座位号________ 考场号________ 准考证号________ 姓名________ 班级________ 学校________

密 封 线 内 不 要 答 题

SL 2022～2023学年度下学期高一6月考试试卷

数 学

2023.6

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
3. 本卷命题范围：必修第二册第六章～第八章＋选择性必修第一册第一章(1.1～1.4.1)

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 以下四个命题中，真命题为
A. 侧面都是等腰三角形的棱锥是正棱锥
B. 底面是矩形的平行六面体是长方体
C. 直四棱柱是直平行六面体
D. 棱台的侧棱延长后必交于一点

2. 已知一直线经过点$A(2,3,2)$，$B(-1,0,5)$，下列向量中不是该直线的方向向量的为
A. $\boldsymbol{a}=(-3,-3,3)$
B. $\boldsymbol{a}=(-1,-1,1)$
C. $\boldsymbol{a}=(1,1,1)$
D. $\boldsymbol{a}=(1,1,-1)$

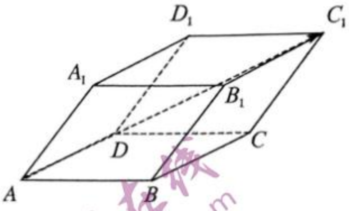
3. 复数$z=\frac{2i^3}{1-i}+a$为纯虚数，则实数a的值为
A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. -1

4. 已知$\triangle ABC$是正三角形，且$2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，则向量$\overrightarrow{AO}$在向量$\overrightarrow{AB}$上的投影向量为
A. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$　　B. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AB}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{4}\overrightarrow{AB}$

5. 圆柱的底面周长为6 cm，AC是底面圆的直径，高$BC=6$ cm，点P是母线BC上一点，且$PC=\frac{2}{3}BC$. 一只蚂蚁从A点出发沿着圆柱体的表面爬行到点P的最短距离是
A. $(4+\frac{6}{\pi})$ cm　　B. 5 cm　　C. $3\sqrt{5}$ cm　　D. 7 cm

6. A,B,C表示不同的点，n,l表示不同的直线，α,β表示不同的平面，下列说法正确的是
A. 若$\alpha\cap\beta=l$，$n/\!/\alpha$，$n/\!/\beta$，则$n/\!/l$
B. 若$A,B\in l$，$A,B\notin\alpha$，则$l/\!/\alpha$
C. 若$A,B\in\alpha$，$A,B,C\in\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，则$C\in l$
D. 若$\alpha/\!/\beta$，$l\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则$l/\!/n$

7. 已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的各棱长均为 1，$\angle A_1AB=\angle A_1AD=45°$，$\angle DAB=90°$，则 $|\overrightarrow{AC_1}|=$



A. $\sqrt{3}$

B. $\sqrt{2}+2$

C. $\sqrt{2}$

D. $\sqrt{2}+1$

8. 窗的运用是中式园林设计的重要组成部分，在表现方式上常常运用象征、隐喻、借景等手法，将民族文化与哲理融入其中，营造出广阔的审美意境. 从窗的外形看，常见的有圆形、菱形、正六边形、正八边形等. 已知圆 O 是某窗的平面图，O 为圆心，点 A 在圆 O 的圆周上，点 P 是圆 O 内部一点，若 $|\overrightarrow{OA}|=2$，且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AP}=-2$，则 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}|$ 的最小值是

A. 3　　B. 4　　C. 9　　D. 16

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合要求，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 下列关于复数 $x+\mathrm{i}$ 的说法一定正确的是

A. 存在 x 使得 $x+\mathrm{i}$ 小于 0　　B. 存在 x 使得 $(x+\mathrm{i})^{2023}=-1$

C. 不是实数　　D. 实部和虚部均为 1

10. 以下四个命题中错误的是

A. 空间的任何一个向量都可用其他三个向量表示

B. 若 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 为空间向量的一组基底，则 $\{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\}$ 构成空间向量的另一组基底

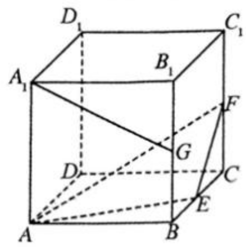
C. 对空间任意一点 O 和不共线的三点 A、B、C，若 $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$，则 P、A、B、C 四点共面

D. 任何三个不共线的向量都可构成空间向量的一个基底

11. 若 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OA}=(n,m)$，$\overrightarrow{OB}=\left(\frac{4}{n},p\right)$，$F(4,0)$，$|\overrightarrow{AF}|=m+1$，$|\overrightarrow{BF}|=p+1$，则 $m+p$ 的取值可能是

