

2022—2023 学年第二学期高一年级七校联考

数学试卷

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，请把答案填涂在答题卡相应位置上。）

- 若复数 z 满足 $iz=3-4i$ ，则 $|z|$ 等于（ ）
A. 1 B. 7 C. 5 D. 25
- 在 $\triangle ABC$ 中， a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边，若 $\sqrt{3}a \sin B = b \cos A$ ，且 $b=2\sqrt{3}, c=2$ ，则 a 的值为（ ）
A. $2\sqrt{7}$ B. 2 C. $2\sqrt{3}-2$ D. 1
- 若圆锥的母线长为 $2\sqrt{3}$ ，侧面展开图的面积为 6π ，则该圆锥的体积是（ ）
A. 3π B. $\sqrt{3}\pi$ C. $3\sqrt{3}\pi$ D. 9π
- 已知 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{7}$ ， $0 < \alpha < \pi$ ，则 $\sin \alpha$ 的值为（ ）
A. $\frac{3\sqrt{3}}{14}$ B. $\frac{5\sqrt{3}}{14}$ C. $\frac{11}{14}$ D. $\frac{13}{14}$

5. 三星堆古遗址作为“长江文明之源”被誉为人类最伟大的考古发现之一。3 号坑发现的神树纹玉琮，为今人研究古蜀社会中神树的意义提供了重要依据。玉琮是古人用于祭祀的礼器，有学者认为其外方内圆的构造，契合了古代“天圆地方”观念，是天地合一的体现。如图，假定某玉琮形状对称，由一个空心圆柱及正方体构成，且圆柱的外侧面内切于正方体的侧面，圆柱的高为 12cm，圆柱底面外圆周和正方体的各个顶点均在球 O 上，则球 O 的表面积为（ ）



- A. $72\pi\text{cm}^2$ B. $162\pi\text{cm}^2$ C. $216\pi\text{cm}^2$ D. $288\pi\text{cm}^2$ (第 5 题图)

6. P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点，满足 $|\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC}| - |\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} - 2\overrightarrow{PA}| = 0$ ，则 $\triangle ABC$ 的形状是（ ）
A. 等腰直角三角形 B. 直角三角形 C. 等腰三角形 D. 等边三角形

7. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{3} = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}}{2} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$ ，则 $\cos A =$ （ ）

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

8. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB=2AC=2$ ， P, Q 为线段 BC 上的点，且 $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QC}$ ，若 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = \frac{5}{9}$ ，则 $\angle BAC =$ （ ）

- A. 150° B. 120° C. 60° D. 30°

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对得 5 分，少选得 2 分，错选或不选得 0 分。请把答案填涂在

答题卡相应位置上.)

9. 在复数集内, 下列命题是真命题的是 ()
- A. 若复数 $z \in \mathbf{R}$, 则 $\bar{z} \in \mathbf{R}$ B. 若复数 z 满足 $z^2 \in \mathbf{R}$, 则 $z \in \mathbf{R}$

- C. 若复数 z_1, z_2 满足 $z_1 z_2 \in \mathbf{R}$, 则 $z_1 = \bar{z}_2$ D. 若复数 z 满足 $\frac{1}{z} \in \mathbf{R}$, 则 $z \in \mathbf{R}$

10. 设点 M 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 则下列说法正确的是 ()

- A. 若 $\vec{BM} = \frac{1}{3}\vec{BC}$, 则 $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{AB}$
- B. 若 $\vec{AM} = 2\vec{AC} - 3\vec{AB}$, 则点 M, B, C 三点共线
- C. 若点 M 是 $\triangle ABC$ 的重心, 则 $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \mathbf{0}$
- D. 若 $\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ 且 $x + y = \frac{1}{3}$, 则 $\triangle MBC$ 的面积是 $\triangle ABC$ 面积的 $\frac{2}{3}$

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 下列结论中, 正确的是 ()

- A. 若 $\cos 2A = \cos 2B$, 则 $\triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形
- B. 若 $\sin A > \sin B$, 则 $A > B$
- C. 若 $AB^2 + AC^2 < BC^2$, 则 $\triangle ABC$ 为钝角三角形
- D. 若 $A = 60^\circ$, $AC = 4$, 且结合 BC 的长解三角形, 有两解, 则 BC 长的取值范围是

$(2\sqrt{3}, +\infty)$

12. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 3$, $BC = 4$, $AA_1 = 5$, 动点 P 在平面 ADD_1A_1 内且满足 $\vec{AP} = \lambda\vec{AD} + \mu\vec{AA_1}$, $0 \leq \lambda \leq 1, 0 \leq \mu \leq 1$, 则 ()

- A. 无论 λ, μ 取何值, 三棱锥 $P - BCC_1$ 的体积为定值 30
- B. 当 $\lambda = 0$ 时, $BP + PC_1$ 的最小值为 $\sqrt{89}$
- C. 当 $\mu = 1$ 时, 直线 PD 与直线 CC_1 恒为异面直线
- D. 当 $\lambda + \mu = 1$ 时, $BP \parallel$ 平面 CB_1D_1

三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共计 20 分. 请把答案填写在答题卡相应位置上.)

