# “合肥六中· 大联考”2021年高考考前诊断暨预测卷

# 理科数学

**考生注意：**

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回

**一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1. 已知集合 $M=\{x|y=\sqrt{3+2x-x^2}\}$，$N=\{y|y=1-\sqrt{x}\}$，则 $M\cap N=$

A. $[-1,1]$　　B. $[0,3]$　　C. $[1,3]$　　D. $[-3,1]$

2. 已知复数 $z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$，给出下列四个结论：①$|z|=2$；②$z^2=-2\mathrm{i}$；③$z$ 的共轭复数 $\bar{z}=-1-\mathrm{i}$；④$z$ 的虚部为 $-\mathrm{i}$.

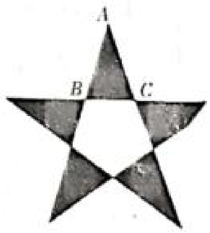
其中正确结论的个数是

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$，$\boldsymbol{b}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}(\lambda\in\mathbf{R})$，则 $|\sqrt{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$

A. 2或0　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{2}$或0

4. 德国著名的天文学家开普勒说过：“几何学里有两件宝，一个是勾股定理，另一个是黄金分割. 如果把勾股定理比作黄金矿的话，那么可以把黄金分割比作钻石矿. ”“黄金三角形”有两种，其中底与腰之比为黄金分割比的“黄金三角形”被认为是最美的三角形，它是一个顶角为36°的等腰三角形（另一种是顶角为108°的等腰三角形）. 已知一个“黄金椭圆”的左焦点，右顶点，上顶点构成直角三角形，其离心率为 $e$. 例如，五角星由五个黄金三角形与一个正五边形组成，如图所示，在其中一个黄金 $\triangle ABC$ 中，$\dfrac{BC}{AC}=e$. 根据这些信息，可得 $\sin 126°=$

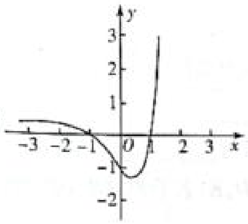


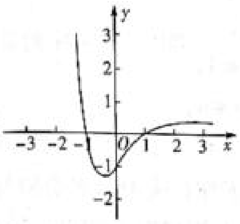

A. $\dfrac{1-2\sqrt{5}}{4}$　　B. $\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$　　C. $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$　　D. $\dfrac{4+\sqrt{5}}{8}$

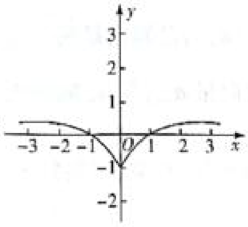
5. 中国、日本、韩国的乒乓球裁判员各2名，执行2019年世界乒乓球锦标赛的一号、二号和三号场地乒乓球裁判工作，每个场地由2名来自不同国家的裁判组成，则不同的安排方案共有

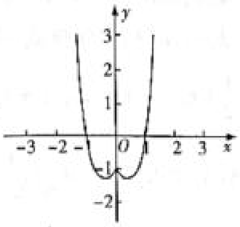
A. 96种　　B. 48种　　C. 36种　　D. 24种

6. 函数$f(x)=\frac{x^2-1}{e^{|x|}}$的图象大致为

A.


B.


C.


D.


7. 已知双曲线$C:x^2-\frac{y^2}{2}=1$的左右焦点分别为$F_1,F_2$,点$G$位于第一象限的双曲线$C$上,$\angle F_1GF_2$的角平分线$GP$与$x$轴的交点为$P\left(\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$,则$\angle F_1GF_2=$

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

8. 已知数列$\{a_n\}$是公差不为0的等差数列,其前$n$项和为$S_n$,若对任意的$n\in\mathbf{N}^*$,都有$S_n\geqslant S_3$,则$\frac{a_6}{a_5}$的值不可能为

A. 2　　B. $\frac{5}{3}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{4}{3}$

9. 已知$a=\log_{12}13$,$b=\left(\frac{13}{12}\right)^{\frac{14}{13}}$,$c=\log_{13}14$,则$a,b,c$的大小关系为

A. $a>b>c$　　B. $c>b>a$　　C. $b>a>c$　　D. $a>c>b$

10. 设函数$f(x)=x\sin x+\cos x$,则下列四个结论中正确的是

①函数$f(x)$是偶函数;

②曲线$y=f(x)$在$x=0$处的切线方程为$y=1$;

③当$x\in\left[\frac{\pi}{2},2\pi\right]$时$f(x)$单调递减;

④关于$x$的方程$x\sin x+\cos x=a$在$x\in[0,2\pi]$只有两个实根,则实数$a$的取值范围为$\left[-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

A. ①②　　B. ①②④　　C. ①③④　　D. ③④

11. 在四棱锥$P-ABCD$中,$BC\,/\!/\,AD$,$AD\perp AB$,$AB=2\sqrt{3}$,$AD=6$,$BC=4$,$PA=PB=PD=4\sqrt{3}$,则三棱锥$P-BCD$外接球的表面积为

A. $60\pi$　　B. $40\pi$　　C. $100\pi$　　D. $80\pi$

12. 已知不等式$x\geqslant m\ln x+n$($m,n\in\mathbf{R}$,且$m\neq 0$)对任意实数$x>0$成立,则$\frac{n-2}{m}$的最大值为

A. $-2\ln 2$　　B. $-\ln 2$　　C. $\ln 2-1$　　D. $\ln 2-2$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 若 $x,y$ 满足约束条件 $\begin{cases} x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0, \\ x+y\leqslant 3, \\ 2x+y\leqslant 4, \end{cases}$ 则 $z=3x+2y$ 的最大值是________.

