\dfrac{1}{x}+2-2x+\sin x$，$g''(x)=-\dfrac{1}{x^2}-2+\cos x<0$，

所以 $g'(x)$ 单调递减，

又$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$，$g'(2)=\frac{1}{2}+2-4+\sin 2<0$，

所以存在$x_0\in\left[\frac{\pi}{2},\ 2\right)$，使得$g'(x_0)=0$．

当$x\in\left[\frac{\pi}{2},\ x_0\right)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

当$x\in(x_0,\ 3)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减．

又$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ln\frac{\pi}{2}+\pi-\frac{\pi^2}{4}>0$，$g(2)=\ln 2-\cos 2>0$，$g(3)=\ln 3+6-9-\cos 3<0$，

所以存在唯一$x_2\in(2,\ 3)$，使得$g(x_2)=0$．

当$x\in[3,\ +\infty)$时，$g(x)<x-1+2x-x^2+1=-x^2+3x\leqslant 0$，故不存在零点．

综上，$g(x)$存在两个零点x_1，x_2，且$x_1\in(0,\ 1)$，$x_0\in(2,\ 3)$，

因此$n-m$的最小值为3．　　…………………………………………………（12分）

22．（本小题满分10分）【选修4−4：坐标系与参数方程】

解：（1）曲线C的普通方程为$(x-1)^2+y^2=1(y>0)$，

极坐标方程为$\rho=2\cos\theta\left(\theta\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)\right)$，

点P的普通方程为$x=2(y>0)$，

所以点P轨迹的极坐标方程为$\rho\cos\theta=2\left(\theta\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)\right)$．

…………………………………………………………………………（5分）

（2）设点$M(\rho_1,\ \theta_0)$，点$P(\rho_2,\ \theta_0)$，

则$\rho_1=2\cos\theta_0$，$\rho_2=\frac{2}{\cos\theta_0}$，

由$|PM|=3$可得$\rho_2-\rho_1=3$，即$\frac{2}{\cos\theta_0}-2\cos\theta_0=3$，

$\because\theta_0\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore\cos\theta_0=\frac{1}{2}$，$\theta_0=\frac{\pi}{3}$，

所以 $\rho_2=\dfrac{2}{\cos\dfrac{\pi}{3}}=4$，点 P 的极坐标为 $\left(4,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$.

……………………………………………………（10 分）

23.（本小题满分 10 分）【选修 4−5：不等式选讲】

（1）解：$f(x)=\begin{cases}-2, & x\leqslant -1,\\ 2x, & 1<x<1,\\ 2, & x\geqslant 1,\end{cases}$

所以，当 $-1<x<1$ 时，$-2<f(x)<2$，

综上，当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)$ 有最大值 2，$M=2$.

……………………………………………………（5 分）

（2）证明：$\because 0<a+b+c\leqslant 2$，$\therefore (a+b+c)^2\leqslant 4$，$\therefore a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)\leqslant 4$，

又由柯西不等式知 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+ac+bc$，

所以 $3(ab+ac+bc)\leqslant 4$，

所以 $ab+ac+bc\leqslant\dfrac{4}{3}$.　　……………………………………………………（10 分）

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

识别二维码，快速关注

福利：

1、关注后回复“答题模板”，即可获得高中 9 科答题模板资料

2、回复“清北华五”，即可获得清北华东五校特殊选拔考试模式及真题