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 6

12. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，E，F，G 分别为 BC，CC_1，BB_1 的中点，则



A. 直线 A_1G 与直线 DC 所成角的正切值为 $\frac{1}{2}$

B. 直线 A_1G 与平面 AEF 不平行

C. 点 C 与点 G 到平面 AEF 的距离相等

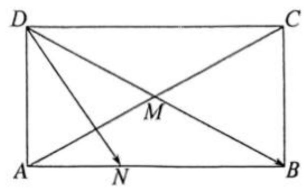
D. 平面 AEF 截正方体所得的截面面积为 $\frac{9}{8}$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(0,-3,2)$，$\boldsymbol{b}=(3,0,k)$，若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 120°，则 $k=$________.

14. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $bc=20$，$\triangle ABC$ 的面积为 5，且其外接圆的半径为 4，则 $a=$________.

15. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2BC=2$，AC 与 BD 的交点为 M，N 为边 AB 上任意点(包含端点)，则 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{DN}$ 的最大值为________.



16. 正四棱台的上、下底面的面积分别为2 cm^2，8 cm^2，若该正四棱台的体积为14 cm^3，则其外接球的表面积为________cm^2.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

已知复数 $z=(m^2+2m)+(m^2-m-6)i$，$m\in\mathbf{R}$，i 是虚数单位.

(1)若复数 z 在复平面内对应的点在直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 上，求 m 的值；

(2)若复数 z 在复平面内对应的点在第四象限，求 m 的取值范围.

18.（本小题满分 12 分）

已知空间三点 $A(0,1,-1)$，$B(-3,1,3)$，$C(1,0,-1)$.

(1)求以$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$为边的平行四边形的面积；

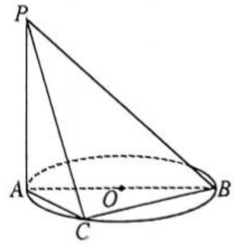
(2)若$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{41}$，且 $\boldsymbol{a}$ 分别与$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$垂直，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

19.（本小题满分 12 分）

如图，AB 是⊙O 的直径，PA 垂直于⊙O 所在的平面，C 是圆周上不同于 A，B 的一动点.

(1)证明：△PBC 是直角三角形；

(2)若 $PA=AB=\sqrt{2}AC$，求直线 AB 与平面 PBC 所成角的正弦值.

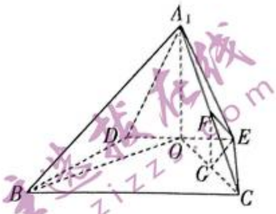


20.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 A_1-BCED 中，$DE // BC$，$A_1D=BD=A_1E=CE=\sqrt{5}$，O 为 DE 的中点，$2DE=BC=4$. F 为 A_1C 的中点，平面 $A_1DE\perp$ 平面 $BCED$.

(1)求证：平面 $A_1OB\perp$ 平面 A_1OC；

(2)线段 OC 上是否存在点 G，使得 $OC\perp$ 平面 EFG？说明理由.



21.（本小题满分 12 分）

在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$\sin^2A+\sin^2B=(\sin C-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin A\sin B)\sin C$.

(1)求 C；

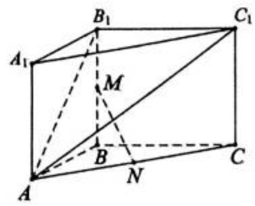
(2)若 $c=\sqrt{19}$，边 AB 上的中线 $CD=\frac{\sqrt{7}}{2}$，求边 a,b 的长.

22.（本小题满分 12 分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧棱 $BB_1=1$，$\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，且 M,N 分别为 BB_1,AC 的中点.

(1)证明：$MN//$平面 AB_1C_1；

(2)若 $BA=BC=2$，求二面角 $A-B_1C_1-B$ 的大小.



密封线内不要答题

SL 2022～2023学年度下学期高一6月考试试卷·数学
参考答案、提示及评分细则

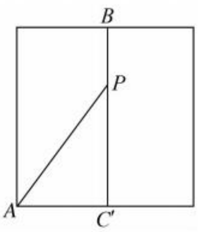
1. D

2. C 由题知,$\overrightarrow{AB}=(-3,-3,3)$,则与向量$\overrightarrow{AB}$共线的非零向量均为该直线的方向向量.故选C.

3. D $\frac{2i^3}{1-i}=-\frac{2i}{1-i}=-\frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-i(1+i)=1-i$,$z=1+a-i$为纯虚数,则$a=-1$,故选D.