14. $(1-2x)^n$ 的展开式中只有第4项的二项式系数最大，则展开式的系数之和为________.

15. 过抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点 $F$ 作直线 $AB,DE$ 分别与抛物线 $C$ 交于 $A,B$ 和 $D,E$，若直线 $AB,DE$ 的斜率分别为 $k_1,k_2$，且满足 $k_1^2+k_2^2=4$，则 $|AB|+|DE|$ 的最小值为________.

16. 我们把一系列向量 $\boldsymbol{a}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 按次序排成一列，称之为向量列，记作 $\{\boldsymbol{a}_n\}$，已知向量列 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ 满足：$\boldsymbol{a}_1=(1,1)$，$\boldsymbol{a}_n=(x_n,y_n)=\frac{1}{2}(x_{n-1}-y_{n-1},x_{n-1}+y_{n-1})(n\geqslant 2)$，设 $\theta_n$ 表示向量 $\boldsymbol{a}_{n-1}$ 与 $\boldsymbol{a}_n$ 间的夹角，若 $b_n=\frac{n^2}{\pi}\theta_n$，对于任意正整数 $n$，不等式 $\sqrt{\frac{1}{b_{n+1}}}+\sqrt{\frac{1}{b_{n+2}}}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{b_{2n}}}>\frac{1}{2}\log_a(1-2a)$ 成立，则实数 $a$ 的取值范围是________.

三、解答题：共70分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤. 第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第22,23题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共60分.

17.（12分）

$\triangle ABC$ 的内角 $A,B,C$ 的对边分别为 $a,b,c$，已知 $a(\sqrt{3}\cos C+\sin C)=\sqrt{3}b$.

（Ⅰ）求 $A$；

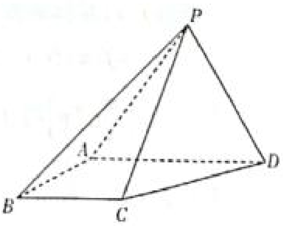
（Ⅱ）求 $\cos^2B+\cos^2C$ 的最小值.

18.（12分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面 $PCD$ 为等边三角形且垂直底面 $ABCD$，$\angle ABC=\angle BAD=90°$，$AB=BC=\frac{1}{2}AD$.

（Ⅰ）证明：$PA=PB$；

（Ⅱ）求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值.




19.（12分）

高一某学生参加学校的数学竞赛选拔考试，本次考试共有12道选择题组成. 得分规定：做对一道题得1分，做错一道题得 $-1$ 分，不做得0分，9分及格. 该学生的目标至少得9分，且确定该学生前8道题的答案均正确，而剩下的4道题每道题做对的概率均为 $\frac{3}{4}$.

（Ⅰ）若该学生12道题全都做，求得分 $X$ 的分布列和数学期望；

（Ⅱ）该学生做多少道题时及格的概率最大？

20.（12分）

已知函数$f(x)=\ln x-ax-\dfrac{2}{ax}$.

（Ⅰ）若$f(x)\geqslant 0$，求实数$a$的取值范围；

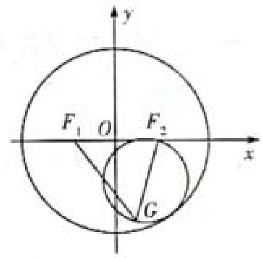
（Ⅱ）若$g(x)=f(x)+x^2+\dfrac{2}{ax}$有两个极值点分别为$x_1,x_2(x_1<x_2)$，求$2g(x_1)-g(x_2)$的最小值.

21.（12分）

如图，已知点$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，以线段$F_2G$为直径的圆内切于圆$O:x^2+y^2=8$，点$G$的轨迹为$E$.

（Ⅰ）求点$G$的轨迹$E$的方程；

（Ⅱ）轨迹$E$与$y$轴正半轴交于点$A$，是否存在直线$l$与轨迹$E$交于$M,N$两点，使得点$F_2$为$\triangle AMN$的垂心，若存在，求出直线$l$的方程；若不存在，说明理由.




**（二）选考题：共10分. 请考生在第22,23题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.**

22.［选修4－4：坐标系与参数方程］（10分）

在直角坐标系$xOy$中，以坐标原点为极点，$x$轴正半轴为极轴建立极坐标系，直线$l$过点$M\left(2,\dfrac{\pi}{2}\right)$与直线$\theta=\dfrac{5\pi}{6}$垂直，曲线$C$的极坐标方程为$\rho=\dfrac{\tan\theta}{4\cos\theta}$.

（Ⅰ）求直线$l$的普通方程和曲线$C$的普通方程；

（Ⅱ）若$l$与曲线$C$交于点$A,B$，求$\dfrac{1}{|MA|}+\dfrac{1}{|MB|}$的值.

23.［选修4－5：不等式选讲］（10分）

已知函数$f(x)=|2x-1|+|2x+3|$.

（Ⅰ）求不等式$f(x)\leqslant 6$的解集；

（Ⅱ）设函数$f(x)$的最小值为$m$，若实数$a,b,c$满足$a^2+2b^2+3c^2=m$，求$a+2b+3c$的最大值.

# 关于我们

**自主选拔在线**（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 ‘’ 专业、专注、有态度 ‘’ 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。