县区＿＿＿＿学校＿＿＿＿班级＿＿＿＿姓名＿＿＿＿准考证号＿＿＿＿

密　封　线

参照秘密级管理★启用前

淄博市2022-2023学年度高三模拟考试
数　学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、座号等填写在答题卡和试卷指定位置上.
2. 回答选择题时，选出每个小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．若集合 $A=\{x|x^2-5x-6\le 0\}$，$B=\{x|y=\ln(2x-14)\}$，则 $(\complement_R A)\cap B=$

A．$(-1,7]$　　B．$(-1,6]$　　C．$(7,+\infty)$　　D．$(6,+\infty)$

2．设复数 $z=\frac{1-i}{1+i}+4i$，则 $|z|=$

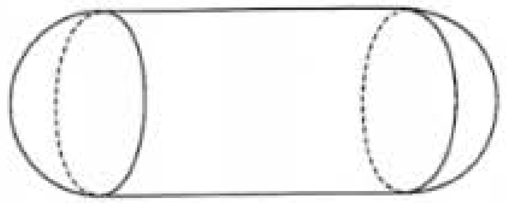
A．0　　B．1　　C．2　　D．3

3．函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})(\omega>0)$ 的图象与 x 轴的两个相邻交点间的距离为 $\frac{\pi}{3}$，要得到函数 $g(x)=A\cos\omega x$ 的图象，只需将 $f(x)$ 的图象

A．向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位　　B．向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位

C．向左平移 $\frac{\pi}{18}$ 个单位　　D．向右平移 $\frac{\pi}{18}$ 个单位

4．如图，某几何体的形状类似胶囊，两头都是半球，中间是圆柱，其中圆柱的底面半径与半球的半径都为2．若该几何体的表面积为 20π，则其体积为



A．$\frac{44}{3}\pi$　　B．15π　　C．$\frac{28}{3}\pi$　　D．$\frac{16}{3}\pi$

5．某公园有如图所示 A 至 H 共8个座位，现有2个男孩2个女孩要坐下休息，要求相同性别的孩子不坐在同一行也不坐在同一列，则不同的坐法总数为

A	B	C	D
E	F	G	H

A．168　　B．336　　C．338　　D．84

6．已知 ΔABO 中，$OA=1$，$OB=2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-1$，过点 O 作 OD 垂直 AB 于点 D，则

A．$\overrightarrow{OD}=\frac{5}{7}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{7}\overrightarrow{OB}$　　B．$\overrightarrow{OD}=\frac{3}{7}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{7}\overrightarrow{OB}$

C．$\overrightarrow{OD}=\frac{2}{7}\overrightarrow{OA}+\frac{5}{7}\overrightarrow{OB}$　　D．$\overrightarrow{OD}=\frac{4}{7}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{7}\overrightarrow{OB}$

7．直线 $x-2y+2=0$ 经过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点 F，交椭圆于 A，B 两点，交 y 轴于 M 点．若 $\overrightarrow{FM}=3\overrightarrow{AM}$，则该椭圆的离心率为

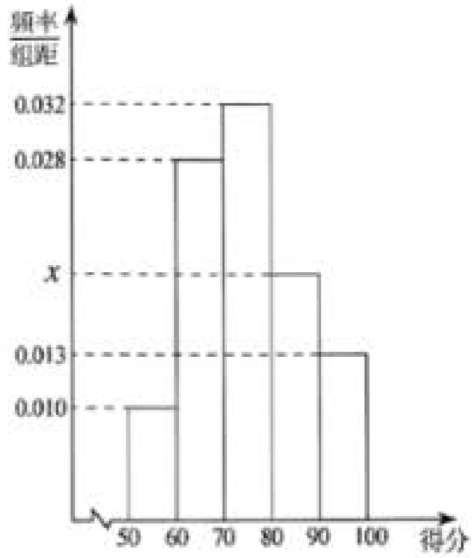
A．$\frac{\sqrt{17}+\sqrt{5}}{8}$　　B．$\frac{\sqrt{17}-\sqrt{5}}{4}$　　C．$\frac{\sqrt{17}-\sqrt{5}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{17}+\sqrt{5}}{9}$