4. B

5. B 侧面展开图如图所示:∵圆柱的底面周长为6 cm,∴$AC'=3$ cm.∵$PC'=\frac{2}{3}BC'$,



∴$PC'=\frac{2}{3}\times 6=4$ cm.在Rt△ACP中,$AP^2=AC'^2+CP^2=\sqrt{3^2+4^2}=5$.故选B.

6. A 选项A,因为$\alpha\cap\beta=l,n/\!/\alpha,n/\!/\beta$,所以$n/\!/l$,故A正确;
选项B,因为$A,B\in l,A,B\notin\alpha$,所以$l/\!/\alpha$或l与α相交,故B不正确;
选项C,$A,B\in\alpha,A,B,C\in\beta,\alpha\cap\beta=l$,此时点$C$不一定在平面$\alpha$内,所以$C\in l$不正确,故C不正确;
选项D,由$\alpha/\!/\beta,l\subset\alpha,n\subset\beta$,则$l$与$n$可能平行,也可能异面,故D不正确.

7. D 由已知可得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}=1\times1\times\cos45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$,$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$,
所以$\overrightarrow{AC_1}^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AA_1}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}=3+2\sqrt{2}$,所以$|\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{2}+1$.故选D.

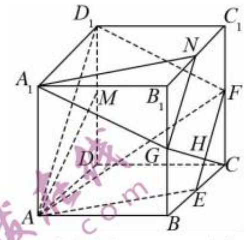
8. A 因为$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$,所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}^2=-2$,
所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=2$,即$|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OP}|\cos\angle AOP=2$,则$|\overrightarrow{OP}|=\frac{1}{\cos\angle AOP}$.
因为点P是圆O内部一点,所以$|\overrightarrow{OP}|=\frac{1}{\cos\angle AOP}<2$.所以$\frac{1}{2}<\cos\angle AOP\leqslant1$,
则$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP})^2=\overrightarrow{OA}^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OP}^2=8+\frac{1}{\cos^2\angle AOP}\geqslant9$.
当且仅当$\cos\angle AOP=1$时,等号成立.故$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}|$的最小值是3.

9. AB 由复数$x+i$,取$x=-2-i$,可知A正确;当$x=0$时,$(x+i)^{2023}=-i$,故B正确;当$x=-i$时,$x+i=0$为实数,故C不正确;由于x的取值未知,故D错误.

10. ACD 空间的任何一个向量都可用其他三个不共面的向量表示,A中忽略三个基底不共面的限制,故A错误;
若$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$为空间向量的一组基底,则$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$互不共面,且$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}$均为非零向量,假设$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}$共面,可设$\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}=x(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+y(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=x\boldsymbol{a}+(x+y)\boldsymbol{b}+y\boldsymbol{c}$,所以$\begin{cases}x=1\\x+y=0\\y=1\end{cases}$,该方程组无解,故$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}$不共面,因此,$\{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\}$可构成空间向量的一组基底,故B正确;
由于$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$,∵$2-2-1=-1\neq1$,此时,$P$、$A$、$B$、$C$四点不共面,C错误;
任何三个不共面的向量都可构成空间向量的一组基底,三个向量不共线时可能共面,故D错误.故选ACD.

11. CD 由题意知$\begin{cases}m^2+(n-4)^2=m^2+2m+1,\\\left(\frac{4}{n}-4\right)^2+p^2=p^2+2p+1,\end{cases}$整理得$2(m+p)=(n^2+\frac{16}{n^2})-8\left(n+\frac{4}{n}\right)+30$.令$t=n+\frac{4}{n}$,
则$n^2+\frac{16}{n^2}=t^2-8$,且$t\in(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$,∴$2(m+p)=t^2-8t+22=(t-4)^2+6\geqslant6$,∴$m+p\geqslant3$,
∴$m+p$的取值可能是3,6.