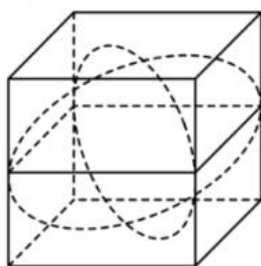
13. 已知向量 $\vec{a} = (2, 3)$, $\vec{b} = (-4, 7)$, 则向量 \vec{b} 在向量 \vec{a} 的方向上的投影向量的坐标为

_____.

14. 化简: $\frac{\sin 22^\circ + \cos 45^\circ \sin 23^\circ}{\cos 22^\circ - \sin 45^\circ \sin 23^\circ} =$ _____.

15. “牟合方盖”是我四古代数学家刘徽在研究球的体积过程中构造的一个和谐优美的几何模型, 在正方体内作两个互相垂直的内切圆柱, 其相交的部分就是牟合方盖. 如图, 已知棱长

为 2 的正方体按上述方法截得的除去牟合方盖后剩余的体积是 $\frac{16}{3}$ ，则牟合方盖与截得它的正方体的外接球的体积之比是_____。



(第 15 题图)

16. 已知 $\triangle ABC$ 的外心为 O ，满足 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{BA}$ ，则 $\cos B$ 的最小值是_____。

四、解答题 (本大题共 6 小题，共计 70 分。请在答题卡指定区域内作答。解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。)

17. (本小题满分 10 分)

已知 i 是虚数单位，复数 z 满足 $z(3+4i) = -5+10i$ 。

(1) 求复数 z 的共轭复数；

(2) 若 $a \in \mathbf{R}$ ，且 $\left| \left(\frac{z-i}{\bar{z}+i} \right)^3 + a \right| = 3$ ，求实数 a 的值。

18. (本小题满分 12 分)

设向量 \vec{a} ， \vec{b} 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ ，且 $|5\vec{a} - 8\vec{b}| = 7$ 。

(1) 求 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角；

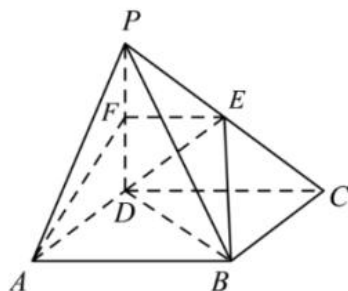
(2) 求 $|3\vec{a} + 4\vec{b}|$ 的大小。

19. (本小题满分 12 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形， E 为棱 PC 的中点，平面 ABE 与棱 PD 交于点 F 。

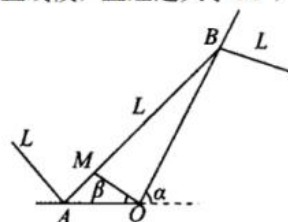
(1) 求证： $PA \parallel$ 平面 BDE ；

(2) 求证： F 为 PD 的中点；



20. (本小题满分 12 分)

如图,某城市有一条公路从正西方 AO 通过市中心 O 后转向东偏北 α 角方向的 OB , 位于该市的某大学 M 与市中心 O 的距离 $OM = 3\sqrt{13}$ km, 且 $\angle AOM = \beta$. 现要修筑一条铁路 L , L 在 OA 上设一站 A , 在 OB 上设一站 B , 铁路在 AB 部分为直线段, 且经过大学 M , 其中 $\tan \alpha = 2$, $\cos \beta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $OA = 15$ km.



- (1) 求大学 M 与站 A 的距离 AM ;
- (2) 求铁路 AB 段的长 AB .

21. (本小题满分 12 分)

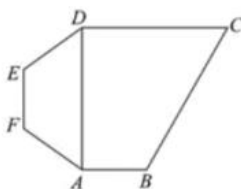
已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $\frac{2(a-b)}{c} = \frac{2\sin C - \sin B}{\sin A + \sin B}$.

- (1) 求 $\cos A$;
- (2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{15}$, AD 为内角 A 的角平分线, 交 BC 边于点 D , 求线段 AD 长的最大值.

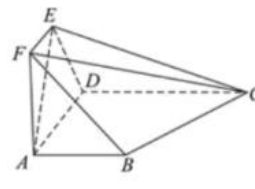
22. (本小题满分 12 分)

如图(1), 六边形 $ABCDEF$ 是由等腰梯形 $ADEF$ 和直角梯形 $ABCD$ 拼接而成, 且 $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$, $AB = AF = EF = ED = 2$, $AD = CD = 4$, 沿 AD 进行翻折, 得到的图形如图(2)所示, 且 $\angle AEC = 90^\circ$.

- (1) 求二面角 $C-AE-D$ 的余弦值;
- (2) 求四棱锥 $C-ADEF$ 外接球的体积.



图(1)



图(2)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