8．已知 $a=e^{0.3}-1$，$b=\ln 1.3$，$c=\tan 0.3$，其中 $e=2.71828\cdots$ 为自然对数的底数，则

A．$c>a>b$　　B．$a>c>b$　　C．$b>a>c$　　D．$a>b>c$

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9．某学校为普及安全知识，对本校1500名高一学生开展了一次校园安全知识竞赛答题活动(满分为100分)．现从中随机抽取100名学生的得分进行统计分析，整理得到如图所示的频率分布直方图，则根据该直方图，下列结论正确的是



A．图中x的值为0.016

B．估计该校高一大约有77%的学生竞赛得分介于60至90之间

C．该校高一学生竞赛得分不小于90的人数估计为195人

D．该校高一学生竞赛得分的第75百分位数估计大于80

10．已知函数$f(x)=x^t+x-1\ (t\in\mathbf{R})$，则

A．当$t=-1$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$有最小值1

B．当$t=3$时，$f(x)$图象关于点$(0,1)$中心对称

C．当$t=2$时，$f(x)>\ln x$对任意$x>0$恒成立

D．$f(x)$至少有一个零点的充要条件是$t>0$

11．已知曲线C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{m}=1(m<4$且$m\neq0)$，$A,B$分别为$C$与$x$轴的左、右交点，$P$为$C$上任意一点（不与$A,B$重合），则

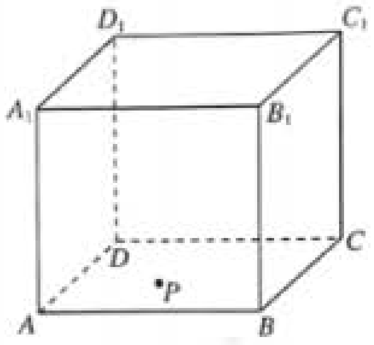
A．若$m=-1$，则C为双曲线，且渐近线方程为$y=\pm2x$

B．若P点坐标为$(1,n)$，则C为焦点在x轴上的椭圆

C．若点F的坐标为$(\sqrt{4-m},0)$，线段PF与x轴垂直，则$|PF|=\frac{m}{2}$

D．若直线PA,PB的斜率分别为k_1,k_2，则$k_1k_2=-\frac{m}{4}$

12．如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=2$，P是正方形$ABCD$内部（含边界）的一个动点，则



A．存在唯一点P，使得$D_1P\perp B_1C$

B．存在唯一点P，使得直线D_1P与平面$ABCD$所成的角取到最小值

C．若$\overrightarrow{DP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$，则三棱锥$P-BB_1C$外接球的表面积为$8\pi$

D．若异面直线D_1P与A_1B所成的角为$\frac{\pi}{4}$，则动点P的轨迹是抛物线的一部分

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13．在二项式$(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{x})^9$的展开式中，常数项是________．

14．若$\sin(\theta+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{3},\theta\in(0,\pi)$，则$\cos\theta=$________．

15．在平面直角坐标系xOy中，已知点$P(3,1)$，直线$y=kx+b$与圆$x^2+y^2=10$交于M,N两点．若ΔPMN为正三角形，则实数$b=$________．

16．已知函数$f(x)=\begin{cases}|x+2|+1, & x\le0,\\ \ln x, & x>0,\end{cases}$若存在实数$a<b<c$，满足$f(a)=f(b)=f(c)$，则$af(a)+bf(b)+cf(c)$的最大值是________．

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10分）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+3\times2^{n-1}\ (n\in\mathbf{N}^*)$．

（1）判断数列$\{\frac{a_n}{2^n}\}$是否为等差数列，并说明理由；

（2）求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n．

准考证号________ 姓名________ 班级________ 学校________ 县区________

线 封 密

18.（12分）在ΔABC中，角A,B,C的对边分别是a,b,c，满足$(a+b+c)(a+b-c)=ab$.

（1）求角C；

（2）若角C的平分线交AB于点D，且$CD=2$，求$2a+b$的最小值.

19.（12分）某电商平台统计了近七年小家电的年度广告费支出x_i（万元）与年度销售量y_i（万台）的数据，如表所示：

年份	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
广告费支出x	1	2	4	6	11	13	19
销售量y	1.9	3.2	4.0	4.4	5.2	5.3	5.4

其中$\sum_{i=1}^{7}x_iy_i=279.4$，$\sum_{i=1}^{7}x_i^2=708$.