12. AD 如图所示,对于A,因为$A_1B_1/\!/DC$,所以$\angle B_1A_1G$即直线A_1G与直线DC所成的角,$\tan\angle B_1A_1G=\frac{B_1G}{A_1B_1}=\frac{1}{2}$,故正确;



对于B,取 B_1C_1 中点 N,连接 A_1N,GN,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$A_1N/\!/AE$,$NG/\!/EF$,$A_1N\not\subset$平面 AEF,$AE\subset$平面 AEF,所以 $A_1N/\!/$平面 AEF,同理可证 $NG/\!/$平面 AEF,$A_1N\cap NG=N$,所以平面 $A_1GN/\!/$平面 AEF,又 $A_1G\subset$平面 A_1GN,所以 $A_1G/\!/$平面 AEF,故错误;

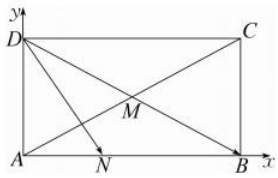
对于C,假设 C 与 G 到平面 AEF 的距离相等,即平面 AEF 将 CG 平分,则平面 AEF 必过 CG 的中点,连接 CG 交 EF 于 H,而 H 不是 CG 中点,则假设不成立,故错误;

对于D,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AD_1/\!/EF$,把截面 AEF 补形为等腰梯形 $AEFD_1$,易知 $AD_1=\sqrt{2}$,$EF=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$AE=\frac{\sqrt{5}}{2}$,AD_1,EF 之间的距离 $d=\sqrt{AE^2-(\frac{AD_1-EF}{2})^2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$,

所以其面积为 $S=\frac{1}{2}(AD_1+EF)d=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{4}=\frac{9}{8}$,故正确.故选AD.

13. $-\sqrt{39}$　$\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{2k}{\sqrt{13}\sqrt{9+k^2}}=-\frac{1}{2}$,得 $k=-\sqrt{39}$.

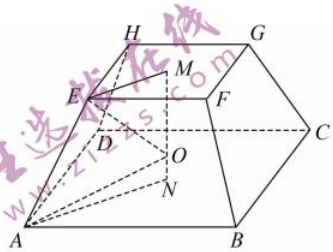
14. 4　由 $S_{\triangle ABC}=5$,有 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times20\times\sin A=5\Rightarrow\sin A=\frac{1}{2}$,再由正弦定理有 $\frac{a}{\sin A}=2\times4$,即 $a=\frac{1}{2}\times2\times4=4$.



15. $\frac{5}{2}$　以点 A 为坐标原点,$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD}$的方向为 x 轴,y 轴正方向,建立平面直角坐标系,则 $M(1,\frac{1}{2})$,$B(2,0)$,$D(0,1)$,设 $N(m,0)(0\leqslant m\leqslant2)$,所以 $\overrightarrow{MB}=(1,-\frac{1}{2})$,$\overrightarrow{DN}=(m,-1)$,

则 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{DN}=m+\frac{1}{2}$,因为 $0\leqslant m\leqslant2$,所以 $\frac{1}{2}\leqslant\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{DN}\leqslant\frac{5}{2}$,

即 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{DN}$的最大值为 $\frac{5}{2}$.



16. 20π　设正四棱台的高为 h cm,则 $\frac{1}{3}(2+8+\sqrt{2\times8})h=14$,解得 $h=3$ cm.

如图,取正方形 $EFGH$ 的中心为 M,正方形 $ABCD$ 的中心为 N,则 $MN=h=3$ cm,

故该正四棱台的外接球的球心在 MN 上,设为点 O,连接 ME,NA,OE,OA,

易知正四棱台的上、下底面边长分别为 $\sqrt{2}$ cm,$2\sqrt{2}$ cm,

故 $EM=1$ cm,$NA=2$ cm,设 $ON=y$ cm,则 $MO=(3-y)$ cm,

由勾股定理得 $EO^2=OM^2+EM^2=(3-y)^2+1$,$AO^2=ON^2+AN^2=y^2+4$,

故 $(3-y)^2+1=y^2+4$,解得 $y=1$,故外接球半径为 $\sqrt{y^2+4}=\sqrt{5}$ cm,表面积为 $4\pi\cdot(\sqrt{5})^2=20\pi$ cm².