（1）若用线性回归模型拟合y与x的关系，求出y关于x的线性回归方程；

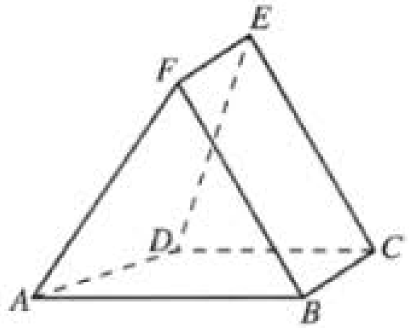
（2）若用$y=c+d\sqrt{x}$模型拟合得到的回归方程为$\hat{y}=1.63+0.99\sqrt{x}$，经计算线性回归模型及该模型的$R^2$分别为0.75和0.88，请根据$R^2$的数值选择更好的回归模型拟合$y$与$x$的关系，进而计算出年度广告费$x$为何值时，利润函数$\hat{z}=200y-x$的预报值最大？

参考公式：$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$；

20.（12分）已知多面体$ABCDEF$中，$AD//BC//EF$，且$AD=CD=DE=4$，$BC=EF=2$，$\angle BCD=\angle FED=\dfrac{\pi}{3}$.

（1）证明：$AD\perp BF$；

（2）若$BF=2\sqrt{6}$，求直线CD与平面ABF所成角的正弦值.



21.（12分）已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$上一点$P(2,t)$到其焦点F的距离为3，A,B为抛物线C上异于原点的两点．延长AF,BF分别交抛物线C于点M,N，直线AN,BM相交于点Q.

（1）若$AF\perp BF$，求四边形$ABMN$面积的最小值；

（2）证明：点Q在定直线上.

22.（12分）已知函数$f(x)=x\ln x$和$g(x)=b(x-\sqrt{x})$ $(b>0)$有相同的最小值.

（1）求b的值；

（2）设$h(x)=f(x)+g(x)$．方程$h(x)=m$有两个不相等的实根x_1，x_2，

求证：$\dfrac{x_1+x_2}{2}>\dfrac{1}{e^2}$.

参照秘密级管理★启用前

淄博市 2022–2023 学年度高三模拟考试

数学参考答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．C；2．D；3．C；4．A；5．B；6．A；7．C；8．B．

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．BCD；10．AC；11．BD；12．BCD．

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．$-\dfrac{21}{16}$；14．$\dfrac{1-2\sqrt{6}}{6}$；15．-5；16．$3e^3-12$．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）解：（1）因为 $\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{2a_n+3\times 2^{n-1}}{2^{n+1}}-\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{3}{4}$，　　………2 分

所以数列 $\{\dfrac{a_n}{2^n}\}$ 是以 $\dfrac{1}{2}$ 为首项，以 $\dfrac{3}{4}$ 为公差的等差数列；　　…………………4 分

（4 分得分点中解释了首项和公差得 1 分，“等差数列”得 1 分）

（2）由（1）知：

数列 $\{\dfrac{a_n}{2^n}\}$ 的通项公式为：$\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{1}{2}+(n-1)\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}(3n-1)$，　　…………5 分

则 $a_n=(3n-1)\cdot 2^{n-2}(n\in\mathbf{N}^*)$，　　………………6 分（没有 $n\in\mathbf{N}^*$ 可得分）

$S_n=2\times 2^{-1}+5\times 2^0+8\times 2^1+\cdots+(3n-4)\times 2^{n-3}+(3n-1)\times 2^{n-2}$ ①，　…7 分

$2S_n=2\times 2^0+5\times 2^1+8\times 2^2+\cdots+(3n-4)\times 2^{n-2}+(3n-1)\times 2^{n-1}$ ②，

①—②得：

$$
\begin{aligned}
-S_n&=1+3\times(2^0+2^1+\cdots+2^{n-2})-(3n-1)\times 2^{n-1}\\
&=1+3\times\frac{1-2^{n-1}}{1-2}-(3n-1)\times 2^{n-1}\\
&=-2+(4-3n)\cdot 2^{n-1}
\end{aligned}
$$

……………………9 分

则 $S_n=2+(3n-4)\cdot 2^{n-1}$　　……………………………10 分

18．（12 分）解：（1）由$(a+b+c)(a+b-c)=ab$可得：$a^2+b^2-c^2=-ab$，

由余弦定理知，

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\dfrac{ab}{2ab}=-\dfrac{1}{2}$， ……………………2 分

因此$C=\dfrac{2\pi}{3}$． ……………………4 分

（2）在ΔACD中，由$\dfrac{CD}{\sin A}=\dfrac{AD}{\sin\frac{\pi}{3}}$，得$AD=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin A}$， …………5 分

在ΔBCD中，由$\dfrac{CD}{\sin B}=\dfrac{BD}{\sin\frac{\pi}{3}}$，可得$BD=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin B}$， …………6 分

所以$c=AD+BD=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin A}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sin B}$； ……………………………7 分

在ΔABC中，由$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{\dfrac{\sqrt{3}}{\sin A}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sin B}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}},$$

解得$a=2\left(1+\dfrac{\sin A}{\sin B}\right)$， ……………………………………………………8 分

$b=2\left(\dfrac{\sin B}{\sin A}+1\right)$， ……………………………………………………9 分

$2a+b=2\left(3+\dfrac{2\sin A}{\sin B}+\dfrac{\sin B}{\sin A}\right)$， ……………………10 分

因为$\sin A>0$，$\sin B>0$，

所以$2a+b\geq 2\left(3+2\sqrt{\dfrac{2\sin A}{\sin B}\times\dfrac{\sin B}{\sin A}}\right)=2\left(3+2\sqrt{2}\right)=6+4\sqrt{2}$，

因此$2a+b$的最小值为$6+4\sqrt{2}$． ……………………12 分

另解：由$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ACD}+S_{\Delta BCD}$，　……………………5 分

可得$\frac{1}{2}CA\cdot CB\cdot\sin C=\frac{1}{2}CA\cdot CD\cdot\sin\angle ACD+\frac{1}{2}CB\cdot CD\cdot\sin\angle BCD$　…6 分

化简可得$ab\sin\frac{2\pi}{3}=2b\sin\frac{\pi}{3}+2a\sin\frac{\pi}{3}$，即$ab=2b+2a$，　………8 分

即$\frac{2}{a}+\frac{2}{b}=1$，可得$2a+b=(2a+b)\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}\right)=6+\frac{2b}{a}+\frac{4a}{b}$，　…………10 分

因为$a>0$，$b>0$，由基本不等式可得$2a+b\geq 2\sqrt{\frac{2b}{a}\times\frac{4a}{b}}+6=6+4\sqrt{2}$，

所以$2a+b$的最小值为$6+4\sqrt{2}$.　……………………12 分

19.（12 分）解：（1）$\bar{x}=\frac{1+2+4+6+11+13+19}{7}=8$，　…………1 分

$\bar{y}=\frac{1.9+3.2+4.0+4.4+5.2+5.3+5.4}{7}=4.2$，　…………………………2 分

所以$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{7}x_iy_i-7\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{7}x_i^2-7\bar{x}^2}=\frac{279.4-7\times 8\times 4.2}{708-7\times 8^2}=0.17$,　………………………4 分

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=4.2-0.17\times 8=2.84$　………………………5 分

y关于x的线性回归方程：$\hat{y}=0.17x+2.84$　………………………6 分

（2）因为$0.75<0.88$，R^2越大拟合效果越好，

选用回归方程$\hat{y}=1.63+0.99\sqrt{x}$更好，　………………………8 分

$\hat{z}=200(1.63+0.99\sqrt{x})-x=-x+198\sqrt{x}+326$　………………………10 分

$\hat{z}=-(\sqrt{x}-99)^2+10127$，

即当$\sqrt{x}=99$时，$x=9801$时，利润的预报值最大　………………………12 分

20.（12 分）解证：（1）连接 BD,DF，

在 ΔBCD 中，$DC=4,BC=2,\angle BCD=\frac{\pi}{3}$，

可得 $\angle DBC=\frac{\pi}{2}$，即 $BD\perp BC$,

同时 $AD//BC$，可得 $BD\perp AD$ ························1 分

同理可得 $DF\perp AD$ ························2 分

因为 $BD\perp AD$，$DF\perp AD$，且 $BD\subset$ 平面 BDF，$DF\subset$ 平面 BDF，

$BD\bigcap DF=D$，

所以 $AD\perp$ 平面 BDF； ························4 分

又因为 $FB\subset$ 平面 BDF，所以 $AD\perp BF$ ························5 分

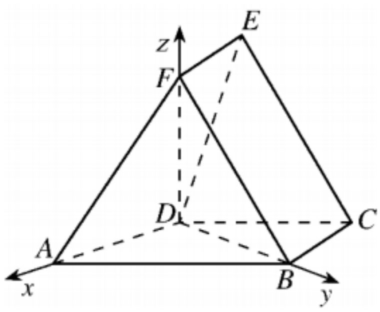
（2）在 ΔBDF 中，易得 $BD=FD=2\sqrt{3}$，且 $BF=2\sqrt{6}$，