17. 解:(1)∵复数 z 在复平面内对应的点为 (m^2+2m,m^2-m-6), ………… 2分

$\therefore m^2-m-6=-\frac{1}{2}m^2-m$,解得 $m=\pm2$. ………… 5分

(2)∵复数 z 在复平面内对应的点 (m^2+2m,m^2-m-6) 在第四象限, ………… 6分

$\therefore\begin{cases}m^2+2m>0,\\m^2-m-6<0,\end{cases}$ ………… 7分

解得 $0<m<3$. ………… 9分

故 m 的取值范围为 $(0,3)$. ………… 10分

18. 解:(1) $\overrightarrow{AB}=(-3,0,4)$,$\overrightarrow{AC}=(1,-1,0)$,

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{9+0+16}=5$,$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1+1+0}=\sqrt{2}$,$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-3$,

$\cos\angle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=-\frac{3}{5\sqrt{2}}$,

$\therefore \sin\angle BAC=\dfrac{\sqrt{41}}{5\sqrt{2}}$,

$\therefore$ 平行四边形面积为 $|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\sin\angle BAC=\sqrt{41}$. ………… 6分

(2)设 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$,则 $x^2+y^2+z^2=41$,①

$\because \boldsymbol{a}\perp\overrightarrow{AB},\boldsymbol{a}\perp\overrightarrow{AC}$,

$\therefore -3x+4z=0$,②

$x-y=0$,③

由①②③解得 $x=4,y=4,z=3$ 或 $x=-4,y=-4,z=-3$.

$\therefore \boldsymbol{a}=(4,4,3)$ 或 $\boldsymbol{a}=(-4,-4,-3)$. ………… 12分

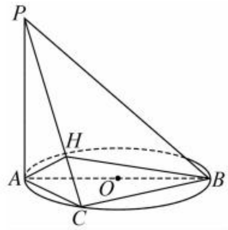
19.(1)证明:$\because AB$ 是⊙O 的直径,C 是圆周上不同于 A,B 的一动点.$\therefore BC\perp AC$. ………… 1分

$\because PA\perp$ 平面 ABC,$BC\subset$ 平面 ABC,$\therefore PA\perp BC$. ………… 2分

又 $PA\cap AC=A$,$PA,AC\subset$ 平面 PAC,$\therefore BC\perp$ 平面 PAC, ………… 3分

又 $PC\subset$ 平面 PAC,$\therefore BC\perp PC$,$\therefore \triangle BPC$ 是直角三角形. ………… 4分

(2)解:过 A 作 $AH\perp PC$ 于 H,



$\because BC\perp$ 平面 PAC,$AH\subset$ 平面 PAC,$\therefore BC\perp AH$, ………… 5分

又 $PC\cap BC=C$,$PC,BC\subset$ 平面 PBC,

$\therefore AH\perp$ 平面 PBC,

$\therefore \angle ABH$ 是直线 AB 与平面 PBC 所成的角, ………… 7分

在 Rt$\triangle PAC$ 中,$AH=\dfrac{PA\cdot AC}{\sqrt{PA^2+AC^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}AC$, ………… 9分

在 Rt$\triangle ABH$ 中,$\sin\angle ABH=\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{\frac{\sqrt{6}}{3}AC}{\sqrt{2}AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ………… 11分

故直线 AB 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ………… 12分

20.解:(1)因为 $A_1D=BD=A_1E=CE=\sqrt{5}$,O 为 DE 的中点,

所以 $A_1O\perp DE$. ………… 1分

因为平面 $A_1DE\perp$ 平面 $BCED$,且 $A_1O\subset$ 平面 A_1DE,

所以 $A_1O\perp$ 平面 $BCED$,所以 $CO\perp A_1O$. ………… 2分

由于四边形 $BCED$ 是一个上底为2,下底为4,腰长为 $\sqrt{5}$ 的等腰梯形,易求得 $OB=OC=2\sqrt{2}$.

在 $\triangle OBC$ 中,$BC=4$,所以 $CO\perp BO$, ………… 4分

所以 $CO\perp$ 平面 A_1OB,所以平面 $A_1OB\perp$ 平面 A_1OC. ………… 5分

(2)线段 OC 上不存在点 G,使得 $OC\perp$ 平面 EFG. ………… 6分

理由如下:

假设线段 OC 上存在点 G,使得 $OC\perp$ 平面 EFG,

连接 GE,GF,则必有 $OC\perp GF$,且 $OC\perp GE$. ………… 9分

在 Rt$\triangle A_1OC$ 中,由 F 为 A_1C 的中点,$OC\perp GF$,得 G 为 OC 的中点.