所以 $BD\perp FD$， ··6 分

同时 $BD\perp AD$，$DF\perp AD$，

以 DA 所在直线为 x 轴，以 DB 所在直线为 y 轴，以 DF 所在直线为 z 轴，如图所示

建立空间直角坐标系 $D-xyz$； ··7 分



其中 $A(4,0,0),B(0,2\sqrt{3},0),F(0,0,2\sqrt{3}),C(-2,2\sqrt{3},0)$，

$\overrightarrow{AF}=(-4,0,2\sqrt{3}),\overrightarrow{AB}=(-4,2\sqrt{3},0)$，

设向量 $\vec{n}=(x,y,z)$ 为平面 ABF 的法向量，

满足 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4x+2\sqrt{3}y=0\\ -4x+2\sqrt{3}z=0\end{cases}$，

不妨取$\vec{n}=(\sqrt{3},2,2)$ ………………………………………9 分

$\overrightarrow{DC}=(-2,2\sqrt{3},0)$ ………………………………………10 分

直线CD与平面ABF所成角的正弦值为:

$$|\cos<\overrightarrow{DC},\vec{n}>|=|\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}\times\sqrt{\sqrt{3}^2+2^2+2^2}}|=\frac{\sqrt{33}}{22}.$$ …………12 分

21.（12 分）解:（1）由抛物线定义可知，$2+\frac{p}{2}=3$，解得$p=2$，

即抛物线C方程为$y^2=4x$ ……………………………1 分

由题意，设$A(x_1,y_1),M(x_2,y_2)$，直线AM的方程$x=my+1(m\neq0)$，

由$\begin{cases}x=my+1\\y^2=4x\end{cases}$，消去$x$得$y^2-4my-4=0$，$\Delta>0$恒成立，

由韦达定理可知:

$y_1+y_2=4m,y_1\cdot y_2=-4$ ……………………………2 分

故$|AM|=x_1+x_2+p=m(y_1+y_2)+4=4(m^2+1)$ ……………………3 分

因为$AF\perp BF$，所以直线BN的方程为$x=-\frac{1}{m}y+1$，

于是$|BN|=4(\frac{1}{m^2}+1)$， ……………………………4 分

则$S_{ABMN}=\frac{1}{2}\cdot|AM|\cdot|BN|=\frac{1}{2}\times4(m^2+1)\times4(\frac{1}{m^2}+1)=8(m^2+\frac{1}{m^2}+2)\geq32$

（$m^2=\frac{1}{m^2}$，即$m=\pm1$时等号成立）;

即四边形$ABMN$面积的最小值为32. ……………………………5 分

（2）设$B(x_3,y_3),N(x_4,y_4),Q(x_Q,y_Q)$，因为$A,B,M,N$都在$C$上，

所以，$x_i=\frac{{y_i}^2}{4}(i=1,2,3,4)$ ……………………………6 分

因为A,N,Q三点共线，所以有$\dfrac{y_4-y_1}{x_4-x_1}=\dfrac{y_1-y_Q}{x_1-x_Q}$，

即$\dfrac{y_4-y_1}{\dfrac{y_4^2}{4}-\dfrac{y_1^2}{4}}=\dfrac{y_1-y_Q}{\dfrac{y_1^2}{4}-x_Q}$，整理得：$y_Q=\dfrac{y_1\cdot y_4+4x_Q}{y_1+y_4}$ ……………………8 分

同理，因为B,M,Q三点共线，可得$y_Q=\dfrac{y_2\cdot y_3+4x_Q}{y_2+y_3}$ ………………9 分

即$\dfrac{y_1\cdot y_4+4x_Q}{y_1+y_4}=\dfrac{y_2\cdot y_3+4x_Q}{y_2+y_3}$，

解得：$4x_Q=\dfrac{y_1\cdot y_2\cdot y_3+y_2\cdot y_3\cdot y_4-y_1\cdot y_2\cdot y_4-y_1\cdot y_3\cdot y_4}{y_2+y_3-y_1-y_4}$ …………10 分

由（1）可知，$y_1\cdot y_2=y_3\cdot y_4=-4$，代入上式可得：

$4x_Q=\dfrac{-4(y_3+y_2-y_4-y_1)}{y_2+y_3-y_1-y_4}=-4$，得$x_Q=-1$， …………………11 分

即点Q在定直线$x=-1$上. ……………………………12 分

22.（12 分）解证：（1）$g(x)=b(x-\sqrt{x})=b[(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{1}{4}]\geq-\dfrac{b}{4}$，

所以$g(x)_{\min}=g(\dfrac{1}{4})=-\dfrac{b}{4}$； …………………………………………1 分

函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\ln x+1$，

令$f'(x)<0$解得$0<x<e^{-1}$，$f'(x)>0$解得$x>e^{-1}$，

所以$f(x)$在$(0,e^{-1})$上单调递减，在$(e^{-1},+\infty)$上单调递增.

所以$f(x)_{\min}=f(e^{-1})=-e^{-1}$. ……………………………………3 分

因为函数$f(x)=x\ln x$和$g(x)=b(x-\sqrt{x})$ $(b>0)$有相同的最小值，

所以$-\dfrac{b}{4}=-e^{-1}$即$b=\dfrac{4}{e}$. ……………………………………4 分

（2）$h(x)=x\ln x+\frac{4}{e}(x-\sqrt{x})$，$h'(x)=\ln x+1+\frac{4}{e}(1-\frac{1}{2\sqrt{x}})$，

令 $H(x)=h'(x)$，则 $H'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{e}x^{-\frac{3}{2}}>0$，

所以 $H(x)$ 即 $h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………5 分

因为 $h'(\frac{1}{e})=\frac{4}{e}(1-\frac{\sqrt{e}}{2})>0$，$h'(\frac{1}{e^2})=\frac{4}{e}-3<0$，

所以 $\exists x_0\in(\frac{1}{e^2},\frac{1}{e})$ 使 $h'(x_0)=0$，

于是 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增.

又 $h(1)=0$，当 $x\to 0$ 时 $h(x)\to 0$，则当 $x\in(0,1)$ 时

$h(x)<0$. ……………………………………………………7 分

方程 $h(x)=m$ 有两个不相等的实根 x_1，x_2，

不妨设 $0<x_1<x_0<x_2<1$.

设 $G(x)=h(x)-h(2x_0-x)\ (0<x<x_0)$，则

$$G'(x)=h'(x)+h'(2x_0-x)=\ln x+1+\frac{4}{e}(1-\frac{1}{2\sqrt{x}})+\ln(2x_0-x)+1+\frac{4}{e}(1-\frac{1}{2\sqrt{2x_0-x}})$$

$$=\ln x(2x_0-x)-\frac{2}{e}(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{2x_0-x}})+2+\frac{8}{e}<\ln x_0^2-\frac{2}{e}\frac{2}{\sqrt{\sqrt{x}\cdot\sqrt{2x_0-x}}}+2+\frac{8}{e}$$

$$<2\ln x_0-\frac{2}{e}\frac{2}{\sqrt{x_0}}+2+\frac{8}{e},$$

由 $h'(x_0)=0$ 即 $\ln x_0+1+\frac{4}{e}(1-\frac{1}{2\sqrt{x_0}})=0$ 得，$\ln x_0=\frac{2}{e\sqrt{x_0}}-1-\frac{4}{e}$，

并代入上式，得 $G'(x)<2(\frac{2}{e\sqrt{x_0}}-1-\frac{4}{e})-\frac{2}{e}\frac{2}{\sqrt{x_0}}+2+\frac{8}{e}=0$， ………10 分

所以 $G(x)$ 是减函数，

$G(x_1)>G(x_0)=h(x_0)-h(2x_0-x_0)=0$，即 $h(x_1)>h(2x_0-x_1)$，

又由题意 $h(x_1)=h(x_2)$，得 $h(x_2)>h(2x_0-x_1)$，

而 $2x_0-x_1>x_0$，且 $h(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $x_2>2x_0-x_1$ 即 $x_1+x_2>2x_0$，又 $x_0>\frac{1}{e^2}$，故 $\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{1}{e^2}$. ……12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。