在 $\triangle EOC$ 中,因为 $OC\perp GE$,所以 $EO=EC$,这显然与 $EO=1,EC=\sqrt{5}$ 矛盾. ………… 11分

所以线段 OC 上不存在点 G,使得 $OC\perp$ 平面 EFG. ………… 12分

21.解:(1)因为 $\sin^2A+\sin^2B=(\sin C-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin A\sin B)\sin C$,

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ 得:$a^2+b^2=c^2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}ab\sin C$, ………… 1分

因为 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$,所以 $2ab\cos C=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}ab\sin C$, ………… 2分

即 $\tan C=-\sqrt{3}$, ………… 3分

因为 $C\in(0,\pi)$, ………… 4分

所以 $C=\dfrac{2\pi}{3}$. ………… 5分

(2)因为$C=\frac{2\pi}{3}$,由余弦定理知:$a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2+ab=19$, ······························ 6分

$\because \angle CDB+\angle CDA=\pi$,$\therefore \cos\angle CDB+\cos\angle CDA=0$, ······························ 7分

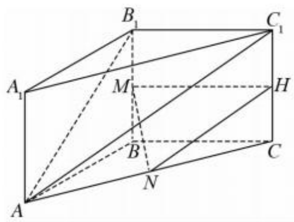
即$\dfrac{\left(\frac{c}{2}\right)^2+CD^2-b^2}{2\cdot\frac{c}{2}\cdot CD}+\dfrac{\left(\frac{c}{2}\right)^2+CD^2-a^2}{2\cdot\frac{c}{2}\cdot CD}=0$, ······························ 9分

$\because CD=\frac{\sqrt{7}}{2}$,$\therefore a^2+b^2=13$, ······························ 10分

故$ab=19-13=6$, ······························ 11分

解得:$a=3,b=2$或$a=2,b=3$. ······························ 12分

22.(1)证明:如图,取CC_1的中点为H,连接MH,NH.



$\because M$为BB_1的中点,且侧面BCC_1B_1为矩形,

$\therefore MH/\!/B_1C_1$.

$\because B_1C_1\subset$平面AB_1C_1,$MH\not\subset$平面AB_1C_1,

$\therefore MH/\!/$平面AB_1C_1. ······························ 2分

又$\because N$为AC的中点,

$\therefore NH$是$\triangle ACC_1$的中位线,

$\therefore NH/\!/AC_1$.

$\because AC_1\subset$平面AB_1C_1,$NH\not\subset$平面AB_1C_1,

$\therefore NH/\!/$平面AB_1C_1. ······························ 4分

$\because MH\cap NH=H$,且$MH,NH\subset$平面MNH,

$\therefore$平面$MNH/\!/$平面AB_1C_1.

$\because MN\subset$平面MNH,

$\therefore MN/\!/$平面AB_1C_1. ······························ 6分

(2)解:如图,过点N作$NE\perp BC$于E,过E作$EF\perp MH$于点F,连接FN、BN,

由(1)知平面$MNH/\!/$平面AB_1C_1,

$\therefore$二面角$A-B_1C_1-B$的大小即为二面角$N-MH-B$的大小.

$\because$在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中,侧面$BCC_1B_1\perp$底面ABC,且侧面$BCC_1B_1\cap$底面$ABC=BC$,

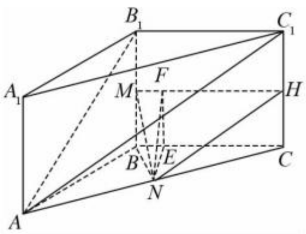
又$NE\subset$平面ABC,且$NE\perp BC$,

$\therefore NE\perp$平面BCC_1B_1.

$\because MH\subset$平面BCC_1B_1,$EF\subset$平面BCC_1B_1,

$\therefore NE\perp MH$,$NE\perp EF$.

又$\because MH\perp EF$,且$EF\cap NE=E$,$EF,NE\subset$平面NEF,



$\therefore MH\perp$平面NEF.

$\because NF\subset$平面NEF,

$\therefore NF\perp MH$,

$\therefore\angle EFN$为二面角$N-MH-B$的平面角.

$\because AB=BC=2$,且$\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$,$\therefore\angle ACB=\angle BAC=\frac{\pi}{6}$,且$BN\perp AC$,

从而$BN=\frac{1}{2}BC=1$,$AN=NC=\sqrt{3}$,

$\therefore NE=\frac{BN\cdot NC}{BC}=\frac{1\times\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\because EF=\frac{1}{2}BB_1=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$.

$\therefore$在$\mathrm{Rt}\triangle NEF$中,有$\tan\angle EFN=\frac{NE}{EF}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$,$\therefore\angle EFN=\frac{\pi}{3}$,

所以二面角$A-B_1C_1-B$的大小为$\frac{\pi}{3}$. ······························ 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。